S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–158 (2021) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2021.16.xxx MSC 31C12

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА МОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А.Г. ЛОСЕВ, Е.А. МАЗЕПА

Abstract. The paper is devoted to estimating the speed of approximation of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson equation on non-compact model Riemannian manifolds to their boundary data at "infinity". Quantitative characteristics that estimate the speed of the approximation are found in terms of the metric of the manifold and the smoothness of the inhomogeneity in the Poisson equation.

Keywords: Dirichlet problem, Poisson equation, model Riemannian manifold, asymptotic behavior.

1. Введение

Работа посвящена изучению асимптотического поведения решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некомпактных модельных римановых многообразиях.

Активное изучение решений уравнений в частных производных на некомпактных римановых многообразиях началось в середине 70-х годов 20-го века и продолжается до настоящего времени. Исторически сложившимися в данной области математики являются следующие постановки задач.

1. Найти условия, гарантирующие, что всякое решение уравнения из заданного класса — тривиально (теоремы типа Лиувилля).

2. Найти условия, обеспечивающие однозначную разрешимость краевых и внешних краевых задач.

Losev A.G., Mazepa E.A., Asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson equation on model Riemannian manifolds.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (гос. задание № 0633-2020-0003).

Поступила ? февраля 2021 г., опубликована ?? ???? 2021 г.

Одним из истоков указанной проблематики считается классификационная теория двумерных некомпактных римановых поверхностей. Отличительным свойством двумерных поверхностей параболического типа является выполнение для них теоремы типа Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данной поверхности является тождественной постоянной (см., например, [1, 2]). Данное свойство послужило основой для распространения понятий параболичности и гиперболичности типа на произвольные некомпактные римановы многообразия.

А именно, некомпактные римановы многообразия, на которых всякая ограниченная снизу супергармоническая функция равна константе, называют многообразиями *параболического* типа (см. [3]). В противном случае говорят, что многообразие имеет гиперболический, иначе, непараболический тип.

К одному из первых результатов в определении типа риманова многообразия, использующих геометрические характеристики, относится теорема С.Я. Ченга и С.Т. Яу [4], утверждающая, что полное многообразие является параболическим, если объем геодезического шара радиуса R растет не быстрее, чем R^2 при $R \to \infty$.

Исследования, посвященные нахождению условий параболичности типа некомпактных римановых многообразий имеют достаточно большую историю. За последние годы найден ряд условий, обеспечивающих параболичность (непараболичность) типа некомпактных римановых многообразий в терминах роста объема, площади сечений, изменения различных кривизн (секционной, Риччи и других), емкостных характеристик и т.п. (см., напр., [3, 4, 5, 6, 7]). Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно также получить из обзора [3].

Вопросы существования нетривиальных гармонических и супергармонических функций естественным образом приводят к теоремам типа Лиувилля. Считающаяся классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая функция в евклидовом пространстве является тождественной постоянной. В течение последних десятилетий были найдены десятки различных условий на геометрическую структуру некомпактных римановых многообразий, обеспечивающих тривиальность некоторых классов решений эллиптических уравнений. Чаще всего изучаются ограниченные, положительные, суммируемые, имеющие конечный интеграл Дирихле и некоторые другие пространства гармонических функций и решений других эллиптических уравнений и неравенств (см., например, [3, 4, 8, 9, 10, 11, 12]).

Вместе с тем класс некомпактных римановых многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные гармонические функции, достаточно обширен. В последнее время наметилась тенденция к более общему подходу к теоремам типа Лиувилля. А именно, оценивается размерность различных пространств гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях (см., например, [9, 13, 14, 15]).

Не меньший интерес вызывают вопросы разрешимости различных краевых задач, например задача Дирихле о восстановлении гармонической функции по непрерывным граничным данным на "бесконечности".

Вообще говоря, на произвольном некомпактном римановом многообразии весьма затруднительна общепринятая постановка задачи Дирихле. Однако в некоторых случаях геометрическая компактификация многообразия позволяет сделать это в классической формулировке. Одним из классов римановых многообразий, на которых постановка краевых задач имеет естественную геометрическую интерпретацию, являются многообразия с отрицательной секционной кривизной. Например, М. Андерсон и Д. Сулливан (см. [16, 17]) показали, что на полном односвязном многообразии с отрицательной секционной кривизной $\operatorname{sect} M$, удовлетворяющей условиям $-b^2 \leq \operatorname{sect} M \leq -a^2 < 0$, однозначно разрешима задача Дирихле о восстановлении гармонической на таком многообразии функции по непрерывным граничным данным.

Точные условия однозначной разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций и решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных модельных многообразиях, обобщающих сферически-симметричные, найдены в работах [6, 11, 13, 18].

Заметим, что в рамках данной тематики большая часть статей посвящена исследованию решений однородных эллиптических уравнений. Однако в последние годы появились первые работы, посвященные изучению асимптотического поведения решений неоднородных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях (см., например, [19, 20, 21]).

В исследованиях, посвященных разрешимости краевых зада, традиционно большое внимание уделяется следующему вопросу: в каком смысле, например, в какой метрике, понимать близость решения к граничным данным (см. [18, 22, 23]). Одновременно, вызывает интерес получение количественных характеристик, оценивающих скорость приближения решения к граничным данным. В том числе здесь можно указать знаменитую "лемму о возрастании"(см. [23]). Именно в этом направлении и выполнена данная работа. В частности, найдены достаточно точные оценки скорости приближения решений задачи Дирихле к своим граничным данным на некомпактных римановых многообразиях некоторого специального вида.

