S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 144–144 (2015) УДК 519.17

DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx MSC 05C25

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С МАССИВАМИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$

И.Н. Белоусов, М.П. Голубятников, А.А. Махнев

Abstract. There is infinite sequence of formally self-dual classical distance-regular graphs Γ with $b = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = n-1$, $v = n^3$ $(n > 5)$ (A. Brouwer). Graph Γ has intersection array $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ and realized when n is a power of 2 by a biliniar forms graph. We suggested that Γ does not exist if n is not a power of 2. It is true if $n \geq 71$. Finally distance-regular graph with intersection array $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$ does not exist.

Keywords: distance-regular graph, formally self-dual graph, geometric graph, biliniar forms graph.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Граф Σ называется r-накрытием графа Γ, если имеется гомоморфизм φ, отображающий Σ на Γ, при котором $|\varphi^{-1}(u)| = r$ для оюбой вершины $u \in \Gamma$ и для $w \in \varphi^{-1}(u)$ граф $\varphi(\Sigma(w))$ изоморфен $\Gamma(u)$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим

Belousov, I.N., Golubyatnikov M.P., Makhnev, A.A., On distance-regular graphs with intersection arrays $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10067).

Поступила 25 мая 2020 г., опубликована ?? марта 2021 г.

$a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ [1].

Порядок клики в дистанционно регулярном графе степени k, имеющем наименьшее собственное значение $-m$ не больше $1 + k/m$. Клика K с $1 + k/m$ вершинами называется кликой Дельсарта. Дистанционно регулярный граф называется *геометрическим*, если он содержит такое семейство S клик Дельсарта, что каждое ребро графа содержится в единственной клике из S.

Дистанционно регулярный граф называется формально самодуальным, если первая и вторая матрицы его собственных значений совпадают.

Пусть $V = F^d$, $W = F^e$, $d \le e$ и B — линейное пространство размерности de над полем $F = F_q$ билинейных форм f из $V \times W$ в F. Нулевое пространство f в V — это $\{v \in V \mid f(v, W) = 0\}$. Рангом формы f называется произведение коразмерностей нулевых пространств в V и W. Формы f и g смежны в графе билинейных форм $H_q(d, e)$, если ранг $f - g$ равен 1.

Имеется бесконечное семейство формально самодуальных дистанционно регулярных графов Γ с классическими параметрами $b = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = n - 1$, $v = n^3$ $(n > 5)$ ([1, стр. 425]). Граф Γ имеет массив пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ и реализуется как граф билинейных форм $H_2(3, e)$, когда $n = 2^e$. Графы $H_q(d, e)$ охарактеризованы массивом пересечений (Метш, 1999) в случаях $q = 2, e \ge d + 4$ и $q \ge 3, e \ge d + 3$ [2]. Гаврилюк и Кулен рассмотрели случай $q = 2, e = d$ [3]. Таким образом, графы $H_q(3, e)$ распознаются по массиву пересечений, за исключением случаев $e \in \{4, 5, 6\}$ (случаев $n \in \{16, 32, 64\}$).

При $n = 6$ получим массив пересечений $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$, а при $n = 7$ получим массив пересечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$. С помощью тройных чисел пересечений было доказано, что оба графа не существуют ([?] и [?] соответственно). Гаврилюк и Кулен с помощью изучения собственных значений локальных подграфов получили другое доказательство несуществования графа с массивом пересечений $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$ [3, теорема 5.1]. В (см. [3, раздел 5]) доказано, что в дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ окрестность никакой вершины не может быть $7 \times (n-1)$-решеткой в случаях $n = 6$ и $n = 7$.

