S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 144–144 (2015) УДК 512.55
DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx MSC 16Y60

О ПОЛУКОЛЬЦЕ КОСЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НАД ПОЛУКОЛЬЦОМ БЕЗУ

М.В.Бабенко, В.В.Чермных

Abstract. In this paper, we study the skew polynomial semiring over a Bezout Rickart semiring. Namely, let all left annihilator ideals of the semiring S be ideals. Then the skew polynomial semiring $R = S[x, \varphi]$ is a semiring without nilpotent elements and every finitely generated left monic ideal from R is principal iff S is a left Rickart left Bezout semiring, φ is the rigid endomorphism and for any non-zero-divisor d of the semiring S $\varphi(d)$ is convertible to S. We also obtained a characterization of the semiring R by the properties of the Pearce stalks of the semiring S. This results are analogous to the statements for rings, if the condition «each finitely generated left monic ideal of R is principal» replaced by «R is left Bezout ring». The left monic ideal of a polynomial semiring is a left ideal that contains each monomial of its polynomial. The principal left monic ideals of skew polynomial semiring over a left Rickart left Bezout semiring are described.

Keywords: skew polynomial semiring, Bezout semiring, Rickart semiring, monic ideal, Pierce stalk of semiring.

1. Введение

Известно, что связи между свойствами полукольца S и полукольца многочленов $S[x]$ могут сильно отличаться от связей между аналогичными кольцевыми объектами. Так, не всегда переносятся с S на $S[x]$ свойства, связанные некоторым образом с конечно порожденными идеалами. Например, кольцо многочленов над полем является кольцом главных идеалов, что не обязательно

Babenko M.V., Chermnykh V.V., On the skew polynomial semiring over a Bezout semiring.

Received January, 1, 2015, published March, 1, 2015.

для полукольца многочленов над полуполем. Хорошо известно, что полукольцо многочленов над нётеровым полукольцом в общем не является нётеровым. Наконец, плохо переносится свойство "быть полукольцом Безу" с полукольца коэффициентов на полукольцо многочленов.

В [1] получен некоторый вариант теоремы Гильберта о базисе для коммутативных полуколец, при этом важную роль играют монические идеалы. Их аналоги, левые m-идеалы, активно применяются нами для изучения полукольца косых многочленов над левым полукольцом Безу.

Основными результатами статьи являются теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$, и все левые аннуляторы полукольца S являются идеалами. Если R — левое полукольцо Безу, то S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — жесткий эндоморфизм, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, элемент $\varphi(d)$ обратим в S для любого неделителя нуля $d \in S$.*

Известно [2, теорема 1], что теорема 1 обратима в классе колец. Нами приводится пример, показывающий, что обратное утверждение для полуколец не верно. По этой причине мы рассматриваем более слабое условие на полукольцо многочленов, чем условие быть левым полукольцом Безу: каждый конечно порожденный левый m-идеал является главным. В результате доказывается

Теорема 2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, все левые аннуляторы полукольца S являются идеалами, $R = S[x, \varphi]$. Тогда равносильны утверждения:*

(1) *R — полукольцо без нильпотентных элементов и каждый конечно порожденный левый m-идеал из R является главным;*
(2) *S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — жесткий эндоморфизм, элемент $\varphi(d)$ обратим в S для любого неделителя нуля $d \in S$;*
(3) *каждый пирсовский слой S/α_M является $\bar{\varphi}$-жестким левым полукольцом Безу без делителей нуля, для любого ненулевого $\bar{a} \in S/\alpha_M$ элемент $\bar{\varphi}(\bar{a})$ обратим в S/α_M и для любого $b \in S$ $\mathrm{ann}_l(b) \cap BS$ — главный идеал в BS.*

Вспомогательные утверждения, в которых исследуются главные левые m-идеалы полукольца многочленов над риккартовым слева левым полукольцом Безу, имеют самостоятельный интерес. Именно, рассматриваемые конструкции, видимо, могут помочь при описания главных m-идеалов полуколец многочленов из других классов полуколец.

Кратко скажем о пирсовских слоях. В 1967 году Р. С. Пирсом был построен пучок колец, основанный на булевом пространстве кольца [3]. В той же статье было доказано, что любое кольцо изоморфно кольцу всех глобальных сечений своего пирсовского пучка. Пирсовский пучок активно применялся при изучении колец, обладающих нетривиальной булевой алгеброй центральных идемпотентов (например, [4], [5], [6]). Первоначально пирсовский пучок использовался как аппарат для изучения алгебраических свойств колец. В некоторых случаях были получены характеризации колец в терминах свойств их пирсовского пучка — пирсовских слоев, топологических свойств базисного и накрывающего пространств. В [7] построен полукольцевой аналог пирсовского пучка и доказана изоморфность пирсовского представления. В статьях [8], [9] получены характеризации полуколец свойствами их пирсовских слоев. В нашей статье, кроме характеризации в теореме 2, пирсовские пучки используются как аппарат для доказательства алгебраических свойств полуколец.

2. Первоначальные понятия

Полукольцом называется непустое множество S с операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, если $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$. Все полукольца, рассматриваемые нами, предполагаются с единицей, отличной от нуля.

Пусть S — полукольцо, φ — эндоморфизм полукольца S, сохраняющий 0 и 1, $R = S[x, \varphi]$ — множество всех многочленов от переменной x и с коэффициентами из S, записываемых слева от степеней x. Сложение $+$ многочленов определяется обычным образом, а умножение — исходя из правила $xa = \varphi(a)x$. Непосредственно проверяется, что $S[x, \varphi]$ является полукольцом, которое называется **левым полукольцом косых многочленов**.

Идемпотент e полукольца S называется **дополняемым**, если для некоторого $e^\perp \in S$ выполняется $e+e^\perp = 1$ и $ee^\perp = 0$. Если при этом идемпотент e является центральным, то его дополнение $e^\perp$ задается однозначно и также является центральным дополняемым идемпотентом. Множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S обозначим через BS. Со сложением $e \oplus f = ef^\perp + e^\perp f$ и обычным полукольцевым умножением получаем булево кольцо $\langle BS, \oplus, \cdot\rangle$.