2. Постановка задачи

Одним из классов римановых многообразий, на которых постановка краевых задач имеет естественную геометрическую интерпретацию, является множество многообразий следующего вида (называемые – модельными): $M_g = B \cup D$, где B — некоторый предкомпакт с непустой внутренностью, а D изометрично прямому произведению $[r_0; +\infty) \times S$ ($r_0 > 0$ и S — компактное риманово многообразие без края) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g^2\,(r)\,d\theta^2.$$

Здесь $g(r)$ — положительная и гладкая на $[r_0; +\infty)$ функция, а $d\theta^2$ — метрика на S. Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$, поверхности вращения и другие. Многообразия типа D иногда называют "метрическими рогами".

За последние годы был опубликован ряд работ, посвящённых изучению поведения решений различных эллиптических уравнений и неравенств на подобных многообразиях и некоторых их обобщениях (см., например, [6, 9, 11, 13, 18, 19]). В частности, в работе [19] исследуются решения уравнения Пуассона $u \in C^2(M_g)$

$$\Delta u = f(x), \tag{1}$$

где $f \in C^{0,\alpha}(M_g) \bigcap G^{[\frac{3n}{2}]}(D)$. Здесь $n = \dim M_g$, и

$$G^p(D) = \{(r,\theta) : \forall r \in [r_0; +\infty)\, f(r,\theta) \in C^p(S)\} -$$

подмножество пространства гельдеровых на M_g функций, являющихся p раз непрерывно дифференцируемыми по второму аргументу на D для любого фиксированного первого аргумента. Введем обозначения

$$\varphi_0(r) = \|f(r,\theta)\|_{L^1(S)}, \qquad \varphi_m(r) = \|\Delta_\theta^m f(r,\theta)\|_{L^2(S)},$$

$$h_m(r) = \int\limits_r^\infty g^{1-n}(t) \left(\int\limits_{r_0}^t (\frac{1}{g^2(\xi)} + \varphi_0(\xi) + \varphi_m(\xi)) g^{n-1}(\xi) d\xi \right) dt. \tag{2}$$

В [19] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1 ([19])**.** *Пусть многообразие M_g таково, что $h_m(r_0) < \infty$, где $m = [\frac{3n}{4}]$. Тогда для любой функции $\Phi(\theta) \in C(S)$ на M_g существует единственное решение уравнения (1) $u(x)$ такое, что на D выполнено*

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = \Phi(\theta).$$

Также отметим, что предельный переход в граничных условиях на "бесконечности" понимается в смысле равномерной сходимости. А именно, подразумевается выполнение следующего равенства

$$\lim_{r\to\infty} ||u(r,\theta) - \Phi(\theta)||_{C(M_g \setminus B(r))} = 0,$$

где $B(r)$ — геодезический шар радиуса r с центром в некоторой фиксированной точке.

Таким образом, была доказана разрешимость задачи Дирихле для уравнения Пуассона на модельных римановых многообразиях. Однако достаточно интересным остался вопрос, с какой именно скоростью решение сходится к своим граничным данным на "бесконечности". Данная работа посвящена изучению асимптотического поведения на "бесконечности" решений уравнения Пуассона на таких многообразиях, и в частности, оценке скорости асимптотической сходимости решения к граничным данным.

3. Асимптотическое поведение решений внешней краевой задачи Дирихле

В данном параграфе будем рассматривать уравнение Пуассона на многообразии D

$$\Delta u(r,\theta) = f(r,\theta),$$

где $f \in C^{0,\alpha}(D) \bigcap G^{[\frac{3n}{2}]+2}(D)$.

Внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона на D определим следующим образом: найти функцию $u(r,\theta)$ такую, что

$$\begin{cases} \Delta u(r,\theta) = f(r,\theta), \\ u(r_0,\theta) = \Psi(\theta), \\ \lim\limits_{r\to\infty} ||u(r,\theta) - \Phi(\theta)||_{C(D \setminus B(r))} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\Psi(\theta)$ и $\Phi(\theta)$ — некоторые, заданные на D функции.

Традиционно решение неоднородной задачи ищется в виде

$$u(r,\theta) = u_1(r,\theta) + u_2(r,\theta),$$

где $u_1(r,\theta)$ является решением задачи Дирихле для однородного уравнения

$$\begin{cases} \Delta u_1(r,\theta) = 0, \\ u_1(r_0,\theta) = \Psi(\theta), \\ \lim\limits_{r\to\infty} ||u_1(r,\theta) - \Phi(\theta)||_{C(D\setminus B(r))} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

а $u_2(r,\theta)$ — решением однородной краевой задачи для неоднородного уравнения

$$\begin{cases} \Delta u_2(r,\theta) = f(r,\theta), \\ u_2(r_0,\theta) = 0, \\ \lim\limits_{r\to\infty} ||u_2(r,\theta)||_{C(D\setminus B(r))} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

В работах [13] и [19] были получены условия разрешимости соответствующих краевых задач.

Далее введем обозначение

$$q\,(r) = \int\limits_r^\infty g^{1-n}(t) \left(\int\limits_{r_0}^t g^{n-3}(\xi) d\xi \right) dt.$$

Ясно, что для всех $r \geq r_0$ выполнено $h_m(r) \geq q(r)$.

Положим $m_1 = [\frac{3n}{4}] + 1$ и сформулируем первый основной результат данной работы.