Предложение 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ *имеет спектр* $(7n-7)^1, (3n-7)^{7n-7}, (n-7)^{7(n-1)(n-2)}, -7^{(n-1)(n-2)(n-4)}$, *вторую матрицу собственных значений*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 7n-7 & 7(n-1)(n-2) & (n-1)(n-2)(n-4) \\ 1 & 3n-7 & (n-2)(n-7) & -(n-2)(n-4) \\ 1 & n-7 & -3n+14 & 2n-8 \\ 1 & -7 & 14 & -8 \end{pmatrix},$$

и числа пересечений

(1) $p^1_{11} = n + 4$, $p^1_{21} = 6n - 12$, $p^1_{22} = 3(n+1)(n-2)$, $p^1_{32} = 4(n-2)(n-4)$, $p^1_{33} = (n-2)(n-4)(n-5)$;

(2) $p^2_{11} = 6$, $p^2_{21} = 3n + 3$, $p^2_{22} = n^2 + 24n - 86$, $p^2_{31} = 4n - 16$, $p^2_{32} = 6(n-4)^2$, $p^2_{33} = (n^2 - 9n + 22)(n-4)$;

(3) $p^3_{21} = 28$, $p^3_{22} = 42n - 168$, $p^3_{31} = 7n - 35$, $p^3_{32} = 7n^2 - 63n + 154$, $p^3_{33} = n^3 - 14n^2 + 70n - 128$.

По предложению 1 любой граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ имеет наименьшее собственное значение -7 и порядок клики Дельсарта в нем равен n. Если C — клика Дельсарта, то любая вершина вне C смежна с 0 или $n - b_1/(\theta_3+1) = 2$ вершинами из C ([1, предложение 4.4.6]).

Гипотеза 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ *не существует, если* n *не является степенью* 2.

В [3] отмечается, что гипотеза справедлива, если $n \geq 134$. Следующий результат показывает, что гипотеза справедлива, если $n \geq 94$.

Теорема 1. *Если дистанционно регулярный граф* Γ *с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ *существует и* $n \geq 94$, *то* $n = 2^e$ *и* Γ *— граф билинейных форм* $H_2(3, e)$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. *Если* $n > 70$ *или* $n > 60$ *и порядок коклики в окрестностях вершин графа* Γ *не больше 7, то* Γ *является геометрическим.*

При конкретных значениях $q = 2$, $d = 3$, $s = r = 7$, $\beta = n - 1$ получено существенное усиление результата Метша (предложение 2.2 из [2]).

Теорема 2. *Пусть* Γ *— геометрический граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. *Если* $n > 42$, *то* $n = 2^e$ *и* Γ *— граф билинейных форм* $H_2(3, e)$.

Заметим, что по следствию 1 граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ является геометрическим, если $n > 70$ или $n > 60$ и окрестности вершин в Γ не содержат 8-коклик. Таким образом, выполняется

Следствие 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. *Если* $n > 70$, *то* $n = 2^e$ *и* Γ *— граф билинейных форм* $H_2(3, e)$.

В [4, проблема 9] сформулирована проблема существования дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$ (случай $n = 9$). Эта проблема решена в следующей теореме.

Теорема 3. *Дистанционно регулярный граф* Γ *с массивом пересечений* $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$ *не существует.*

В доказательстве теоремы 3 используются тройные числа пересечений [5].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right] = |\left\{ {u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right\}|$. Числа $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1r_2r_3]$ нет общих формул. Однако, в [5] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v), U = d(v,w), V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:

$\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p_{jh}^{U} - [0jh]$, $\sum_{l=1}^{d}[ilh] = p_{ih}^{V} - [i0h]$, $\sum_{l=1}^{d}[ijl] = p_{ij}^{W} - [ij0]$.

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p_{ij}^{W} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим $S_{ijh}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$. Если параметр Крейна $q_{ij}^{h} = 0$, то $S_{ijh}(u,v,w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \left\{\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix}\right\}$, $[ijh] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uwv \\ ihj \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]^{*} = \left[\begin{smallmatrix} vuw \\ jih \end{smallmatrix}\right]$ и $[ijh]^{\sim} = \left[\begin{smallmatrix} wvu \\ hji \end{smallmatrix}\right]$. Вычисление чисел $[ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uwv \\ ihj \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]^{*} = \left[\begin{smallmatrix} vuw \\ jih \end{smallmatrix}\right]$ и $[ijh]^{\sim} = \left[\begin{smallmatrix} wvu \\ hji \end{smallmatrix}\right]$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

1. Характеризация графов билинейных форм $H_2(3, e)$

Следующий результат получен Метшем (см. предложение 2.2 из [2]).