Пусть M — максимальный идеал кольца BS. Введем на полукольце S отношение:

$$a \equiv b(\alpha_M) \Leftrightarrow ae^\perp = be^\perp \text{ для некоторого } e \in M.$$

Это отношение является конгруэнцией на полукольце S, которая называется **пирсовской конгруэнцией**. Факторполукольцо S/α_M по пирсовской конгруэнции называется **пирсовским слоем** полукольца S. Пусть $\operatorname{Max} BS$ — максимальный спектр полукольца S, множество всех максимальных идеалов булева кольца BS со стоуновской топологией, а $\Pi = \dot\cup S/\alpha_M$, $M \in \operatorname{Max} BS$, — дизъюнктное объединение всех пирсовских слоев полукольца S. Тогда $(\Pi, \operatorname{Max} BS)$ — пирсовский пучок полукольца S, и по [7, теорема 3] S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений пучка Π. Образ элемента $s \in S$ при этом изоморфизме обозначается через $\hat{s}$. В нашей статье мы используем некоторые известные результаты теории пучковых представлений. Так, в произвольном пучке множество точек базисного пространства, на котором совпадают два глобальных сечения пучка, открыто. В пирсовском пучке по причине нульмерности базисного пространства два глобальных сечения пучка совпадают на некотором открыто-замкнутом множестве, а с каждым открыто-замкнутым множеством базисного пространства произвольного пучка связано его характеристическое сечение. Подробней с техникой пучковых представлений можно познакомиться, например, в [10].

Для многочленов

$$f = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots + f_kx^k$$
$$g = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \ldots + g_mx^m,$$

где $f_i, g_j \in S$, и произвольного $n \in \mathbb{N}$ положим

$$f \equiv_n g \Longleftrightarrow f_0 = g_0, \ldots, f_{n-1} = g_{n-1}.$$

В частности, $f \equiv_1 g \Longleftrightarrow f_0 = g_0$. Стандартно проверяется, что $\equiv_n$ является конгруэнцией на $R = S[x, \varphi]$, а ее класс нуля есть идеал Rx^n. Очевиден также изоморфизм $S \cong R/\equiv_1$.

Монические идеалы, которые мы в нашей работе будем называть m-идеалами, были введены Л. Дэйлом в [1] для полукольца многочленов над коммутативным полукольцом. Нам потребуется их обобщение для полукольца косых многочленов. Именно, левый идеал A полукольца $R = S[x, \varphi]$ называется **левым m-идеалом**, если $f_0 + f_1 x + \ldots + f_k x^k \in A$ влечет $f_i x^i \in A$ для всех $i = 0, \ldots, k$. Нулевой и несобственный идеалы полукольца $S[x, \varphi]$ являются m-идеалами. Еще одним тривиальным примером левого m-идеала является главный левый идеал, порожденный одночленом x^k. Очевидно, что множество всех левых m-идеалов полукольца $S[x, \varphi]$ образует полную подрешетку решетки всех левых идеалов из $S[x, \varphi]$ — пересечение и сумма левых m-идеалов снова являются левыми m-идеалами.

Дадим схему описания левых m-идеалов полукольца косых многочленов; детали для $S[x]$ можно найти в [1],[11].

Пусть φ — эндоморфизм полукольца S. Последовательность левых идеалов $L_0, L_1, \ldots$ из S называется **левой φ-цепью**, если для любого целого неотрицательного i выполняется $\varphi(L_i) \subseteq L_{i+1}$. Непосредственно проверяется, что $L^* = \{\sum a_i x^i \in S[x, \varphi] : a_i \in L_i$, суммы конечные$\}$ является левым m-идеалом полукольца $S[x, \varphi]$. Если B — произвольный, не обязательно монический, левый идеал полукольца $S[x, \varphi]$, то его левые **коэффициентные идеалы** $B_i = \{b \in S : \exists f = \ldots + bx^i + \ldots \in B\}$ образуют левую φ-цепь. Построенный для этой φ-цепи левый m-идеал B^* будет наименьшим среди левых m-идеалов, содержащих B.

Полукольцо называется **левым полукольцом Безу**, если каждый его конечно порожденный левый идеал является главным левым идеалом.

Нам потребуется следующая характеризация левого полукольца Безу [12, лемма 3.3]: *S является левым полукольцом Безу в точности тогда, когда для любых $m, n \in S$ найдутся такие $a, b, c, d \in S$, что $m = cam + cbn$ и $n = dbn + dam$.*

Полукольцо S называется **риккартовым слева**, если для любого $a \in S$ найдется такой дополняемый идемпотент $e \in S$, что $\mathrm{ann}_l(a) = Se$. Риккартово слева и справа полукольцо называется **риккартовым**.

3. Доказательство теоремы 1

Полукольцо S называется **коммутативным в нуле**, если $ab = 0$ влечет $ba = 0$ для любых $a, b \in S$. Легко показать, что каждый дополняемый идемпотент коммутативного в нуле полукольца является центральным. Коммутативным в нуле является полукольцо без нильпотентных элементов.

Эндоморфизм φ полукольца S называется **жестким**, если $a\varphi(a) = 0$ влечет $a = 0$ для любого $a \in S$. Полукольцо с жестким эндоморфизмом является полукольцом без нильпотентных элементов.

Лемма 1. *Пусть φ — такой инъективный эндоморфизм полукольца S, что $a \in S\varphi(a)a$ для любого $a \in S$.*

(1) *$\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$;*

(2) *если в S все левые аннуляторы являются идеалами, то $\mathrm{ann}_l(a) = \mathrm{ann}_l(\varphi(a))$ для любого $a \in S$, S — полукольцо без нильпотентных элементов, эндоморфизм φ — жесткий.*

Доказательство. 1) Пусть $e \in BS$, и $e = b\varphi(e)e$ для некоторого $b \in S$. Тогда $e\varphi(e) = b\varphi(e)^2 e = e$. Из $e^\perp = c\varphi(e^\perp)e^\perp$ следует $e^\perp\varphi(e) = 0$. Получаем $\varphi(e) = (e + e^\perp)\varphi(e) = e$.

2) Пусть $a = b\varphi(a)a$ для подходящего $b \in S$ и пусть $s \in \mathrm{ann}_l(\varphi(a))$. В силу условия $0 = sb\varphi(a) = sb\varphi(a)a = sa$. Показали, что $\mathrm{ann}_l(\varphi(a)) \subseteq \mathrm{ann}_l(a)$. Обратно, пусть $ra = 0$ и $r = c\varphi(r)r$ для некоторого $c \in S$. Поскольку $\varphi(r)\varphi(a) = 0$ и левый аннулятор является идеалом, то $r = c\varphi(r)r \in \mathrm{ann}_l(\varphi(a))$. Таким образом, $\mathrm{ann}_l(a) = \mathrm{ann}_l(\varphi(a))$.