Теорема 2. *Пусть риманово многообразие M_g и правая часть уравнения Пуассона f таковы, что $h_{m_1}(r_0) < \infty$. Тогда для любых функций $\Psi\,(\theta) \in C^{2m_1}(S)$ и $\Phi\,(\theta) \in C^{2m_1}(S)$ на D существует единственное решение $u(r,\theta)$ уравнения Пуассона такое, что*

$$u(r_0,\theta) = \Psi(\theta) \quad \textit{и} \quad |u(r,\theta) - \Phi(\theta)| \leq C h_{m_1}(r)$$

для любых (r,θ) при $r > r_0$, где константа $C > 0$ не зависит от (r,θ).

Доказательство. Будем искать решение неоднородной задачи в виде $u(r,\theta) = u_1(r,\theta) + u_2(r,\theta)$, где $u_1(r,\theta)$ и $u_2(r,\theta)$ являются решениями соответствующих задач (4) и (5). Как показано в [13] в силу сходимости интеграла $h_{m_1}(r_0) < \infty$ решение $u_1(r,\theta)$ на D существует и единственно. Покажем, что выполнено неравенство

$$|u_1(r,\theta) - \Phi(\theta)| \leq C h_{m_1}(r)$$

для любых (r,θ) при $r > r_0$, где константа $C > 0$ не зависит от (r,θ).

Пусть $\{w_k(\theta)\}$ — ортонормированный базис в $L^2(S)$ из собственных функций оператора Лапласа $-\Delta_\theta$, а λ_k — соответствующие собственные числа ($0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \ldots$), т.е.

$$\Delta_\theta w_k(\theta) + \lambda_k w_k(\theta) = 0.$$

Тогда имеет место следующие разложения

$$\Phi\,(\theta) = \sum_{k=0}^\infty c_k w_k(\theta), \qquad \Psi\,(\theta) = \sum_{k=0}^\infty z_k w_k(\theta),$$

где
$$c_k = \int\limits_S \Phi\left(\theta\right) w_k(\theta) d\theta, \qquad z_k = \int\limits_S \Psi\left(\theta\right) w_k(\theta) d\theta.$$

Также для любого фиксированного r справедливо представление для гармонической функции $u_1(r,\theta)$
$$u_1\left(r,\theta\right) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k\left(r\right) w_k(\theta), \qquad \text{где} \qquad v_k\left(r\right) = \int\limits_S u_1\left(r,\theta\right) w_k(\theta) d\theta.$$

В работе [9] было показано, что для всех $k \geq 0$ коэффициенты Фурье $v_k(r)$ удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению
$$v_k^{''}\left(r\right) + \left(n-1\right) \frac{g^{'}\left(r\right)}{g\left(r\right)} v_k^{'}\left(r\right) - \frac{\lambda_k}{g^2\left(r\right)} v_k\left(r\right) = 0, \tag{6}$$
которое будем называть спектральным. В данном случае $v_k(r)$ также удовлетворяет краевым условиям $v_k\left(r_0\right) = z_k$, $\lim\limits_{r\to\infty} v_k\left(r\right) = c_k$. Более того, в [13] показано, что для всех $r \geq r_0$ имеет место неравенство $\left|v_k\left(r\right)\right| \leq \left|c_k\right| + \left|z_k\right|$, а также абсолютная и равномерная сходимость рядов
$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k\left(r\right) w_k(\theta), \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(\theta), \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k w_k(\theta).$$

Используя неравенство треугольника, оценим разность
$$\mid u_1(r,\theta) - \Phi(\theta) \mid = \left| \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r)\omega_k(\theta) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k\omega_k(\theta) \right| =$$
$$\leq \left|(v_0(r) - c_0)\omega_0(\theta)\right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left|v_k(r) - c_k\right| \left|\omega_k(\theta)\right|. \tag{7}$$

Далее оценим сверху первое слагаемое. Дважды интегрируя спектральное уравнение (6) при $k=0$, как и в [13], имеем
$$v_0(r) = v_0'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + v_0(r_0).$$

Так как $\lim\limits_{r\to\infty} v_0\left(r\right) = c_0$, то
$$c_0 = v_0'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + v_0(r_0).$$

Из определения собственных функций следует $w_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{|S|}}$, где $|S|$ – объем S. Тогда выполнено
$$\left|(v_0(r) - c_0)\omega_0(\theta)\right| = \frac{1}{\sqrt{|S|}} \left|v_0(r) - c_0\right| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{|S|}} \left| v_0'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + v_0(r_0) - v_0'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} - v_0(r_0) \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|S|}} \left| v_0'(r_0) \right| g^{n-1}(r_0) \int\limits_r^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \le \frac{1}{\sqrt{|S|}} \left| v_0'(r_0) \right| g^{n-1}(r_0) q\left(r\right) = Cq\left(r\right).$$

Здесь C – константа, не зависящая от r.