Предложение 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с классическими параметрами (d, q, α, β), $d \geq 3$, $r = q^d - 1$ и $\alpha = q - 1 \geq 1$. Предположим, что существует целое число $s \geq r$ такое, что*

(1) *если $q = 2$ и $d = 3$, то $s = r = 7$,*

(2) $(s+1)(\lambda+1) - s(s+1)(q^2+q-1)/2 > r\beta$,

(3) $\lambda + 1 > s(q^3 + q^2 + 2q - 1) - q^2(q^2 + q + 1)$.

Тогда q — степень простого числа, $\beta = q^e - 1$ и Γ — граф билинейных форм $H_q(d, e)$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. Тогда $a_1 = n+4$ и Γ имеет классические параметры $(3, 2, 1, n-1)$. Далее, $s = r = 7$. Если $n \geq 94$, то выполнены неравенства $8(n+5) - 140 > 7(n-1)$, $n + 5 > 7(8+4+4-1) - 4(4+2+1)$ и по педложению Метша $n = 2^e$ и Γ — граф билинейных форм $H_2(3, e)$.

2. Геометричность некоторых графов с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$

Следующий результат является частным случаем следствия 1.3 из [6].

Предложение 3. *Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), e, s — неотрицательные целые числа, и максимальная клика C с $|C| \geq \lambda + 2 - (s-1)e$ называется прямой. Если выполняются условия:*

(1) $|[u] \cap [y] \cap [z]| \leq e$ *для любых двух несмежных верщин y, z и дюбой вершины $u \in [y] \cap [z]$,*

(2) $\lambda + 1 > (2s-1)e$,

(3) *либо порядок коклики в окрестности любой вершины не больше s, либо $k < (s+1)(\lambda+1) - s(s+1)e/2$,*

то каждая вершина графа Γ *лежит на* s *прямых, а каждое ребро графа* Γ *лежит на единственной прямой.*

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$.

Лемма 1. *Пусть* $d(u,w)=2$. *Тогда выполнятся следующие утверждения:*

(1) *если* $u^{\perp}$ *содержит семь клик Дельсарта, то степень любой вершины в графе* $[u]\cap[w]$ *не больше* 3;

(2) *если* $[u]$ *является* $7\times(n-1)$*-решеткой, то* $[u]\cap[w]$ *является шестиугольником;*

(3) *если* $[u]$ *является* $7\times(n-1)$*-решеткой,* $z\in[w]\cap\Gamma_2(u)$, *то* $[u]\cap[w]\cap[z]$ *является пустым графом или объединением не более двух изолированных ребер.*

Доказательство. Заметим, что $[w]$ содержит по две вершины в трех кликах Дельсарта L_1, L_2, L_3 из $u^{\perp}$. Вершина из L_1 смежна с единственной вершиной из $L_1\cap[w]$ и не более чем с одной вершиной из $L_2\cap[w]$ и из $L_3\cap[w]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $[u]$ является $7\times(n-1)$-решеткой. Очевидно, что $[u]\cap[w]$ является шестиугольником. Пусть $z\in[w]\cap\Gamma_2(u)$ и $[u]\cap[w]\cap[z]$ — непустой граф. Тогда z лежит в максимальной клике из $[w]$, содержащей ребро шестиугольника $[u]\cap[w]$. Если z лежит еще в одной максимальной клике из $[w]$, содержащей ребро шестиугольника $[u]\cap[w]$, то $[u]\cap[w]\cap[z]$ является объединением двух изолированных ребер. □

Лемма 2. *Выполнятся следующие утверждения:*

(1) *если степень вершины в любом* μ*-подграфе графа* Γ *не больше* 2, *то в случае* $n\geq 22$ *граф* Γ *является геометрическим;*

(2) *если степень вершины в любом* μ*-подграфе графа* Γ *не больше* 3, *то в случае* $n\geq 38$ *граф* Γ *является геометрическим;*

(3) *если степень вершины в любом* μ*-подграфе графа* Γ *не больше* 4, *то в случае* $n\geq 66$ *граф* Γ *является геометрическим.*

Доказательство. Положим $s=7$. Если $e=2$, то неравенства $n+5>26$ и $7(n-1)<8(n+5)-56$ выполняются при $n\geq 22$. В этом случае по предложению 4 граф Γ является геометрическим.