Покажем сначала, что S — полукольцо без нильпотентных элементов. Пусть $s^2 = 0$. Тогда $\varphi(s) \in \mathrm{ann}_l(\varphi(s)) = \mathrm{ann}_l(s)$, поэтому $\varphi(s)s = 0$. По условию $s = t\varphi(s)s$ для некоторого $t \in S$, поэтому $s = 0$. Полукольцо без нильпотентных элементов коммутативно в нуле, поэтому отсюда, пользуясь условием леммы, легко получаем жесткость эндоморфизма φ. □

Лемма 2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x,\varphi]$ и $R/\equiv_2$ — левое полукольцо Безу. Тогда для любого $a \in S$ найдутся такие $f_0, g_0, u_0, v_0, b \in S$, что*

$$a = u_0 f_0 a,\ v_0 f_0 a = 0,\ v_0 g_0 + b\varphi(a) = 1.$$

Доказательство. Пусть $h : R \to R/\equiv_2$ — естественный эпиморфизм. По условию $h(R)$ — левое полукольцо Безу, поэтому $h(R)h(a) + h(R)h(x)$ — главный левый идеал в $R/\equiv_2$. По [12, лемма 3.3] (см. формулировку в нашей статье после определения полукольца Безу) получаем:

$$h(a) = h(u)h(f)h(a) + h(u)h(g)h(x),$$
$$h(x) = h(v)h(g)h(x) + h(v)h(f)h(a)$$

для некоторых $f, g, u, v \in R$. Пусть $f = f_0 + f_1 x + \ldots + f_k x^k$; аналогичные обозначение для остальных многочленов. Тогда $a \equiv_2 ufa + ugx$, $x \equiv_2 vfa + vgx$, откуда $a = u_0 f_0 a$, $v_0 f_0 a = 0$, $v_0 f_1 \varphi(a) + v_1\varphi(f_0)\varphi(a) + v_0 g_0 = 1$. Обозначив $b = v_0 f_1 + v_1 \varphi(f_0)$, получаем, $v_0 g_0 + b\varphi(a) = 1$. □

Доказательство теоремы 1. Пусть R — левое полукольцо Безу. Тогда его факторполукольца $S \cong R/\equiv_1$ и $R/\equiv_2$ являются левыми полукольцами Безу.

Пусть $a \in S$. По лемме 2 найдутся такие $f_0, g_0, u_0, v_0, b \in S$, что $a = u_0 f_0 a$ и $v_0 \in \mathrm{ann}_l(f_0 a)$ — идеал в S. Тогда $v_0 g_0 u_0 \in \mathrm{ann}_l(f_0 a)$, откуда $0 = v_0 g_0 u_0 f_0 a = v_0 g_0 a$. Из $1 = v_0 g_0 + b\varphi(a)$ следует $a = b\varphi(a)a$. По лемме 1 эндоморфизм φ — жесткий, а S — полукольцо без нильпотентных элементов.

Отсюда из $v_0 g_0 a = 0$ вытекает $v_0 g_0 \varphi(a) = 0$ [13, лемма 3]. Кроме того, φ-жесткое полукольцо коммутативно в нуле [13, лемма 1], поэтому получаем $b\varphi(a) = (b\varphi(a))^2$ и $v_0 g_0 b\varphi(a) = 0$. Таким образом, $b\varphi(a)$ — дополняемый идемпотент, а $v_0 g_0$ — его дополнение. Известно, что в коммутативном в нуле полукольце дополняемые идемпотенты центральны, поэтому $v_0 g_0 \in BS$. Если $u \in \mathrm{ann}_l(a)$, то $u\varphi(a) = 0$, поэтому $u = uv_0 g_0 + ub\varphi(a) = uv_0 g_0$. Следовательно, $\mathrm{ann}_l(a) = Sv_0 g_0$, и S — риккартово слева полукольцо.

По лемме 1 $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$.

Пусть d — неделитель нуля в S. Допустим, что сечение $\hat{d}$ равно нулю в некотором пирсовском слое. Тогда $\hat{d}$ совпадает с нулевым сечением на некоторой базисной открыто-замкнутой окрестности U. Характеристическое сечение этой окрестности будет отлично от нулевого сечения (так как совпадает с единичным на U) и в произведении с $\hat{d}$ будет равно нулевому сечению. Получаем противоречие с тем, что d — неделитель нуля. Значит, сечение $\hat{d}$ в каждом пирсовском слое принимает ненулевое значение. По доказанному выше $d = b\varphi(d)d$ для некоторого $b \in S$ и $b\varphi(d) \in BS$. Из этого равенства следует, что если в каком-либо пирсовском слое сечение $\widehat{b\varphi(d)}$ равно нулю, то и $\hat{d}$ в том же слое будет принимать нулевое значение. В произвольном пирсовском слое центральный дополняемый идемпотент равен либо нулю, либо единице, поэтому $\widehat{b\varphi(d)} = \hat{1}$ в каждом пирсовском слое. Пирсовское представление изоморфно, следовательно $b\varphi(d) = 1$ и $\varphi(d)$ — обратимый слева элемент в S. Обозначим $u = \varphi(d)b$. Тогда $u = c\varphi(u)u$ для некоторого $c \in S$. Понятно, что в каждом пирсовском слое сечения $\hat{b}$ и $\widehat{\varphi(d)}$ принимают ненулевые значения. Известно [9, предл. 1 и предл. 4], что пирсовские слои риккартова слева полукольца без нильпотентных элементов являются полукольцами без делителей нуля, поэтому $\hat{u}$ принимает ненулевые значения в каждом слое, и, следовательно, u — неделитель нуля полукольца S. Рассуждая как и выше, получаем $c\varphi(u) = 1$, откуда $\varphi(c)\varphi^2(u) = 1$. Тогда элемент $\varphi(c)$ обратим справа, но поскольку c — неделитель нуля, то $\varphi(c)$ обратим и слева. Показали, что $\varphi^2(u)$ — обратимый элемент. Из $\varphi^2(u)\varphi(c) = 1$ в силу инъективности φ получаем $1 = \varphi(u)c = \varphi^2(d)\varphi(b)c$ и $\varphi^2(d)$ — обратимый элемент. Обратным к нему является элемент $\varphi(b)$, следовательно, $\varphi(d)b = 1$, и $\varphi(d)$ обратим в S. Теорема доказана. □

4. Главные m-идеалы и доказательство теоремы 2

Утверждение, обратное к теореме 1, верно в классе колец [2, теорема 1], [14, теорема 15.13]. Для полуколец это не так. Действительно, пусть S является двухэлементной цепью, φ — тождественный автоморфизм полукольца S. Тогда S — коммутативное полукольцо Безу, риккартово, $1 = \varphi(1)$ — единственный как неделитель нуля, так и обратимый элемент в S. Однако, $R = S[x]$ не является полукольцом Безу; например, $Rx + R(1 + x)$ не является главным идеалом.

Сейчас мы ослабим условие на полукольцо многочленов, рассматривая ситуацию, когда главными оказываются не все конечно порожденные, а конечно порожденные m-идеалы. Для этого начнем исследование строения главных левых m-идеалов.

Примеры. 1) Rax^i — главный левый m-идеал полукольца $R = S[x, \varphi]$ для любых $a \in S$ и $i \geq 0$.

2) Сумма и пересечение левых m-идеалов являются левыми m-идеалами.

3) Не каждый главный левый идеал полукольца многочленов является левым m-идеалом. Так, главный идеал $R(1+x)$ не является m-идеалом для полукольца многочленов $R = \mathbb{N}[x]$ над полукольцом целых неотрицательных чисел.