Теперь оценим сверху каждый член ряда из неравенства (7). Дважды интегрируя спектральное уравнение (6) при $k > 0$, получим

$$(8)\quad v_k(r) = \lambda_k \int\limits_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^t g^{n-3}(z) v_k(z) dz + v_k'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + v_k(r_0).$$

С учетом краевых условий $v_k\left(r_0\right) = z_k$ и $\lim\limits_{r\to\infty} v_k\left(r\right) = c_k$, имеем

$$c_k = \lambda_k \int\limits_{r_0}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^t g^{n-3}(z) v_k(z) dz + v_k'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + z_k.$$

Выразим отсюда z_k

$$z_k = c_k - \lambda_k \int\limits_{r_0}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^t g^{n-3}(z) v_k(z) dz - v_k'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)}.$$

Подставляя полученное выражение в (8), получим

$$v_k(r) = \lambda_k \int\limits_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^t g^{n-3}(z) v_k(z) dz + v_k'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} +$$

$$+ c_k - \lambda_k \int\limits_{r_0}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^t g^{n-3}(z) v_k(z) dz - v_k'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} =$$

$$= c_k - \lambda_k \int\limits_{r}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^t g^{n-3}(z) v_k(z) dz - v_k'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)}.$$

Следовательно, справедливы неравенства

$$|v_k(r) - c_k| = \left| -\lambda_k \int\limits_{r}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^t g^{n-3}(z) v_k(z) dz - v_k'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \right| \le$$

$$\le \lambda_k \int\limits_{r}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^t g^{n-3}(z) \left| v_k(z) \right| dz + \left| v_k'(r_0) \right| g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)}.$$

Напомним, что $\left| v_k\left(r\right) \right| \le |c_k| + |z_k|$. Тогда последнее неравенство можно продолжить следующим образом

$$|v_k(r) - c_k| \le \lambda_k \left(|c_k| + |z_k| \right) \int\limits_{r}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^t g^{n-3}(z) dz + \left| v_k'(r_0) \right| g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r}^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \le$$

$$\le \lambda_k \left(|c_k| + |z_k| \right) q\left(r\right) + \left| v_k'(r_0) \right| g^{n-1}(r_0) q\left(r\right).$$

Учитывая вышеизложенное, продолжим оценку (7)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|v_k(r)-c_k|\,|\omega_k(\theta)|\leq q\,(r)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left(|c_k|+|z_k|\right)+g^{n-1}(r_0)\,|v_k'(r_0)|\right)|\omega_k(\theta)|\leq$$

$$\leq q\,(r)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\,|c_k|\,|\omega_k(\theta)|+\lambda_k\,|z_k|\,|\omega_k(\theta)|+g^{n-1}(r_0)\,|v_k'(r_0)|\,|\omega_k(\theta)|\right)\leq$$

$$\leq q\,(r)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\,|c_k|\,|\omega_k(\theta)|+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\,|z_k|\,|\omega_k(\theta)|+\sum_{k=1}^{\infty}g^{n-1}(r_0)\,|v_k'(r_0)|\,|\omega_k(\theta)|\right).$$

Далее покажем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\,|c_k|\,|\omega_k(\theta)|\,.$$

Пользуясь формулой Грина и определением собственных функций, получаем

$$|c_k|=\left|\int\limits_S\Phi\,(\theta)\,w_k(\theta)d\theta\right|=\frac{1}{\lambda_k}\left|\int\limits_S\Phi\,(\theta)\,\Delta_\theta w_k(\theta)d\theta\right|=\frac{1}{\lambda_k}\left|\int\limits_S\Delta_\theta\Phi\,(\theta)\,w_k(\theta)d\theta\right|.$$

Применим формулу Грина $m_1=\left[\frac{3n}{4}\right]+1$ раз

$$|c_k|=\frac{1}{\lambda_k^{m_1}}\left|\int\limits_S\Delta_\theta^{m_1}\Phi\,(\theta)\,w_k(\theta)d\theta\right|.$$

Далее воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$|c_k|\leq\frac{1}{\lambda_k^{m_1}}\left(\int\limits_S\left(\Delta_\theta^{m_1}\Phi\,(\theta)\right)^2d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_S w_k^2(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{C}{\lambda_k^{m_1}},$$

где C — константа, зависящая от выбора краевых условий, а также от S и m_1.

Известны следующие оценки собственных функций и собственных чисел (асимптотика Вейля) оператора Лапласа в $L^2(S)$ (см., например, [24])

$$\|w_k\|_{C(S)}\leq C_1\lambda_k^{\frac{n-2}{4}},\qquad C_2k^{\frac{2}{n-1}}\leq\lambda_k\leq C_3k^{\frac{2}{n-1}}.$$

Учитывая приведенные выше оценки, получаем справедливость следующих неравенств

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\,|c_k|\,|\omega_k(\theta)|\leq\sum_{k=1}^{\infty}C_3k^{\frac{2}{n-1}}\frac{C}{\lambda_k^{m_1}}C_1\lambda_k^{\frac{n-2}{4}}\leq\sum_{k=1}^{\infty}C_3k^{\frac{2}{n-1}}\frac{C^*}{k^{\frac{2m_1}{n-1}}}C_1^*k^{\frac{2}{n-1}\,\frac{n-2}{4}}\leq$$

$$\leq C_3^*\sum_{k=1}^{\infty}k^{\frac{2}{n-1}-\frac{2m_1}{n-1}+\frac{n-2}{2n-2}}=C_3^*\sum_{k=1}^{\infty}k^{\frac{4-4m_1+n-2}{2n-2}}=C_3^*\sum_{k=1}^{\infty}k^{\frac{2-4m_1+n}{2n-2}}<\infty.$$

Последний ряд сходится в силу того, что при $m_1=\left[\frac{3n}{4}\right]+1$ выполнено

$$\frac{2-4m_1+n}{2n-2}<-1.$$

Аналогичным образом доказывается сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\,|z_k|\,|\omega_k(\theta)|\qquad\text{и}\qquad\sum_{k=1}^{\infty}|v_k'(r_0)|\,|\omega_k(\theta)|\,.$$