Если $e=3$, то неравенства $n+5>39$ и $7(n-1)<8(n+5)-84$ выполняются при $n\geq 38$. В этом случае по предложению 4 граф Γ является геометрическим.

Если $e=4$, то неравенства $n+5>52$ и $7(n-1)<8(n+5)-112$ выполняются при $n\geq 66$. В этом случае по предложению 4 граф Γ является геометрическим. □

Лемма 3. *Пусть максимальный порядок коклики в окрестностях вершин графа* Γ *равен* t. *Если* $n>70$ *или* $t\leq 7$ *и* $n>60$, *то граф* Γ *является геометрическим.*

Доказательство. Пусть $s=8$. Тогда неравенство $n>70$ равносильно $n+5>5(2s-1)$, а $n>64$ равносильно $7(n-1)<(s+1)(n+5)-5s(s+1)/2$. По предложению 4 граф Γ является геометрическим, если $n>70$

Пусть $s=7$. Тогда неравенство $n>60$ равносильно $n+5>5(2s-1)$, а $n>93$ равносильно $7(n-1)<(s+1)(n+5)-5s(s+1)/2$. Если $t\leq 7$, то по предложению 4 граф Γ является геометрическим при $n>60$. □

По лемме 3 выполняется следствие 1.

3. О геометрических графах с массивами пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$

В этом разделе мы докажем теорему 2. Доказательство проводится модификацией рассуждений Метша из доказательства предложения 2.2 [2]. Имеем $q = 2$, $d = 3$, $s = r = 7$, $\beta = n-1$, неравенство (3) равносильно $n > 42$, а неравенство (2) не используется. Для смежных вершин u, w через uw обозначим единственную прямую (клику Дельсарта), проходящую через u, w. Если $d(u, w) = 2$, то через $[u, w]$ обозначим множество прямых, проходящих через u и пересекающих $[w]$.

Леммы 2.3–2.9 из [2] проверяются непосредственно, при этом неравенство $n > 42$ не используется.

Лемма 4. *Рассмотрим вершину $p \in \Gamma$ и прямую L с $d(p, L) = 1$. Тогда $[p, u] = [p, w]$ для любых вершин $u, w \in L \cap \Gamma_2(p)$.*

Доказательство. Повторяем доказательство леммы 2.10 из [2]. □

Здесь используется неравенство (3) из предложения 2.2 [2], равносильное $n > 42$.

Лемма 5. *Если вершины $v, v' \in \Gamma$ смежны, то подграф $[v] \cap [v'] - vv'$ является кликой.*

Доказательство. Пусть вершины $v, v' \in \Gamma$ смежны, $X = [v] \cap [v'] - vv'$ и $x \in X$. Положим $L = vx$. Тогда найдется вершина $p \in L$ с $d(p, v') = 2$. Если $x' \in X$, $d(p, x') = 2$, то вершины x, x' смежны (повторение рассуждений из доказательства леммы 2.11 [2]). Так как для любой вершины $x' \in X - \{x\}$ найдется вершина $p \in L$ с $d(p, v') = d(p, x') = 2$, то X является кликой. □

По лемме 5 граф Γ является решетчатым и по теореме 1.2 из [3] имеем $n = 2^e$ и Γ — граф билинейных форм $H_2(3, e)$. Теорема 2 доказана.

4. Собственные значения графа с массивом пересечений $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$, $n \geq 9$.