4) С другой стороны, главные левые m-идеалы могут быть устроены более сложно, чем указанные в примере 1). Пусть B — 8-элементная булева алгебра с атомами a, b, c. Автоморфизм φ является тождественным отображением.

Пусть $R = B[x,\varphi] = B[x]$ и $A = R(a+cx)$ — главный левый идеал. Поскольку $a(a+cx) = a$ и $c(a+cx) = cx$, то $a, cx \in A$. Непосредственно проверяется, что коэффициентные идеалы у A следующие: $A_0 = \{0, a\}$ — идеал свободных членов, $A_i = \{0, a, c, b^\perp\}$ — все остальные коэффициентные идеалы. Также легко заметить, что для любого $a_i \in A_i$ одночлен $a_i x^i$ лежит в A, поэтому A является m-идеалом. Очевидно, A не порождается как левый идеал многочленом a. Следовательно, A — главный левый m-идеал, порождающий элемент которого не является одночленом.

Напомним, что для $a, b \in BS$ их точная верхняя грань в булевой решетке BS выражается через полукольцевые операции: $a \vee b = a + a^\perp b = ab^\perp + b$. Отметим также простое свойство, которое будем использовать в дальнейшем: если в полукольце элемент представим в виде произведения центрального дополняемого идемпотента и неделителя нуля, то идемпотент определяется однозначно. Действительно, пусть $ed = ft$ для $e, f \in BS$ и неделителей нуля d, t. Тогда $0 = e^\perp ft$, откуда получаем $e^\perp f = 0$ и $f \le e$. Симметричным образом получаем $e \le f$.

Лемма 3. *В полукольце S справедливы утверждения:*

(1) *Пусть $a, g_0, g_1 \in S$ и $a = ud, g_0 = u_0 d_0, g_1 = u_1 d_1$ для $u, u_i \in BS$ и неделителей нуля d, d_i. Тогда $Sg_0 + Sg_1 = Sa$ влечет $u = u_0 \vee u_1$; в частности, при $g_1 = 0$ получаем, что из $Sg_0 = Sa$ следует $u_0 = u$.*

(2) *Если $a, b, c \in BS$ и $a \vee b = c$, то $Sa + Sb = Sc$.*

Доказательство. 1) Пусть $a = s_0 g_0 + s_1 g_1$ для некоторых $s_i \in S$. Тогда $u(u_0 \vee u_1)d = s_0 u_0 (u_0 \vee u_1) d_0 + s_1 u_1 (u_0 \vee u_1) d_1 = ud$. Отсюда следует $u(u_0 \vee u_1) = u$, поэтому $u \le u_0 \vee u_1$. Далее, $g_0 = ta$ для некоторого $t \in S$, откуда $uu_0 d_0 = utud = ta = u_0 d_0$. Получаем $u_0 \le u$. Аналогично, $u_1 \le u$, следовательно, $u = u_0 \vee u_1$. По индукции утверждение справедливо для любого конечного числа элементов $g_0, \ldots, g_i \in S$.

2) Из условия следует $a + a^\perp b = c$, поэтому $Sc \subseteq Sa + Sb$. Из $a, b \le c$ получаем $ac = a, bc = b$, поэтому $sa + tb = (sa + tb)c$, откуда $Sa + Sb \subseteq Sc$. □

Лемма 4. *Пусть φ — жесткий эндоморфизм полукольца S. Тогда $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$.*

Доказательство. Для жесткого эндоморфизма φ условие $ab = 0$ равносильно $a\varphi(b) = 0$ [13, лемма 1]. Поэтому $\varphi(e)e^\perp = 0$, откуда $\varphi(e)s\varphi(e^\perp) = 0$ для любого $s \in S$. Следовательно, $\varphi(e)s = \varphi(e)s\varphi(e)$. Симметрично показывается, что $s\varphi(e) = \varphi(e)s\varphi(e)$, значит $\varphi(BS) \subseteq BS$. Получаем, что $\mathrm{ann}_{BS}(e) = \mathrm{ann}_{BS}(\varphi(e))$ для любого $e \in BS$. По [15, теорема 2] получаем $e = \varphi(e)$. □

Лемма 5. *Пусть S — коммутативное в нуле риккартово слева полукольцо. Тогда каждый элемент из S является произведением центрального дополняемого идемпотента и неделителя нуля.*

Доказательство. В коммутативном в нуле полукольце каждый дополняемый идемпотент централен. Пусть a — ненулевой элемент из S, тогда $\mathrm{ann}_l(a) = Se$ для некоторого $e \in BS$. Отсюда получаем $ae = 0$ и $ae^\perp = a$. Положим $d = ae^\perp + e$. Имеем $e^\perp d = e^\perp(ae^\perp + e) = e^\perp a = a$, откуда следует, что $d \neq 0$. Осталось показать, что d — неделитель нуля. Пусть $0 = bd = b(ae^\perp + e) = bae^\perp$, поскольку $be = bed = 0$. Тогда $ba = ba(e + e^\perp) = bae = 0$. Получаем $b \in \mathrm{ann}_l(a) = Se$ и $b = be = 0$. □

Предложение 1. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — инъективный жесткий эндоморфизм полукольца S, $\varphi(d)$ — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$, $R = S[x,\varphi]$.*

(1) *Если для любого $i = 0,\ldots,k-1$ выполнено $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + S\varphi^{i-1}(f_1) + \ldots + Sf_i)$, то $R(f_0 + \ldots + f_k x^k)$ — главный левый m-идеал полукольца R.*

(2) *Если L — главный левый m-идеал в R, то найдется такой многочлен $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, что $L = Rf$ и $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + S\varphi^{i-1}(f_1) + \ldots + Sf_i)$ для всех $i = 0,\ldots,k-1$.*

Доказательство. 1) По лемме 5 $f_i = u_i d_i$ для $u_i \in BS$ и неделителя нуля $d_i \in S$. Непосредственно проверяется, что в силу леммы 4 множества

$$\begin{aligned} L_0 &= Sf_0, \\ L_1 &= S\varphi(f_0) + Sf_1 = Su_0 + Sf_1, \\ &\ldots \\ L_k &= S\varphi^k(f_0) + S\varphi^{k-1}(f_1) + \ldots + Sf_k = Su_0 + \ldots + Su_{k-1} + Sf_k, \\ L_{k+1} &= S\varphi^{k+1}(f_0) + S\varphi^k(f_1) + \ldots + S\varphi(f_k) = Su_0 + \ldots + Su_k \end{aligned}$$

являются коэффициентными левыми идеалами левого идеала Rf для многочлена $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$. Также понятно, что $L_{k+j} = L_{k+1}$ для любого $j \geq 1$.

Полукольцо S является левым полукольцом Безу, поэтому $L_i = Sa_i$ для некоторых $a_i \in S$. Нам надо показать $Sa_i x^i \subseteq Rf$. Проведем индукцию по i для $i \leq k-1$.

