Повторная рецензия на статью Л.С. Казарина и В.Н. Тютянова «О центрах графов разрешимости»

В новой версии авторы учли все замечания прошлой рецензии, в том числе усилили теорему 1, точно описав центры графов разрешимости групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$. Однако к новой версии также есть замечания.

Принципиальных замечаний два.

1. В формулировке теоремы 1 утверждается, что центр графа разрешимости пуст, если $G = {}^2E_6(q)$ и $q = 1 + 3t$, где $(t, 3) = 1$. Это неверно, поскольку в этом случае центр содержит 3.

Действительно, пусть $G = {}^2E_6(q)$ и q не является степенью числа 3. Как указывают авторы, в G есть подгруппа вида $L_2(q) \times U_6(q)$, поэтому 3 смежна со всеми числами из $\pi(G)$, кроме делителей чисел $q^4 + 1$, $q^4 - q^2 + 1$ и $q^6 - q^3 + 1$. Кроме того, есть максимальный тор T_0 порядка $(q^6 - q^3 + 1)/(3, q + 1)$, в нормализаторе которого есть элемент порядка 3. Также, как следует из [5, таблица 5.1], в G есть подгруппа вида ${}^3D_4(q).3$. Таким образом, при любом q вершина 3 смежна с делителями чисел $q^6 - q^3 + 1$ и $q^4 - q^2 + 1$. Наличие максимального тора порядка $(q^4 + 1)(q^2 - 1)/(3, q + 1)$ показывает, что вершина 3 смежна и с делителями числа $q^4 + 1$ во всех случаях, кроме случая, когда $q = -1 + 3t$, где $(t, 3) = 1$.

2. Пусть $G = E_6(q)$ и T — максимальный тор, порядка $(q^6 + q^3 + 1)/(3, q - 1)$. У меня вызывает вопросы следующее рассуждение на стр. 6: “Порядок T взаимно прост с порядком группы Вейля группы G. Отсюда в G нет бипримарных $\{r, s\}$ подгрупп, где $r \in \pi(q^j - 1)$ для $j \in \{2, 3, 5, 6, 8\}$, а $s \in \pi(T)$.”

Предположим, что K — $\{r, s\}$-подгруппа группы G для указанных r и s. Если либо $O_s(K) \neq 1$, либо $O_r(K) \neq 1$ и $j = 5, 8$, то действительно можно использовать использовать рассуждение, предложеное авторами: поскольку централизатор любой s-подгруппы (или r-подгруппы соотвественно) совпадает с T (с некоторым максимальным тором T_1), этот тор T нормален в $N_G(O_s(K))$ (или T_1 нормален в $N_G(O_r(K))$), поэтому $K \leq N_G(T)$ и r делит $|N_G(T)/C_G(T)| = 3$ (или $K \leq N_G(T_1)$ и s делит $|N_G(T_1)/C_G(T_1)|$, а значит, s делит порядок группы Вейля); в любом случае, получается противоречие.

Однако, если $j = 2, 3, 6$, то централизатор r-подгруппы не обязан быть максимальным тором, поэтому непонятно, как прийти к противоречию в случае, когда $O_s(K) = 1$ и $j = 2, 3, 6$. Также непонятно, как доказывается, что вершина $r \in \pi(q-1)$, $r \neq 3$, не смежна с $s \in \pi(T)$.

Аналогичным образом, если $G = {}^2E_6(q)$ и T_0 — максимальный тор порядка $(q^6 - q^3 + 1)/(3, q + 1)$, то непонятно обоснование рассуждения “Отсюда следует, что центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ либо состоит из вершины 3, либо содержит вершину $r \in \pi(T_0)$, либо пуст”. Другими словами, непонятно, почему любая вершина, смежная со всеми числами из $\pi(T_0)$, — это либо 3, либо $r \in \pi(T_0)$.

С другой стороны, то, что указанных бипримарных подгрупп действительно не существует, следует из списков максимальных подгрупп групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$, содержащихся в “The Maximal Subgroups of the Exceptional Groups $F_4(q)$, $E_6(q)$ and ${}^2E_6(q)$ and Related Almost Simple Groups” by David A. Craven, arXiv.2103.04869v2.

Также есть несколько не столь существенных замечаний. Два наиболее объемных замечания приведены ниже, остальные содержатся в прилагаемом аннотированном pdf-файле.

3. Пусть $G = {}^2E_6(2)$ и $d = (3, q+1)$. На стр. 6 написано, что согласно [5, таблица 5.1] в G есть подгруппа $U_3(q^3).(3 \times d)$. Однако в [5, таблица 5.1] указаны подгруппы группы $\operatorname{Inndiag} G = {}^2E_6(q).(3, q+1)$, поэтому вместо $U_3(q^3).(3 \times d)$ должно быть $U_3(q^3).3$. Аналогично, на стр. 7 должно быть $e.(L_2(q) \times U_6(q)).e$ вместо $e.(L_2(q) \times U_6(q)).de$. В работе [7] указаны подгруппы универсальной группы $(3, q+1).{}^2E_6(q)$, поэтому на стр. 7 вместо $L_4 \simeq {}^2D_4(q^2) : (q^2 - 1)$, должно быть $L_4 \simeq {}^2D_4(q^2) : ((q^2 - 1)/d)$.

То, что указанные подгруппы имеют такое строение видно, например, из упомянутой выше статьи Д. Крейвена.

4. На стр. 6 написано, что “всякая абелева p'-подгруппа группы $G = E_6(q)$ содержится в некотором максимальном торе группы G.” В общем случае не всякая абелева p'-подгруппа содержится в максимальном торе группы лиева типа.

Считаю, что статья может быть опубликована после того, как авторы внесут изменения в соответствии с замечаниями.

11 октября 2021 г. Рецензент