Более подробно остановимся на исследовании последнего ряда. Сначала отдельно оценим $v_k'(r)$. По определению имеем

$$v_k(r) = \int\limits_S u_1(r,\theta) w_k(\theta) d\theta$$

Дифференцируя обе части равенства, а также используя определение собственных функций $w_k(\theta)$, получаем

$$|v_k'(r)| = \left| \int\limits_S \frac{\partial u_1}{\partial r}(r,\theta)\, w_k(\theta) d\theta \right| = \frac{1}{\lambda_k} \left| \int\limits_S \frac{\partial u_1}{\partial r}(r,\theta)\, \Delta_\theta w_k d\theta \right|.$$

Применим формулу Грина m_1 раз и воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$|v_k'(r_0)| = \frac{1}{\lambda_k^{m_1}} \left| \int\limits_S \Delta_\theta^{m_1} \frac{\partial u_1}{\partial r}(r_0,\theta)\, w_k(\theta) d\theta \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda_k^{m_1}} \sqrt{\int\limits_S \left(\Delta_\theta^{m_1} \frac{\partial u_1}{\partial r}(r_0,\theta) \right)^2 d\theta} \sqrt{\int\limits_S w_k^2(\theta) d\theta} = \frac{C}{\lambda_k^{m_1}},$$

где $C > 0$ — некоторая константа, зависящая от S и m_1. Из асимптотики Вейля следует

$$|v_k'(r_0)| \le \frac{C}{\lambda_k^{m_1}} \le \frac{C^*}{\left(k^{\frac{2}{n-1}}\right)^{m_1}}.$$

Далее доказательство сходимости этого ряда дословно совпадает с исследованием сходимости первого ряда.

С учетом сходимости рядов получаем справедливость следующих неравенств

$$| u_1(r,\theta) - \Phi(\theta) | \le |v_0(r)\omega_0 - c_0\omega_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r) - c_k|\, |\omega_k(\theta)| \le q(r) \Bigg(C +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k|\, |\omega_k(\theta)| + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |z_k|\, |\omega_k(\theta)| + \sum_{k=1}^{\infty} g^{n-1}(r_0)\, |v_k'(r_0)|\, |\omega_k(\theta)| \Bigg) \le C^{**} q(r)$$

для всех (r,θ) при $r > r_0$, где $C^{**} > 0$ — некоторая константа, зависящая от S и m_1, от выбора краевых условий и не зависящая от (r,θ).

Далее рассмотрим решение $u_2(r,\theta)$ однородной краевой задачи для уравнения Пуассона (5). Разрешимость этой задачи получена в работе [19]. Докажем справедливость оценки

$$|u_2(r,\theta)| \le Q h_{m_1}(r),$$

для всех (r,θ) при $r > r_0$ с некоторой константой $Q > 0$, которая не зависит от (r,θ).

В работе [19] решение краевой задачи (5) строилось в виде

$$u_2(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) \omega_k(\theta).$$

Здесь $v_k(r)$ является решением неоднородного спектрального уравнения

$$v_k''(r) + (n-1)\frac{g'(r)}{g(r)} v_k'(r) - \frac{\lambda_k}{g^2(r)} v_k(r) = p_k(r), \tag{9}$$

где λ_k — собственные числа оператора Лапласа на S, а $p_k(r)$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа правой части уравнения Пуассона $f(r,\theta)$, т.е.

$$f(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(r)w_k(\theta).$$

Дважды интегрируя уравнение (9) в пределах $[r_0,r]$ получаем эквивалентное спектральному уравнению (9) интегральное уравнение

$$v_k(r)=\lambda_k\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int\limits_{r_0}^{r}g^{n-3}(z)\,v_k(z)\,dz+\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(r)}\int\limits_{r_0}^{r}g^{n-1}(z)\,p_k(z)\,dz+$$

$$+g^{n-1}(r_0)\,v_k'(r_0)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}+v_k(r_0)\,. \tag{10}$$

При $k=0$, учитывая $\lambda_0=0$, получаем

$$v_0(r)=\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int\limits_{r_0}^{t}p_0(z)g^{n-1}(z)dz+v_0'(r_0)g^{n-1}(r_0)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}+v_0(r_0). \tag{11}$$

В обоих случаях $v_k(r)$ также удовлетворяет краевым условиям $v_k(r_0)=0$, $\lim\limits_{r\to\infty}v_k(r)=0$.

В указанной работе так же были получены следующие оценки коэффициентов $p_k(r)$ и решений неоднородного спектрального уравнения (9)

$$|p_0(r)|\le\frac{1}{\sqrt{|\,S\,|}}\varphi_0(r),\qquad |p_k(r)|\le\frac{\varphi_{m_1}(r)}{\lambda_k^{m_1}},\qquad |v_k(r)|\le\frac{h_{m_1}(r_0)}{\lambda_k^{m_1}}. \tag{12}$$

Тогда имеем

$$|u_2(r,\theta)|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}v_k(r)\omega_k(\theta)\right|=\left|v_0(r)\omega_0(\theta)+\sum_{k=1}^{\infty}v_k(r)\omega_k(\theta)\right|\le$$

$$\le|v_0(r)\omega_0(\theta)|+\left|\sum_{k=1}^{\infty}v_k(r)\omega_k(\theta)\right|\le|v_0(r)|\,|\omega_0(\theta)|+\sum_{k=1}^{\infty}|v_k(r)|\,|\omega_k(\theta)|\,.$$