Получаем такую цепь: $\varphi^k(Sa_0) \subseteq \varphi^{k-1}(Sa_1) \subseteq \ldots \subseteq Sa_k$. Полукольцо S является φ-жестким, поэтому из [13, лемма 1] следует $\mathrm{ann}_l(B) = \mathrm{ann}_l(\varphi(B))$ для любого подмножества $B \subseteq S$, а поскольку φ-жесткое полукольцо является полукольцом без нильпотентных элементов, то $\mathrm{ann}_l(a) = \mathrm{ann}_l(Sa)$. Поэтому $\mathrm{ann}_l(a_k) \subseteq \mathrm{ann}_l(a_{k-1}) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{ann}_l(a_0)$. Полукольцо S — риккартово слева, поэтому $\mathrm{ann}_l(a_i) = Se_i$ для подходящих $e_i \in BS$. Для любого $i \geq 1$ выполняется $f_i \in \mathrm{ann}_l(a_{i-1}) \subseteq \mathrm{ann}_l(a_0) = Se_0$. Следовательно, $f_i e_0^{\perp} = 0$ для всех $i \geq 1$. Кроме того, $f_0 e_0 = 0$, поэтому $f_0 e_0^{\perp} = f_0$. Получаем $e_0^{\perp}(f_0 + \ldots + f_k x^k) = f_0 \in Rf$, поэтому $Sa_0 \subseteq Rf$.

Пусть $Sa_j x^j \subseteq Rf$ для всех $j = 0,\ldots,i$ — индуктивное предположение. Из $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(a_i) = Se_i$ получаем $f_{i+1} = f_{i+1}e_i$, откуда $f_{i+1}e_i^{\perp} = 0$. Для любого $j = 0,\ldots,i$ справедливо $\varphi^{i-j}(f_j) \in Sa_i$, т. е. $\varphi^{i-j}(f_j) = s_j a_i$ для некоторого $s_j \in S$. Из $e_i a_i = 0$ следует $e_i \varphi^{i-j}(f_j) = 0$, поэтому $e_i f_j = 0$ [13, лемма 1]. Далее, для любого $j = i+2,\ldots,k$ из $f_j \in \mathrm{ann}_l(a_{j-1}) \subseteq \mathrm{ann}_l(a_{i+1}) = Se_{i+1}$ следует $f_j = t_j e_{i+1}$, откуда $e_{i+1}^{\perp} f_j = 0$. Получаем:

$$\begin{aligned} e_i e_{i+1}^{\perp} f &= 0 + \ldots + 0x^i + e_i e_{i+1}^{\perp} f_{i+1} x^{i+1} + 0x^{i+2} + \ldots + 0x^k = \\ &= e_{i+1}^{\perp} f_{i+1} x^{i+1} \in Rf. \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что $a_{i+1} = s_0 u_0 + \ldots + s_i u_i + s_{i+1} f_{i+1}$ для некоторых $s_j \in S$. Пусть $a_j = v_j t_j$ для некоторых $v_j \in BS$ и неделителей нуля t_j, тогда по лемме 3 $v_j = u_0 \vee \ldots \vee u_j$, откуда следует $u_j = u_j \varphi^{i+1-j}(v_j)$ для любого $0 \leq j \leq i$.

Получаем:

$$e_{i+1}^{\perp}a_{i+1}x^{i+1} = e_{i+1}^{\perp}(s_0u_0 + \ldots + s_iu_i + s_{i+1}f_{i+1})x^{i+1} =$$
$$= e_{i+1}^{\perp}(s_0u_0\varphi^{i+1}(t_0)^{-1}x^{i+1} \cdot a_0 + s_1u_1\varphi^i(t_1)^{-1}x^i \cdot a_1x + \ldots$$
$$\ldots + s_iu_i\varphi(t_i)^{-1}x \cdot a_ix^i + s_{i+1}f_{i+1}x^{i+1}) \in Rf,$$

значит $e_{i+1}^{\perp}a_{i+1}x^{i+1} \in Rf$. Поскольку $\mathrm{ann}_l(a_{i+1}) = Se_{i+1}$, то $a_{i+1} = e_{i+1}^{\perp}a_{i+1}$. Следовательно, $a_{i+1}x^{i+1} \in Rf$, и $Sa_{i+1}x^{i+1} \subseteq Rf$. Осталось показать, что $Sa_{k+1}x^n \in Rf$ для $n \geq k+1$. Пусть $a_{k+1} = t_0u_0+\ldots+t_{k-1}u_{k-1}+t_ku_k = t+t_ku_k$. Поскольку $t \in L_k$, то $tx^k \in Rf$, и поэтому (с учетом, что $t = ud$ для $u \in BS$ и неделителя нуля d) $tx^{k+1} = t\varphi(d)^{-1}x \cdot tx^k \in Rf$. Из $a_kx^k \in Rf$ получаем $t_ku_kx^{k+1} = t_ku_k\varphi(d_k)^{-1}x \cdot a_kx^k \in Rf$. Наконец, $a_{k+1}x^{k+1} = tx^{k+1} + t_ku_kx^{k+1} \in Rf$. Для следующих показателей x рассуждения аналогичные.