По [3, предложение 2.3] многочлен Тервиллигера графа Γ равен

$$T_2(\lambda) = -3(\lambda - n + 3)(\lambda + 1)(\lambda + 3)(\lambda - 5).$$

Лемма 6. *Пусть u — вершина графа Γ, $\Delta = [u]$, η — неглавное собственное значение графа Δ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $-3 \leq \eta \leq -1$ *или* $5 \leq \eta \leq n-3$*;*

(2) *если $n = 9$, то множество целых собственных значений графа Δ содержится в $\{13, 6, 5, -1, -2, -3\}$.*

Доказательство. По [3, лемма 4.1] имеем $-3 \leq \eta \leq -1$ или $5 \leq \eta \leq n-3$.

Если $n = 9$, то по утверждению (1) множество целых собственных значений графа Δ содержится в $\{13, 6, 5, -1, -2, -3\}$. □

5. Граф с массивом пересечений $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$. По предложению Γ имеет спектр $56^1, 20^{56}, 2^{392}, -7^{280}$, $1+56+392+280 = 729$ вершин, вторую матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 56 & 392 & 280 \\ 1 & 20 & 14 & -35 \\ 1 & 2 & -13 & 10 \\ 1 & -7 & 14 & -8 \end{pmatrix},$$

и числа пересечений

(1) $p^1_{11} = 13$, $p^1_{21} = 42$, $p^1_{22} = 210$, $p^1_{32} = 140$, $p^1_{33} = 140$;

(2) $p^2_{11} = 6$, $p^2_{21} = 30$, $p^2_{22} = 211$, $p^2_{31} = 20$, $p^2_{32} = 150$, $p^2_{33} = 110$;

(3) $p^3_{21} = 28$, $p^3_{22} = 210$, $p^3_{31} = 28$, $p^3_{32} = 154$, $p^3_{33} = 97$.

Отсюда граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами (729,392,211,210) и собственными значениями 392,14, -13. Максимальный порядок клики в Γ_2 не больше 31.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$. Положим $\Delta = \Gamma_2(u)$, $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ – регулярный граф степени 211 на 392 вершинах.

Лемма 7. *Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 1$. Тогда для тройных чисел пересечений выполняются равенства:*

(1) $[111] = r_2$, $[112] = [121] = -r_2 + 6$, $[122] = 2r_1 + 21r_2 - 176$, $[123] = [132] = -2r_1 - 20r_2 + 200$, $[133] = 2r_1 + 20r_2 - 180$;

(2) $[211] = r_1 + 9r_2 - 87$, $[212] = [221] = -r_1 - 9r_2 + 116$, $[222] = 9r_2 + 95$, $[223] = [232] = r_1$, $[233] = -r_1 + 150$;

(3) $[311] = -r_1 - 10r_2 + 100$, $[312] = [321] = r_1 + 10r_2 - 80$, $[322] = -2r_1 - 30r_2 + 290$, $[323] = [332] = r_1 + 20r_2 - 60$, $[333] = -r_1 - 20r_2 + 170$,

где $r_1 \in \{33, 34, ..., 100\}$, $r_2 \in \{0, 1, ..., 6\}$.

Доказательство. Упрощения формул (+) с учетом равенств $S_{313}(u, v, w) = S_{331}(u, v, w) = S_{133}(u, v, w) = 0$. □

По лемме 7 имеем $95 \le [222] = 9r_2 + 95 \le 149$.

Лемма 8. *Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 3$. Тогда для тройных чисел пересечений выполняются равенства:*

(1) $[112] = r_5$, $[113] = -r_5 + 6$, $[121] = -r_3 + 6$, $[122] = r_3 + r_4 - 3r_5 + 12$, $[123] = -r_4 + 3r_5 + 12$, $[131] = r_3$, $[132] = -r_3 - r_4 + 2r_5 + 18$, $[133] = r_4 - 2r_5 + 2$;

(2) $[212] = -2r_3 + r_4 - 3r_5 + 20$, $[213] = 2r_3 - r_4 + 3r_5 + 10$, $[221] = r_3 + r_4 + 2$, $[222] = -9r_4/2 + 9r_5 + 13$, $[223] = -r_3 + 7r_4/2 - 9r_5 + 78$, $[231] = -r_3 - r_4 + 28$ $[232] = 2r_3 + 7r_4/2 - 6r_5 + 60$, $[233] = -r_3 - 5r_4/2 + 6r_5 + 61$;