Оценим каждое слагаемое в последнем выражении. Учитывая, что $\omega_0(\theta)=\frac{1}{\sqrt{|S|}}$, краевые условия и (11) для первого слагаемого имеем

$$|v_0(r)|\,|\omega_0(\theta)|\le\frac{1}{\sqrt{|\,S\,|}}\left|\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int\limits_{r_0}^{t}p_0(z)g^{n-1}(z)dz+v_0'(r_0)g^{n-1}(r_1)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{|\,S\,|}}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int\limits_{r_0}^{t}|p_0(z)|\,g^{n-1}(z)dz+\frac{\left|v_0'(r_0)\right|}{\sqrt{|\,S\,|}}g^{n-1}(r_0)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}.$$

Учитывая оценку (12), получаем

$$|v_0(r)|\,|\omega_0(\theta)|\le\frac{1}{|\,S\,|}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int\limits_{r_0}^{t}\varphi_0(z)g^{n-1}(z)dz+\frac{\left|v_0'(r_0)\right|}{\sqrt{|\,S\,|}}g^{n-1}(r_0)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\le$$

$$\leq Q_1 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \varphi_0(z) g^{n-1}(z)dz + Q_2 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)}.$$

Каждое слагаемое в отдельности не превосходит $Q_i h_{m_1}(r)$, из этого следует оценка

$$|v_0(r)|\,|\omega_0(\theta)| \leq Q h_{m_1}(r),$$

где константа Q зависит от компакта S, а также от краевых условий задачи.

Аналогично оценим $v_k(r)$ с учетом (10)

$$|v_k(r)| = \left|\lambda_k \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} v_k(z) g^{n-3}(z)dz + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} p_k(z) g^{n-1}(z)dz + \right.$$

$$\left. + v_k'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \right| \leq \lambda_k \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} |v_k(z)|\, g^{n-3}(z)dz +$$

$$+ \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} |p_k(z)|\, g^{n-1}(z)dz + \left|v_k'(r_0)\right| g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)}.$$

Применяя вторую оценку в (12), получаем

$$|v_k(r)| \leq \lambda_k \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} |v_k(z)|\, g^{n-3}(z)dz +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_k^{m_1}} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \varphi_{m_1}(z) g^{n-1}(z)dz + \left|v_k'(r_0)\right| g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)}.$$

Учитывая вышеизложенное и оценки собственных чисел и функций оператора Лапласа, как и выше, оценим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r)|\, |\omega_k(\theta)| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} |v_k(z)|\, g^{n-3}(z)dz + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_k^{m_1}} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \varphi_{m_1}(z) g^{n-1}(z)dz + \left|v_k'(r_0)\right| g^{n-1}(r_0) \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \right) k^{\frac{n-2}{2(n-1)}}.$$

Далее подставляем третью оценку из (12), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r)|\, |\omega_k(\theta)| \leq C \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} g^{n-3}(z)dz \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{1}{\lambda_k^{m_1}} k^{\frac{n-2}{2(n-1)}} +$$

(13)

$$+ C \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \varphi_{m_1}(z) g^{n-1}(z)dz \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{m_1}} k^{\frac{n-2}{2(n-1)}} + C \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{n-2}{2(n-1)}} \left|v_k'(r_0)\right|.$$

Как и выше находим оценку $|v_k^{'}(r)| \le \frac{C^*}{\left(k^{\frac{2}{n-1}}\right)^{m_1}}$ для решений неоднородного спектрального уравнения, и из (13) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r)|\,|\omega_k(\theta)| \le C_1 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} g^{n-3}(z)dz \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{m_1-1}} k^{\frac{n-2}{2(n-1)}} +$$

$$+C_2 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \varphi_{m_1}(z) g^{n-1}(z)dz \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{m_1}} k^{\frac{n-2}{2(n-1)}} + C_3 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{2m_1}{n-1}} k^{\frac{n-2}{2(n-1)}}.$$

Докажем сходимость каждого ряда в правой части последнего неравенства. Оценим ряд из первого слагаемого. С учетом того, что $m_1 = \left[\frac{3n}{4}\right] + 1$, получаем сходимость этого ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{m_1-1}} k^{\frac{n-2}{2(n-1)}} \le C \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{2-2m_1}{n-1}} k^{\frac{n-2}{2(n-1)}} = C \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{n-4m_1+2}{2(n-1)}} < \infty.$$

Аналогично доказывается сходимость остальных рядов в правой части неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{m_1}} k^{\frac{n-2}{2(n-1)}} \le C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{2m_1}{n-1}} k^{\frac{n-2}{2(n-1)}} = C \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{n-4m_1-2}{2(n-1)}} < \infty.$$

С учетом сходимости рядов и определения интеграла $h_{m_1}(r)$ получаем справедливость оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r)|\,|\omega_k(\theta)| \le C_1^* \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} g^{n-3}(z)dz + C_2^* \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \varphi_m(z) g^{n-1}(z)dz +$$

$$+C_3^* \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \le (C_1^* + C_2^* + C_3^*) h_{m_1}(r).$$

Объединяя последнее неравенство с оценкой первого слагаемого в разложении для функции $u_2(r,\theta)$, получаем

$$|u_2(r,\theta)| \le |v_0(r)\omega_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r)|\,|\omega_k(\theta)| \le Q^* h_{m_1}(r)$$

для всех (r,θ) при $r > r_0$, где $Q^* > 0$ — некоторая константа, не зависящая не зависит от (r,θ).