2) Пусть $L = R(g_0+\ldots+g_kx^k)$ — главный левый m-идеал, $g_i = v_it_i$, $v_i \in BS$, t_i — неделитель нуля по лемме 5. Рассуждая как и в пункте 1) и используя лемму 3, получаем, что $Sa_0 = Sg_0$, $Sa_i = S(v_0 \vee \ldots \vee v_{i-1}) + Sg_i$ для $i \leq k$ и $Sa_{k+1} = S(v_0 \vee \ldots \vee v_k)$ — коэффициентные левые идеалы левого m-идеала L. Каждый элемент a_i имеет вид $a_i = u_id_i$ для однозначно определенного $u_i \in BS$ и неделителя нуля $d_i \in S$. Идемпотенты образуют цепь $u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_k$. Положим $e_0 = u_0$ и для любого $i \geq 1$ пусть $e_i \in BS$ — относительное дополнение идемпотента u_{i-1} в интервале $[0, u_i] \subseteq BS$. Уточним, что e_i существует, поскольку любая булева решетка является решеткой с относительными дополнениями. Пусть $f_i = e_it_i$. Наша задача — показать, что $f = f_0 + \ldots + f_kx^k$ является искомым многочленом. Из условия $e_1 \wedge u_0 = 0$ следует $f_1 \in \mathrm{ann}_l(Sf_0)$. Пусть $f_i \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^{i-1}(f_0) + \ldots + S\varphi(f_{i-2}) + Sf_{i-1})$, тогда из $e_{i+1} \wedge u_i = 0$ и $u_i = e_0 \vee \ldots \vee e_i$ получаем $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(e_0 \vee \ldots \vee e_i) = \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0)+\ldots+S\varphi(f_{i-1})+Se_i) \subseteq \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0)+\ldots+S\varphi(f_{i-1})+Sf_i)$. Таким образом, выполнены условия пункта 1), поэтому $K = R(f_0+\ldots+f_kx^k)$ — главный левый m-идеал. Покажем, что его левые коэффициентные идеалы K_i совпадают с соответствующими левыми коэффициентными идеалами Sa_i. Имеем, $K_i = S\varphi^i(f_0)+\ldots+S\varphi(f_{i-1})+Sf_i = Su_{i-1}+Se_it_i$. Поскольку $Su_{i-1}+Sg_i = Sa_i$, то $su_{i-1}+tg_i = u_id_i$ для некоторых $s, t \in S$. Тогда $\varphi(s)u_{i-1}+\varphi(tt_i)v_i = \varphi(d_i)u_i$. С другой стороны, $u_i = u_{i-1} \vee e_i = e_i + e_i^{\perp}u_{i-1}$. Воспользовавшись тем, что $\varphi(d_i)$ — обратимый элемент, для подходящих $a, b \in S$ получаем $au_{i-1} + bv_i = u_i = e_i + e_i^{\perp}u_{i-1}$. Умножив равенство на e_i, получаем $bv_ie_i = e_i$, откуда следует $e_i \leq v_i$. Следовательно, $K_i = Su_{i-1} + Sf_i \subseteq Su_{i-1} + Sg_i = Sa_i$. Вновь воспользуемся тем, что $su_{i-1} + tg_i = a_i$. Тогда $a_i = a_iu_i = (su_{i-1} + tg_i)u_i = su_{i-1}u_i+tt_iv_i(e_i^{\perp}u_{i-1}+e_i) = su_{i-1}+tt_iv_ie_i^{\perp}u_{i-1}+tv_ie_it_i = au_{i-1}+bf_i$ для $a, b \in S$. Показали, что $Sa_0 = K_0, \ldots, Sa_k = K_k$. Кроме того, $Sa_{k+1} = S(v_0 \vee \ldots \vee v_k) = S(u_0 \vee \ldots \vee u_k) = K_{k+1}$, поэтому из совпадения соответствующих коэффициентных левых идеалов следует $L = R(f_0 + \ldots + f_kx^k)$. $\square$

Замечания. 1) В доказательстве пункта 2) предложения 1 рассматривалась конструкция, позволяющая "подправить" образующий многочлен главного левого m-идеала. Сейчас мы покажем, как можно найти такой образующий без опоры на какой-либо имеющийся многочлен, но зная левые коэффициентные идеалы.

Пусть L — главный левый m-идеал полукольца S, удовлетворяющего условиям предложения 1. Пусть L_i — его левые коэффициентные идеалы. Отметим, что для произвольного полукольца косых многочленов множество левых коэффициентных идеалов, задающих левый m-идеал, не обязано быть возрастающей цепью, но необходимо выполняется включение $\varphi(L_i) \subseteq L_{i+1}$. В нашем случае представимость любого элемента полукольца в виде ed, $e = \varphi(e) \in BS$, и обратимость $\varphi(d)$ для неделителя нуля гарантирует также включение $L_i \subseteq L_{i+1}$. Поскольку S — левое полукольцо Безу, то L_i являются главными левыми идеалами полукольца S. Пусть $L_i = Sa_i$, $a_i = u_i d_i$ для $u_i \in BS$ и неделителя нуля $d_i \in S$ и $Sa_0 \subseteq Sa_1 \subseteq \ldots \subseteq Sa_k \subsetneq Sa_{k+1} = \ldots$ и $\varphi(Sa_i) \subseteq Sa_{i+1}$.

Возможны следующие два варианта.

$i)$ Идемпотенты в разложениях a_k и a_{k+1} совпадают. Тогда $a_k = u_k d_k$, где d_k — неделитель нуля, не являющийся обратимым элементом, поскольку в противном случае получаем $Sa_k = Su_k = Sa_{k+1}$, противоречие. Поскольку $\varphi(Sa_{k+1}) \subseteq Sa_{k+2}$, то $Su_k \subseteq Sa_{k+2} = Su_k d_{k+2} \subseteq Su_k$, поэтому все левые идеалы, начиная с Sa_{k+1}, равны Su_k. Для цепи $u_0 \leq \ldots \leq u_k = u_{k+1}$ выбираем идемпотенты $e_0, \ldots, e_k, e_{k+1}$ как относительные дополнения на каждом шаге. Заметим, что в этом случае $e_{k+1} = 0$. Положим $f_0 = a_0 = e_0 d_0$. В предложении 1 f_i определялся как $f_i = e_i t_i$, где t_i заимствовался у первоначального многочлена g. Сейчас нам g не известен, поэтому из $u_1 = e_0 \vee e_1 = e_0 + e_0^{\perp} e_1 = e_0 + e_1$ имеем $a_1 = e_0 d_1 + e_1 d_1$, и можем положить $f_1 = e_1 d_1$. Далее, пользуясь разложением $Sa_i = Se_0 \oplus \ldots \oplus Se_{i-1} \oplus Se_i d_i$, определяем $f_i = e_i d_i$. Получаем $L = R(f_0 + \ldots + f_k x^k)$ и $f_{i+1} \in \operatorname{ann}_l(Sa_i)$. Действительно, это следует из совпадения левых коэффициентных идеалов L'_i левого идеала Rf с соответствующими L_i. В силу определения $L'_0 = Sa_0$. Поскольку $\varphi(Sa_j) \subseteq Sa_{j+1}$, то $Se_j \subseteq Sa_i$ для любого $j < i$. Очевидно, что $Sf_i \subseteq Sa_i$. Поэтому $L'_i = Se_1 + \ldots + Se_{i-1} + Sf_i \subseteq Sa_i$. Обратное включение очевидно. Таким образом, для $i \leq k$ выполняется $L'_i = Sa_i$. Наконец, $L'_{k+1} = Se_0 + \ldots + Se_k = S(e_0 \vee \ldots \vee e_k) = Su_k = Sa_{k+1}$.

$ii)$ Идемпотенты в разложениях a_k и a_{k+1} различны. Тогда $a_k = u_k d_k$, $a_{k+1} = u_{k+1} d_{k+1}$ и d_k, d_{k+1} — неделители нуля, $u_k < u_{k+1}$. Заметим, что $Su_{k+1} = Sa_{k+1} = Sa_{k+2} = \ldots$. Определение коэффициентов $f_0, \ldots, f_k$ такое же, как и в предыдущем случае. Положим $f_{k+1} = u_{k+1}$. Многочлен $f = f_0 + \ldots + f_{k+1} x^{k+1}$ порождает левый m-идеал Rf с левыми коэффициентными идеалами Sa_i, т. е. $L = Rf$.