(3) $[312] = 2r_3 - r_4 + 2r_5 + 8$, $[313] = -2r_3 + r_4 + 2r_5 + 12$, $[321] = -r_4 + 20$, $[322] = -r_3 + 7r_4/2 - 6r_5 + 66$, $[323] = r_3 - 5r_4/2 + 6r_5 + 64$, $[331] = r_4$, $[332] = -r_3 - 5r_4/2 + 4r_5 + 76$, $[333] = r_3 + 3r_4/2 - 4r_5 + 34$,

где $r_3, r_5 \in \{0, 1, ..., 6\}$, $r_4 \in \{0, 2, 4, ..., 20\}$.

Доказательство. Упрощения формул (+) с учетом равенств $S_{313}(u, v, w) = S_{331}(u, v, w) = S_{133}(u, v, w) = 0$. □

По лемме 8 имеем $0 \le [222] = -9r_4/2 + 9r_5 + 13 \le 67$.Так как $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$ содержит $424 - [222]$ вершин, то $32 \le [222] \le 67$ и $9r_4/2 - 9r_5 \le 19$.

Число d ребер между $\Lambda(w)$ и $\Lambda - (\{w\} \cup \Lambda(w))$ удовлетворяет неравенствам $7650 = 30 \cdot 95 + 150 \cdot 32 \le d \le 30 \cdot 149 + 150 \cdot 67 = 14520$, $36.2 \le 210 - \lambda \le 68.82$ и $141.18 \le \lambda \le 173.8$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 9. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. Тогда для тройных чисел пересечений выполняются равенства:*

(1) $[111] = -r_7 + r_8 + r_9 - 14$, $[112] = -r_6/10 + 3r_7 - 27r_8/10 - 33r_9/10 + r_{10}/10 + 51$, $[113] = r_6/10 - 2r_7 + 17r_8/10 + 23r_9/10 - r_{10}/10 - 31$, $[121] = r_7$, $[122] = 11r_6/10 - 3r_7 + 27r_8/10 + 33r_9/10 + 9r_{10}/10 - 171$, $[123] = -11r_6/10 + 2r_7 - 27r_8/10 - 33r_9/10 - 9r_{10}/10 + 201$, $[131] = -r_8 - r_9 + 20$, $[132] = -r_6 - r_{10} + 150$, $[133] = r_6 + r_8 + r_9 + r_{10} - 150$;

(2) $[211] = 2r_6/5 + 3r_7 - 27r_8/10 - 14r_9/5 + 3r_{10}/5 - 24$, $[212] = -r_6/10 - 9r_7 + 54r_8/5 + 117r_9/10 - 9r_{10}/10 - 99$, $[213] = -3r_6/10 + 6r_7 - 81r_8/10 - 89r_9/10 + 3r_{10}/10 + 153$, $[221] = -2r_6/5 - 3r_7 + 27r_8/10 + 9r_9/5 - 3r_{10}/5 + 54$, $[222] = -9r_6/10 + 9r_7 - 54r_8/5 - 117r_9/10 + 9r_{10}/10 + 309$, $[223] = 13r_6/10 - 6r_7 + 81r_8/10 + 99r_9/10 - 3r_{10}/10 - 153$, $[231] = r_9$, $[232] = r_6$, $[233] = -r_6 - r_9 + 150$;

(3) $[311] = -2r_6/5 - 2r_7 + 17r_8/10 + 9r_9/5 - 3r_{10}/5 + 44$, $[312] = r_6/5 + 6r_7 - 81r_8/10 - 42r_9/5 + 4r_{10}/5 + 78$, $[313] = r_6/5 - 4r_7 + 32r_8/5 + 33r_9/5 - r_{10}/10 - 102$, $[321] = 2r_6/5 + 2r_7 - 27r_8/10 - 9r_9/5 + 3r_{10}/5 - 24$, $[322] = -r_6/5 - 6r_7 + 81r_8/10 + 42r_9/5 - 9r_{10}/5 + 72$, $[323] = -r_6/5 + 4r_7 - 27r_8/5 - 33r_9/5 + 6r_{10}/5 + 102$, $[331] = r_8$, $[332] = r_{10}$, $[333] = -r_8 - r_{10} + 110$,

где $r_6 \in \{20, 21, ..., 141\}$, $r_7 \in \{0, 1, ..., 6\}$, $r_8, r_9 \in \{0, 2, 4, ..., 20\}$, $r_{10} \in \{9, 10, ..., 110\}$, *число* $-r_6 + 3r_8 - 3r_9 + r_{10}$ *делится на* 10.