Докажем теперь основное утверждение

$$|u(r,\theta) - \Phi(\theta)| = |u_1(r,\theta) + u_2(r,\theta) - \Phi(\theta)| \le |u_1(r,\theta) - \Phi(\theta)| + |u_2(r,\theta)| \le$$

$$\le (C^{**} + Q^*) h_{m_1}(r) \le C h_{m_1}(r)$$

для всех (r,θ) при $r > r_0$, где $C > 0$ — некоторая константа, не зависящая от (r,θ). Теорема доказана. □

4. Асимптотическое поведение решений задачи Дирихле на модельном многообразии

В данном разделе будет показана возможность продолжения решения внешней краевой задачи для уравнения Пуассона в области D на все модельное многообразие с сохранением асимптотического неравенства. Сформулируем основной результат.

Теорема 3. *Пусть риманово многообразие M_g и правая часть уравнения Пуассона f таковы, что $h_{m_1}(r_0) < \infty$. Тогда для любой функций $\Phi(\theta) \in C^{2m_1}(S)$ на M_g существует единственное решение $u(x)$ уравнения Пуассона такое, что на D выполнено*

$$|u(r,\theta) - \Phi(\theta)| \leq Ch_{m_1}(r)$$

для любых (r,θ) при $r > r_0$, где константа $C > 0$ не зависит от (r,θ).

Доказательство. Путь u_0 — решение внешней краевой задачи (3), существование которого в условиях данной теоремы показано в теореме 2. Более того, u_0 на D удовлетворяет асимптотическому неравенству

$$|u_0(r,\theta) - \Phi(\theta)| \leq C^* h_{m_1}(r)$$

для всех (r,θ) при $r > r_0$, где константа $C^* > 0$ не зависит от (r,θ).

Далее рассмотрим функцию $U = u_0 \cdot \phi$, где ϕ – гладкая функция на M_g такая, что $\phi = 0$ на предкомпактном множестве $B' \subset B$ и $\phi = 1$ вне $\overline{B}$. Тогда $U \in C^{2m_1}(M_g)$ и $\Delta U = \Delta(u_0 \cdot \phi) = f^*$, где $f^* \in C^{0,\alpha}(M_g)$, $f^*(x) = 0$ на B', $f^*(x) = f(x)$ вне $\overline{B}$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольное гладкое исчерпание многообразия M_g, т.е. последовательность предкомпактных открытых непустых подмножеств $B_k \subset M_g$ таких, что $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$, $M_g = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, ∂B_k — гладкие границы и $\overline{B} \subset B_k$ для всех k.

Построим последовательность функций ϕ_k решение задачи

$$\Delta\phi_k = f, \quad \text{в} \quad B_k \qquad \phi_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$$

и последовательность функций $\psi_k = \phi_k - U$. Для этих функций мы имеем:

$$\Delta\psi_k = f - f^* \quad \text{в} \quad B_k, \qquad \psi_k|_{\partial B_k} = 0.$$

На каждом множестве B_k существует функция Грина, т.е функция $G_k(x,y)$ такая, что

$$\Delta_x G_k(x,y) = -\delta_y(x), \quad G_k|_{x \in \partial B_k} = 0$$

для любого $y \in B_k$, где $\delta_y(x)$ — δ-функция Дирака. Поэтому, по формуле Грина в B_k, имеем

$$\psi_k(x) = -\int_{B_k} G_k(x,y)(f(y) - f^*(y))dy.$$

Из условия сходимости интеграла $h_{m_1}(r_0)$ многообразие M_g является непараболическим. В качестве нетривиального емкостного потенциала предкомпакта B можно использовать функцию $v(r) = \frac{q(r)}{q(r_0)}$. Непараболичность многообразия M_g влечет существование конечной функции Грина $G(x,y) = \lim_{k\to\infty} G_k(x,y)$ на всем M_g.

Существование функций Грина влечет существование предела последовательности $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $\psi = \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k$, тогда $\Delta\psi = f - f^*$ на M_g (см. также [9]). Покажем, что ψ удовлетворяет асимптотическому неравенству

$$|\psi(r,\theta)| \leq C_3 h_{m_1}(r)$$

для всех (r,θ) при $r > r_0$, где константа $C_3 > 0$ не зависит от (r,θ).

В силу непрерывности функции $\psi(x)$ существует

$$U = \max_{\partial B} |\psi(x)|.$$

Очевидно выполнены неравенства

$$-(U+1) \leq \psi|_{\partial B} \leq U+1 \qquad \text{и} \qquad -(U+1) \leq \psi_k|_{\partial B} \leq U+1$$

для любого достаточно большого k.

Рассмотрим функции $\underline{u} = -(U+1)\cdot \upsilon$ и $\overline{u} = (U+1)\cdot\upsilon$ на $M_g \backslash B$, где $\upsilon = \frac{q(r)}{q(r_0)}$ — емкостный потенциал предкомпактного множества B, причем выполнено $\upsilon(r) \leq C_0 h_{m_1}(r)$ для всех $r > r_0$, где $C_0 > 0$ некоторая константа. Функции $\underline{u}$ и $\overline{u}$ являются решениями уравнения $\Delta u = 0$ на D и удовлетворяют условиям

$$\underline{u}|_{\partial B} = -(U+1), \quad -(U+1) \leq \underline{u} \leq 0, \quad |\underline{u}| \leq C_1 h_{m_1}(r),$$
$$\overline{u}|_{\partial B} = (U+1), \quad 0 \leq \overline{u} \leq (U+1), \quad |\overline{u}| \leq C_2 h_{m_1}(r).$$

Тогда $\underline{u} \leq \overline{u}$ на $M\backslash B$ и, по принципу сравнения для гармонических функций, мы имеем

$$\underline{u} \leq \psi_k \leq \overline{u}$$

на $B_k \backslash B$ для любого k. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим $\underline{u} \leq \psi \leq \overline{u}$. Учитывая выполнение асимптотических неравенств для функций $\underline{u}$ и $\overline{u}$ получаем $|\psi| \leq C_3 h_{m_1}(r)$.

