Замечания к статье Л.С. Казарина и В.Н. Тютянова
«О центрах графов разрешимости»

Принципиальные замечания:

1. По словам авторов, главная цель статьи — описание центров разрешимости простых спорадических групп и простых исключительных групп лиева типа. Однако теорема 1 дает описание центра только для групп Сузуки, Ри и ${}^3D_4(q)$. Более того, для групп типа E_6 не всегда даже известно, пуст центр или нет. Таким образом, результат теоремы 1 не соответствует заявленной цели.

2. В пункте 8 теоремы 1 вместо «$Z(\Gamma_{sol}(G)) \in \{3, 0\}$» должно быть «$3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ при $(q-1)_3 \neq 3$», поскольку именно это доказано далее. Аналогично для пункта 9.

3. Доказательство теоремы 1, случай $G = {}^2B_2(q)$: из существования указанных разрешимых подгрупп следует, что $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$, но не следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$. То же самое замечание относится к группам ${}^2G_2(q)$.

4. Аналогичным образом, в случае $G = {}^3D_4(q)$ из пункта (13) в [7, теорема 4.3] следует только, то что делители числа $q^4 - q^2 + 1$ смежны с 2. Возможно, авторы имели в виду, что единственная максимальная подгруппа группы G, порядок которой делится на примитивные простые делители числа $q^4 - q^2 + 1$, это группа, указанная в пункте (13).

5. Точно так же из пунктов (8)–(10) в [7, теорема 4.5] не следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) \subseteq \{2, 3\}$ для $G = {}^2F_4(q)$. Кроме того, поскольку $q = 2^{2n+1}$, число $q+1$ всегда делится на 3, поэтому не надо рассматривать случай, когда 3 делит $q - 1$. Более того, $q^2 - q + 1$ делится на 3, поэтому нет необходимости в подгруппе вида $(q^2 - q + 1) : 3$ в $SU_3(q)$.

6. Не вполне понятен вывод о том, что при $G = E_6(q)$, где $(q-1)_3 = 3$, число 3 не содержится в $Z(\Gamma_{sol}(G))$ (стр. 5, строки 19–20). Показано, что в нормализаторе тора T_4 нет элементов порядка 3, но почему отсюда следует, что нет разрешимой группы, порядок которой делится на $(q^4+1)/2$ (допустим, что простое число) и на 3, непонятно. Таким образом, в данном пункте доказано только то, что $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ при $(q-1)_3 \neq 3$ и что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \varnothing$ при $q = 4, 7$.

7. Из сильной изолированности тора порядка $(q^6 - q^3 + 1)/(3, q+1)$ группы ${}^2E_6(q)$ следует, что нормализатор любой циклической подгруппы это тора равен нормализатору всего тора, но непонятно, как отсюда следует, что делители числа $(q^6 - q^3 + 1)/(3, q+1)$ несмежны с 3, поскольку нет объяснения того, почему элемент соответствующего порядка не может действовать на 3-группе.

8. Доказательство теоремы 2, случай $G = M_{11}$: зачем указывать, что в G есть максимальные подгруппы некоторого вида при доказательстве того, что центра граф пуст? Возможно, имелось в виду следующее: единственная максимальная разрешимая подгруппа, порядок которой делится на 11, — это подгруппа порядка 55, поэтому 11 смежно смежно только с 5. Далее следует объяснить, почему 5 не центральная вершина. Это же замечание касается всех случаев теоремы 2 (например, для при $G = J_1$ из того, что в G есть максимальные подгруппы 19:6 и 11:10, не следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) \subseteq \{2\}$).

Дополнительные замечания:

9. Нет ссылки для утверждения, что граф разрешимости простой группы всегда связен.

10. В терминологии теории графов центр графа — это множество вершин минимального эксцентриситета (эксцентриситет вершины — макисимальное расстояние

до дргуих вершин), и поэтому центр не может быть пуст. То, что авторы называют центром (графа разрешимости), — это множество вершин эксцентриситета 1.

11. Теоремы 1 и 2 можно было бы привести к единообразному виду, например, так: «1) $Z(\Gamma_{sol}(G))$ состоит из вершины 2 для $G = {}^2B_2(q), {}^3D_4(q)$.»

12. Непонятно, зачем второй раз записывать разложение порядка группы G в строках 18 и 29 на стр. 3.

13. Не вполне корректно писать «смежны с вершинами из множеств $q+1$, $q\pm\sqrt{q}+1$ $\ldots$» (стр. 3, строки 32–33) и «смежна с вершинами $\pi(q^8-1)\ldots$» (стр. 4, строки 20–21).

14. Ссылаясь в п. 6 доказательства теоремы 1 на [1, таблица 7], авторы пользуются утверждением, что $|N_G(T) : T|$ делится на порядок централизатора соответствующего элемента группы Вейля. В группе Вейля типа G_2 есть центральный элемент порядка 2 (-id), поэтому ссылка на [1, таблица 7] избыточна. То же самое касается случаев, когда $G = F_4(q), E_7(q), E_8(q)$.

15. Доказательство теоремы 1, случай $G = E_6(7)$: почему единственной разрешимой подгруппой группы G, порядок которой делится на $|T|$, является $N_G(T)$? Кроме того, к тому, что 3 не делит $|N_G(T_1)|$ (об этом уже говорилось в общем случае), возможно, следует добавить, что нечетный делитель числа 7^4+1 не может действовать как дополнение Фробениуса на 3-группе внутри G, так как у G слишком маленькая силовская 3-подгруппа.

16. Непонятно, почему порядки торов группы ${}^2E_6(q)$ взяты из [5], а не из первоисточника — статьи Деризиотиса и Факиоласа.

17. В конце абзаца про ${}^2E_6(2)$ надо написать, что центр графа не содержит 3, вместо «отличен от 3».

18. Формулировка леммы 2: насколько я понимаю, там должно быть написано «Если $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$, то $q = 31, 127$.»

19. Доказательство леммы 2: то, что у $(p-1)/2$ есть три различных простых делителя для $p = 2^r - 1 > 127$, следует просто из теоремы Жигмонди и не очень связано с порядком подгруппы Бореля группы $PSL_2(q)$.

Считаю, что результаты статьи в целом интересны и могут быть опубликованы, но текущая версия статьи требует серьезной доработки.

Рецензент