2) Конструкция, применяемая в предложении 1, позволяет рассмотреть ее для произвольного полукольца S. Пусть φ — такой эндоморфизм полукольца S, что $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, и $c_0 \leq c_1 \leq \ldots \leq c_k$ — произвольная цепь идемпотентов из BS. Покажем, что левый m-идеал L, задаваемый цепью $Sc_0 \subseteq Sc_1 \subseteq \ldots \subseteq Sc_k = Sc_k \ldots$, является главным левым m-идеалом полукольца $R = S[x, \varphi]$. Положим $f_0 = c_0$ и f_{i+1} — относительное дополнение идемпотента c_i в интервале $[0, c_{i+1}]$ булевой решетки BS. Рассмотрим $f = f_0 + \ldots + f_k x^k \in R$. Для любых $j < i \leq k$ выполняется $f_j \leq c_j \leq c_{i-1}$, поэтому $f_j \wedge f_i \leq c_{i-1} \wedge f_i = 0$. Получаем, что идемпотенты f_i, $i = 0, \ldots, k$ образуют ортогональную систему. Вспомним, что операция $\wedge$ в BS совпадает с полукольцевым умножением в S. Поэтому $f_i f = f_i x^i \in Rf$ для любого $i \geq 0$, и Rf — главный левый m-идеал полукольца R. Пусть L_i — его произвольный коэффициентный левый идеал. Несложно понять, что $L_i x^i$ состоит из одночленов вида $s_0 f_0 x^i, \ldots, s_i f_i x^i$ и их конечных сумм. По лемме 3 $L_i = Sf_0 + \ldots + Sf_i = S(f_0 \vee \ldots \vee f_i) = Sc_i$. Отсюда следует, что $L = Rf$.

Проведенные в замечании 1 рассуждения позволяют получить следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — инъективный жесткий эндоморфизм полукольца S, $\varphi(d)$ — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$. Тогда любая конечная цепь $Sa_0 \subseteq \ldots \subseteq Sa_k \subseteq Sa_{k+1}$ главных левых идеалов, удовлетворяющая условиям $\varphi(Sa_i) \subseteq Sa_{i+1}$ для всех $i \leq k$ и $\varphi(Sa_{k+1}) \subseteq Sa_{k+1}$, задает главный левый m-идеал L полукольца $R = S[x, \varphi]$, левые коэффициентные идеала L_i которого совпадают с Sa_i.*

Лемма 6. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — инъективный жесткий эндоморфизм полукольца S, $\varphi(d)$ — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$. Тогда каждый конечно порожденный левый m-идеал полукольца $R = S[x, \varphi]$ является главным левым m-идеалом.*

Доказательство. Пусть $Rf + Rg$ — сумма главных левых m-идеалов, $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, $g = g_0 + \ldots + g_k x^k$, где $k = \max\{\deg f, \deg g\}$. По предложению 1 коэффициентные левые идеалы для Rf и Rg образуют цепи $Sa_0 \subseteq \ldots \subseteq Sa_k \subseteq Sa_{k+1} = \ldots$ и $Sb_0 \subseteq \ldots \subseteq Sb_k \subseteq Sb_{k+1} = \ldots$ соответственно. Заметим, что выполняются условия $\varphi(Sa_i) \subseteq Sa_{i+1}$; аналогично для Sb_i. Левый идеал $Rf + Rg$ является левым m-идеалом, коэффициентные левые идеалы которого образуют цепь $Sa_0 + Sb_0 \subseteq \ldots \subseteq Sa_k + Sb_k \subseteq Sa_{k+1} + Sb_{k+1} = \ldots$. Коэффициентные левые идеалы удовлетворяют условиям предложения 2, поэтому $Rf + Rg$ — главный левый m-идеал полукольца R. $\square$

Лемма 7. *Пусть S — риккартово слева полукольцо, каждый дополняемый идемпотент которого централен, и φ — такой инъективный эндоморфизм полукольца S, что $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$ и $\varphi(d)$ — обратимый элемент для любого неделителя нуля $d \in S$. Тогда для каждого $M \in \operatorname{Max} BS$ эндоморфизм φ индуцирует инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ пирсовского слоя S/α_M, S/α_M — $\bar{\varphi}$-жесткое полукольцо и $\bar{\varphi}(\bar{a})$ обратим в S/α_M для любого ненулевого $\bar{a} \in S/\alpha_M$.*

Доказательство. Для произвольного $a \in S$ положим $\bar{\varphi}(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}$ — образ элемента $\varphi(a)$ при естественном эпиморфизме $h : S \to S/\alpha_M$. Стандартно проверяется, что $\bar{\varphi}$ является эндоморфизмом слоя S/α_M. Если $a, b \in S$, то получаем цепочку импликаций:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{\varphi}(\bar{b}) \Rightarrow \overline{\varphi(a)} = \overline{\varphi(a)} \Rightarrow \varphi(a)e = \varphi(b)e \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M \\ \Rightarrow \varphi(ae) = \varphi(be) \Rightarrow ae = be \Rightarrow \bar{a} = \bar{b},\end{aligned}$$

поэтому $\bar{\varphi}$ инъективен. Пусть $\bar{a} \in S/\alpha_M$ и $\bar{a} \neq \bar{0}$. По лемме 5 $a = ed$ для некоторых $e \in BS$ и неделителя нуля $d \in S$. Образ центрального дополняемого идемпотента при естественном эпиморфизме h — либо нуль, либо единица слоя S/α_M, и ясно, что в нашем случае $h(e) = \bar{1}$. Поэтому $\bar{a} = h(a) = h(ed) = \bar{d}$. По условию $\varphi(d)$ обратим в S, поэтому $\overline{\varphi(d)} = \bar{\varphi}(\bar{d})$ обратим в слое S/α_M. Следовательно, $\bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{\varphi}(\bar{d})$ обратим в S/α_M. Пусть $\bar{a}\bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{0}$, и $a = ed$ для $e \in BS$ и неделителя нуля $d \in S$. Если $\bar{e} = \bar{0}$, то $\bar{a} = \bar{0}$, и все доказано. Если $\bar{e} = \bar{1}$, то $\bar{d}\bar{\varphi}(\bar{d}) = \bar{0}$, откуда $\bar{d} = \bar{0}$, $\bar{a} = \bar{0}$, и S/α_M — $\bar{\varphi}$-жесткое полукольцо. $\square$

Доказательство теоремы 2. По [13, теорема 1] полукольцо S является φ-жестким в точности тогда, когда R — полукольцо без нильпотентных элементов. Поэтому доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 1) завершается применением леммы 6.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $a, b \in S$. Рассмотрим конечно порожденный левый m-идеал $Ra + Rb$, который по условию является главным левым m-идеалом Rf для некоторого многочлена $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$. Поскольку у равных левых идеалов совпадают их соответствующие коэффициентные левые идеалы, получаем $Sa + Sb = Sf_0$. Следовательно, S является левым полукольцом Безу.