Доказательство. Упрощения формул (+) с учетом равенств $S_{313}(u,v,w) = S_{331}(u,v,w) = S_{133}(u,v,w) = 0$. □

По лемме 9 имеем $30 \le [222] \le 210$.

Симметризация. Верны равенства: $[121] = r_7 = r_7^{\sim}$, $[232] = r_6 = r_6^{\sim}$, $[331] = r_8 = r_8^*$, $[332] = r_{10} = r_{10}^*$, $r_9 = [231] = [132]^{\sim} = -r_6^{\sim} - r_{10}^{\sim} + 150$ и $r_9 + r_6 + r_{10}^{\sim} = 150$. Так как $[333] = -r_8 - r_{10} + 110$, то $r_8 + r_{10} = r_8' + r_{10}' = r_8^* + r_{10}^* = r_8^{\sim} + r_{10}^{\sim}$.

Далее, $r_8^{\sim} = [331]^{\sim} = [133] = r_6 + r_8 + r_9 + r_{10} - 150$, поэтому $-r_8^{\sim} + r_6 + r_8 + r_9 + r_{10} = 150$. Аналогично, $[131]' = -r_8' - r_9' + 20 = [113] = r_6/10 - 2r_7 + 17r_8/10 + 23r_9/10 - r_{10}/10 - 31$ и $10r_8' + 10r_9' + r_6 - 20r_7 + 17r_8 + 23r_9 - r_{10} = 110$

Имеем $[132]^* = -r_6^* - r_{10}^* + 150 = [312] = r_6/5 + 6r_7 - 81r_8/10 - 42r_9/5 + 4r_{10}/5 + 78$, поэтому $10r_6^* + 2r_{10} + 2r_6 + 60r_7 - 81r_8 - 84r_9 = 720$.

Наконец, $[233]^* = -r_6^* - r_9^* + 150 = [323] = -r_6/5 + 4r_7 - 27r_8/5 - 33r_9/5 + 6r_{10}/5 + 102$ и $5r_6^* + 5r_9^* - r_6 + 20r_7 - 27r_8 - 33r_9 + 6r_{10} = 240$, поэтому $5r_6^* + 15r_9^* + 16r_{10} = 5r_6 + 15r_9$. Отсюда r_{10} делится на 5.

Так как $[112] = -r_6/10 + 3r_7 - 27r_8/10 - 33r_9/10 + r_{10}/10 + 51$, то $-r_6 + 3r_8 - 3r_9 + r_{10}$ делится на 10. Аналогично, $[211] = 2r_6/5 + 3r_7 - 27r_8/10 - 14r_9/5 + 3r_{10}/5 - 24$ влечет, что $2r_6 - 27r_8/2 + r_9$ делится на 5. С учетом равенства $r_9^{\sim} + r_6 + r_{10} = 150$ числа $r_9^{\sim} + r_6^{\sim}$ и $r_9 + r_6$ делятся на 5. Отсюда $r_6 - r_8$ и $r_9 + r_8$ делятся на 5.

Напомним, что $[111] = -r_7 + r_8 + r_9 - 14$, числа r_8, r_9 четны, поэтому $r_9 + r_8 = 20$.

Теперь $[131] = 0 = [113]' = r_6'/10 - 37r_7'/10 - 23r_8'/10 - r_{10}'/10 + 49$, поэтому $-r_6 + 37r_7 + 23r_8 + r_{10} = 490$, $[131] = 0 = [311]^* = -2r_6^*/5 - 2r_7^* - r_8^*/10 - 3r_{10}^*/5 + 80$ и $4r_6 + 20r_7 + r_8 + 6r_{10} = 800$. Отсюда $202r_7 + 137r_8 = 10r_6 + 2140$, $r_7 + r_8$ и $r_7 - r_9$ делятся на 5.