Из существования функции $\psi = \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k$ следует существование предельной функции

$$u = \lim_{k\to\infty} \phi_k = \lim_{k\to\infty} (\psi_k + U) = \psi + U.$$

Причем $\Delta u = \Delta\psi + \Delta U = f - f^* + f^* = f$ на M_g и на D выполнено асимптотическое неравенство

$$|u(r,\theta) - \Phi(\theta)| = |\psi + U - \Phi| = |\psi + u_0 - \Phi| \leq |\psi| + |u_0 - \Phi| \leq$$
$$\leq C_3 h_{m_1}(r) + C^* h_{m_1}(r) = C h_{m_1}(r)$$

для всех (r,θ) при $r > r_0$, где $C > 0$ некоторая константа, не зависящая от (r,θ). Теорема доказана. □

References

[1] L.V. Ahlfors, *Sur le type d'une surface de Riemann*, C.R. Acad. Sci. Paris, **201** (1935), 30-32.

[2] R. Nevanlinna, *Ein Satz über offene Riemannsche Flächen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Part A., **54** (1940), 1-18.

[3] A. Grigor'yan, *Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **36**:2 (1999), 135-249.

[4] S.Y. Cheng, S.T. Yau, *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure and Appl. Math., **28**:3 (1975), 333-354.

[5] V. M. Kesel'man, *The concept and criteria of the capacitive type of the non-compact Riemannian manifold based on the Generalized capacity*, Mathematical physics and computer simulation, **22**:2 (2019), 21–32 [in Russian].

[6] A.G. Losev, *On the hyperbolicity criterion for noncompact Riemannian manifolds of special type*, Math. Notes, 59:4 (1996), 400–404.
[7] T. Lyons, D. Sullivan, *Function theory, random path and covering spaces*, J. Diff. Geom., **19** (1984), 299-323.
[8] A. A. Grigor'yan, *On Liouville theorems for harmonic functions with finite Dirichlet integral*, Math. USSR-Sb., **60**:2 (1988), 485–504.
[9] A.G. Losev, *Some Liouville theorems on Riemannian manifolds of a special type*, Soviet Math. (Iz. VUZ), **35**:12 (1991), 15–23.
[10] P.Li, R.Schoen, L^p *and mean value properties of subharmonic functions on Riemannian manifolds*, Acta Math., **153**:3-4 (1984), 279-300.
[11] M. Murata, *Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds*, Potential Theory (Proc. Intern. Conf. Nagoya/Japan, 1990) 1992.
[12] S.T. Yau, *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications*, Comm. Pure and Appl. Math., **28**:3 (1975), 333-354.
[13] A.G. Losev, E.A. Mazepa, *On the asimptotic property of solutions of ellepitic equation on noncompact Riemannian manifolds*, Russian Math. (Iz. VUZ), 43:6 (1999), 39–47.
[14] S.A.Korolkov, A.G.Losev, *Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends*, Mathematische Zeitshrift, **272**:1-2 (2012), 459-472.
[15] C.-J. Sung, L.-F.Tam, J.Wang, *Spaces of harmonic functions*, J. London Math. Soc., **3** (2000), 789-806.
[16] M. T. Anderson, *The Dirichlet problem at innity for manifolds of negative curvature*, J. Diff. Geom., **18** (1983), 701-721.
[17] D. Sullivan, *The Dirichlet problem at innity for a negatively curved manifold*, J. Diff. Geom., **18** (1983), 723-732.
[18] A. Losev, E. Mazepa, I. Romanova, *Eigenfunctions of the Laplace operator and harmonic functions on model Riemannian manifolds*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **41**:11 (2020), 2190-2197.
[19] A.G. Losev, *Solvability of the Dirichlet problem for the Poisson equation on some noncompact Riemannian manifolds*, Differ. Equ., **53**:12 (2017), 1595-1604.
[20] P. Mastrolia, D.D. Monticelli, F. Punzo, *Elliptic and parabolic equations with Dirichlet conditions at infinity on Riemannian manifolds*, Adv. Differential Equations, **23**:1/2 (2018), 89-108.
[21] O. Munteanu, N. Sesum, *The Poisson equation on complete manifolds with positive spectrum and applications*, Adv. in Math. **223** (2010), 198-219.
[22] A.K. Gushchin, *A strengthening of the interior Hölder continuity property for solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation*, Theoret. and Math. Phys., **157**:3 (2008), 1655–1670.
[23] E.M. Landis, *Second-order equations of elliptic and parabolic types*, Moscow: Nauka, 1971 [in Russian].
[24] D. Grieser, *Uniform bounds for eigenfunctions of the Laplacian on manifolds with boundary*, Commun. partial diff. eqns., **27** (2002), 1283-1299.

Losev Alexander Georgievoch, Mazepa Elena Alexeevna
Volgograd State Univercity,
pr. Universitetsky, 100,
400062, Volgograd, Russia
E-mail address: alexander.losev@volsu.ru,elena.mazepa@volsu.ru