Далее, $Ra + Rx = Rh$ для некоторого $h = h_0 + \ldots + h_n x^n \in R$. Тогда $a = uh$, $x = vh$ и $h = fa + gx$ для подходящих $f, g, u, v \in R$. Пусть $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, и аналогичные обозначения используем для других многочленов. Получаем $a = u_0 f_0 a$, $0 = v_0 f_0 a$ и $1 = v_0 g_0 + b\varphi(a)$, где $b = v_0 f_1 + v_1 \varphi(f_0)$. Поскольку $v_0 \in \mathrm{ann}_l(f_0 a)$ — идеал в S, то $v_0 g_0 u_0 \in \mathrm{ann}_l(f_0 a)$, откуда получаем $0 = v_0 g_0 u_0 f_0 a = v_0 g_0 a$ и $a = b\varphi(a)a$. Из жесткости φ следует $v_0 g_0 \varphi(a) = 0$ [13, лемма 3], кроме того, φ-жесткое полукольцо является коммутативным в нуле. Поэтому $b\varphi(a) = (b\varphi(a))^2$ и $v_0 g_0 b\varphi(a) = 0$. Таким образом, $b\varphi(a)$ — центральный дополняемый идемпотент, а $v_0 g_0$ — его дополнение. Если $s \in \mathrm{ann}_l(a)$, то $s\varphi(a) = 0$, поэтому $s = sv_0 g_0 + sb\varphi(a) = sv_0 g_0$. Следовательно, $\mathrm{ann}_l(a) = Sv_0 g_0$, и S — риккартово слева полукольцо.

Осталось показать, что $\varphi(d)$ обратим для каждого неделителя нуля полукольца S. Но для этого достаточно повторить рассуждения при обосновании аналогичного факта в теореме 1, поскольку в нашей ситуации в полукольце S выполнены все условия, используемые в указанном доказательстве.

2) $\Leftrightarrow$ 3). Полукольцо S является левым полукольцом Безу в точности тогда, когда каждый пирсовский слой S/α_M является левым полукольцом Безу [12, теорема 5]. Полукольцо S риккартово слева тогда и только тогда, когда каждый пирсовский слой является полукольцом без делителей нуля и для любого $b \in S$ $\mathrm{ann}_l(b) \cap BS$ — главный идеал в BS [9, предл. 4]. Если выполнен пункт 2), то произвольный пирсовский слой S/α_M является $\bar{\varphi}$-жестким по лемме 7. Если выполнен пункт 3) и $a\varphi(a) = 0$, то $\bar{a}\bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{0}$ в каждом пирсовском слое. Тогда получаем $\bar{a} = \bar{0}$ в каждом пирсовском слое. В силу изоморфности пирсовского представления произвольного полукольца отсюда следует $a = 0$, и S — φ-жесткое полукольцо. Теорема доказана. $\square$

Полукольцо без делителей нуля является риккартовым, и если к тому же φ — инъективный эндоморфизм, то φ — жесткий эндоморфизм. Поэтому получаем:

Следствие 1. *Пусть S — полукольцо без делителей нуля, φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$. Тогда равносильны условия:*

(1) *любой конечно порожденный левый m-идеал из R является главным;*
(2) *S — левое полукольцо Безу, $\varphi(a)S = S$ для любого ненулевого $a \in S$.*

Следствие 2. [14, утверждение 15.12] *Пусть A — кольцо без делителей нуля, φ — инъективный эндоморфизм кольца A, $R = A[x, \varphi]$. Тогда равносильны условия:*

(1) *R — левое кольцо Безу;*
(2) *R/Rx^2 — левое кольцо Безу;*
(3) *A — левое кольцо Безу, $\varphi(a)A = A$ для любого ненулевого $a \in A$.*

References

[1] L. Dale, *Monic and monic free ideals in polynomial semirings*, Proc Amer. Math. Soc., **56** (1976), 45–50. DOI: 10.2307/2041571

[2] A. A. Tuganbaev, *Bezout rings, polynomials, and distributivity*, Matematicheskie zametki, **70**:2 (2001), 270–288. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm740

[3] R. S. Pierce, *Modules over commutative regular rings*, Mem. Amer. Math. Soc., **70** (1967), 1–112. doi: 10.1090/memo/0070 .

[4] W. D. Burgess, W. Stephenson, *Pierce sheaves of non-commutative rings*, Comm. Algebra, **39** (1976), 512–526. doi.org/10.1080/00927877608822094

[5] W. D. Burgess, W. Stephenson, *Rings all of whose Pierce stalks are local*, Canad. Math. Bull., **22**:2 (1979) 159–164. DOI: https://doi.org/10.4153/CMB-1979-022-8

[6] K. I. Beidar, A. V. Mikhalev and C. Salavova, *Generalized identities and semiprime rings with involution*, Math. Z., **178** (1981) 37–62. doi.org/10.1007/BF01218370

[7] V. V. Chermnykh, *Sheaf representations of semirings*, Uspehi matemat. nauk, **48**:5 (1993), 185–185. http://dx.doi.org/10.1070/RM1993v048n05ABEH001078

[8] R. V. Markov, V. V. Chermnykh, *On Pierce stalks of semirings*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, **19**:2 (2014), 171–186. https://doi.org/10.1007/s10958-016-2713-5

[9] R. V. Markov, V. V. Chermnykh, *Semirings close to regular and their Pierce stalks*, Trudy Instituta Matemetiki i Mekhaniki URO RAN, **21**:3 (2015), 213–221. http://mi.mathnet.ru/timm1214

[10] V. V. Chermnykh, *Functional representations of semirings*, Fundamentalnaya i prikladnaya matemat., **17**:3 (2012), 111–227. doi: 10.1007/s10958-012-1062-2 .

[11] L. Dale, *The structure of monic ideals in a noncommutative polynomial semirings*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **39**:1–3 (1982), 163–168. DOI: https://doi.org/1007/bf01895228

[12] R. V. Markov, V. V. Chermnykh, *Pierce chains for semirings*, Vestnik Syktyvkarskogo universiteta, **16** (2012), 88–103. eLIBRARY ID: 18958088

[13] D. A. Maslyaev, V. V. Chermnykh, *Semirings of skew Laurent polynomials*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 521–533. doi: 10.33048/semi.2020.17.033

[14] A. A. Tuganbaev, *Ring theory. Arithmetical rings and modules*, MCNMO, Moscow, 2009.

[15] E. M. Vechtomov, *On Boolean rings*, Matematicheskie zametki, **39**:2 (1986), 182–185. doi.org/10.1007/BF01159890

Marina Vladimirovna Babenko
Vyatka State Universite,
Moskovskaya, 36,
610000, Kirov, Russia
Email address: marinka_ov@mail.ru

Vasiliy Vladimirovich Chermnykh
Piritim Sorokin Syktyvkar State University,
Octyabrskyi ave., 55,
167001, Syktyvkar, Russia
Email address: vv146@mail.ru