С другой стороны, $-4r_6+148r_7+92r_8+4r_{10}+4r_6+20r_7+r_8+6r_{10}=2760$ и $168r_7+93r_8+10r_{10}=2760$, поэтому r_{10} делится на 3 и $18r_7-7r_8-10$ делится на 50. Имеем решения: $r_7=0, r_8=20$, $r_7=2, r_8=18$, $r_7=4, r_8=16$, $r_7=6, r_8=8$.

В первом случае имеем $2r_6+3r_{10}=390$, $r_{10}\in\{30,60,90\}$ и r_6 равно 150 (противоречие с тем, что $r_{10}\le 110$), равно 105 (противоречие с тем, что $-r_6+3r_8-3r_9+r_{10}$ не делится на 10) или равно 60. Итак, $r_6=60$, $r_7=r_9=0$, $r_8=20, r_{10}=90$, противоречие с тем, что $0=[121]=[211]^*=2r_6^*/5+57r_7^*+r_8^*/10+3r_{10}^*/5-144$ и $0=2r_6/5+57r_7+r_8/10+3r_{10}/5-144=24+2+54-144$.

Во втором случае имеем $2r_6+3r_{10}=371$, r_6+2 делится на 5, $r_{10}\in\{15,45,75,105\}$ и r_6 равно 163,118 (противоречие с тем, что $r_{10}\le 110$), равно 73 или 28 (противоречие с тем, что $-r_6+3r_8-3r_9+r_{10}=-28+54-6+105$ не делится на 10). Итак, $r_6=73$, $r_7=r_9=2$, $r_8=18, r_{10}=75$, противоречие с тем, что $2=[121]=[211]^*=2r_6^*/5+57r_7^*+r_8^*/10+3r_{10}^*/5-144$ и $2=2r_6/5+57r_7+r_8/10+3r_{10}/5-144=146/5+114+18/10+45-144$.

В третьем случае имеем $2r_6+3r_{10}=336$, $r_{10}\in\{30,60,90\}$ и r_6 равно 123 (противоречие с тем, что $r_{10}\le 110$), равно 78 или 33 (противоречие с тем, что $-r_6+3r_8-3r_9+r_{10}=-33+24-36+90$ не делится на 10). Итак, $r_6=78$, $r_7=6, r_9=12$, $r_8=8, r_{10}=60$, противоречие с тем, что $6=[121]=[211]^*=2r_6^*/5+57r_7^*+r_8^*/10+3r_{10}^*/5-144$ и $6=2r_6/5+57r_7+r_8/10+3r_{10}/5-144=156/5+342+8/10+36-144$.

Теорема 3 доказана.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1989.

[2] K. Metsch, *On a Characterization of Bilinear Forms Graphs*, Europ. J. Comb. **20** (1999), 293-–306.

[3] A. Gavrilyuk, J. Koolen, *A characterization of the graphs of bilinear $d\times d$-forms over F_2*, Combinatorica **39:2** (2019), 289-–321.

[4] N. Maslova, *2020 Ural workshop on group theory and cjmbinatorics*, Trudy IMM UrO RAN **27:1** (2021), 270-–282.

[5] K. Coolsaet, A. Jurishich, *Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs*, J. Comb. Theory, Series A., **115** (2008), 1086–1095.

[6] K. Metsch, *Improvement of Bruck's Completion Theorem*, Designs, Codes and Cryptography, **1** (1991), 99–116.

Ivan Nikolaevich Belousov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
str. S.Kovalevskaya, 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
Email address: i_belousov@mail.ru

Mikhail Petrovich Golubyatnikov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
str. S.Kovalevskaya, 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
Email address: mike_ru1@mail.ru

Aleksandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
str. S.Kovalevskaya, 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
Email address: makhnev@imm.uran.ru