

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том xx, стр. 1-12 (2014)

УДК 512.54
MSC 20D20

О ЦЕНТРАХ ГРАФОВ РАЗРЕШИМОСТИ

Л.С. КАЗАРИН, В.Н. ТЮТЯНОВ

ABSTRACT. Let G be a finite group and $V = \pi(G)$ be the set of all prime divisors of its order. The soluble graph $\Gamma_{sol}(G)$ is a graph with the set of vertices V , where two vertices p and q in V are adjacent if there exists a soluble subgroup H of G whose order is divisible by pq . We study centers of soluble graphs of finite sporadic and exceptional simple groups Lie types.

Keywords: finite group, π -subgroup, exceptional simple group of Lie type, sporadic simple group, soluble graph.

1. ВВЕДЕНИЕ

Граф разрешимости (разрешимый граф) $\Gamma_{sol}(G)$ конечной группы G – это обыкновенный граф, вершинами которого являются простые делители $\pi(G)$ ее порядка. При этом две вершины $p, q \in \pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда в G найдется разрешимая подгруппа, порядок которой делится на pq .

Понятие графа разрешимости было введено С. Абе и Н. Йиори [3] как обобщение понятия графа Грюнберга-Кегеля. Легко видеть, что граф Грюнберга-Кегеля $\Gamma(G)$ группы G является подграфом графа $\Gamma_{sol}(G)$ с тем же множеством вершин, но при этом граф разрешимости конечной простой группы G всегда связан.

Центром графа разрешимости $Z(\Gamma_{sol}(G))$ группы G называется множество вершин, смежных со всеми вершинами $\Gamma_{sol}(G)$. Если группа G разрешима, то граф $\Gamma_{sol}(G)$ является кликой (полным графом). У спорадической простой группы центр графа разрешимости часто бывает пуст. Напротив, число элементов центра графа разрешимости знакопеременной группы степени n для большого n при специальном выборе n может быть велико.

KAZARIN, L.S., TUTANOV V.N. ON CENTERS OF SOLUBLE GRAPHS.

© 2015 Казарин Л.С., Тютянов В.Н..

Поступила 5 февраля 2015 г., опубликована 31 декабря 2014 г.

Участники XIII Школы-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова, проходившей 3-7 августа 2020 г. в Екатеринбурге, представили ряд открытых проблем. Данные проблемы были опубликованы в [2]. В частности, Л.С. Казарин в проблеме 7 поставил следующий вопрос: описать конечные группы G лиева типа, у которых центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ не пуст.

Главная цель работы — описание центров графов разрешимости sporadических простых групп и исключительных простых групп лиева типа.

2. ГЛАВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Принятые обозначения, в основном, стандартны. В случае работы со sporadическими простыми группами мы следуем обозначениям [4].

Теорема 1. Пусть G — конечная простая исключительная группа лиева типа. Тогда:

1. $G \cong Sz(q)$ и $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.
2. $G \cong {}^2G_2(q)$ и $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.
3. $G \cong {}^3D_4(q)$ и $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.
4. $G \cong {}^2F_4(q)$, где $q > 2$ и $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.
5. $G \cong {}^2F_4(2)'$ и $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.
6. $G \cong G_2(q)$ и $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.
7. $G \cong F_4(q)$ и $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.
8. $G \cong E_6(q)$ и $Z(\Gamma_{sol}(G)) \in \{3, \emptyset\}$.
9. $G \cong {}^2E_6(q)$ и $Z(\Gamma_{sol}(G)) \in \{3, \emptyset\}$.
10. $G \cong E_7(q)$ и $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.
11. $G \cong E_8(q)$ и $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

Теорема 2. Пусть G является sporadической простой группой. Тогда:

1. Центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст для следующих групп: $G \cong M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_3, HS, McL, O'N, HN, Co_3, Co_2, BM, M$;
2. центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ состоит из вершины 2 для следующих групп: $G \cong J_1, J_4, Ly, He, Co_1, Suz, Ru, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}$.
3. центры графов $G \cong J_2$ и $G \cong Th$ состоят из вершин 2 и 3.

Центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ в случае $|\pi(G)| = 3$ всегда не пуст. Это немедленно следует из связности указанного графа. Список простых неабелевых конечных четырехпримарных групп состоит из 35 простых групп и трех серий таких групп (см. [6]). Среди четырехпримарных простых sporadических групп только у группы J_2 центр графа разрешимости не пуст и $|Z(\Gamma_{sol}(J_2))| = 2$. Поэтому представляется полезным перечислить все конечные простые четырехпримарные группы, имеющие центр, состоящий из двух вершин, т.е. аналоги для группы J_2 .

Теорема 3. Пусть G — конечная четырехпримарная простая группа, центр которой состоит из двух вершин. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: J_2 ; $S_6(2)$; A_8 ; A_9 ; A_{10} ; $O_8^+(2)$; $G_2(3)$; ${}^2F_4(2)'$, $L_2(31)$, $L_2(127)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

Рассмотрим все случаи для простых исключительных групп лиева типа.

1. $G \cong Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1}$ и $n \geq 1$.

В этом случае $|G| = q^2(q^2 + 1)(q - 1) = q^2(q - \sqrt{2q} + 1)(q + \sqrt{2q} + 1)(q - 1)$. Из [7, теорема 4.1] следует, что группа G содержит разрешимые подгруппы $(q - 1) : 2$, $(q - \sqrt{2q} + 1) : 4$ и $(q + \sqrt{2q} + 1) : 4$. Отсюда легко получаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ и $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$.

2. $G \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$ и $n \geq 1$.

В этом случае $|G| = q^3(q^3 + 1)(q - 1) = q^3(q - \sqrt{3q} + 1)(q + \sqrt{3q} + 1)(q - 1)(q + 1)$. Из [7, теорема 4.2] следует, что группа G содержит разрешимые подгруппы $[q^3] : (q - 1)$, $(q - \sqrt{3q} + 1) : 6$, $(q + \sqrt{3q} + 1) : 6$ и $(2^2 \times D_{(q+1)/2}) : 3$. Отсюда легко получаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$ и $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$.

3. $G \cong {}^3D_4(q)$.

В этом случае $|G| = q^{12}(q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1)$. Имеют место равенства. $q^8 + q^4 + 1 = (q^4 - q^2 + 1)(q^4 + q^2 + 1) = (q^4 - q^2 + 1)(q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1)$, $q^6 - 1 = (q^3 - 1)(q^3 + 1) = (q^2 + q + 1)(q^2 - q + 1)(q - 1)(q + 1)$ и $q^2 - 1 = (q - 1)(q + 1)$.

Таким образом, $|G| = q^{12}(q - 1)^2(q + 1)^2(q^2 - q + 1)^2(q^2 + q + 1)^2(q^4 - q^2 + 1)$.

Из представления $|G|$, пункта (13) [7, теорема 4.3] и простых арифметических вычислений следует, что только число 2 может содержаться в $Z(\Gamma_{sol}(G))$. Теперь из пунктов (2), (11), (12) [7, теорема 4.3] следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ и $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$.

4. $G \cong {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2n+1} \geq 8$.

В этом случае $|G| = q^{12}(q^6 + 1)(q^4 - 1)(q^3 + 1)(q - 1)$. Имеют место равенства. $q^3 + 1 = (q + 1)(q^2 - q + 1)$, $q^4 - 1 = (q^2 - 1)(q^2 + 1) = (q - 1)(q + 1)(q \pm \sqrt{2q} + 1)$, $q^6 + 1 = (q^2 + 1)(q^4 - q^2 + 1) = (q \pm \sqrt{2q} + 1)(q^4 - q^2 + 1) = (q \pm \sqrt{2q} + 1)(q^2 + q + 1 \pm \sqrt{2q}(q + 1))$.

Отсюда следует, что $|G| = (q - 1)^2(q + 1)^2(q \pm \sqrt{2q} + 1)^2(q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1 \pm \sqrt{2q}(q + 1))$. Из представления $|G|$ и пунктов (8), (9), (10) [7, теорема 4.5] следует, что только числа 2 и 3 могут содержаться в $Z(\Gamma_{sol}(G))$. Из этих же пунктов [7, теорема 4.5] следует, что числа 2 и 3 смежны с вершинами из множеств $q + 1$, $q \pm \sqrt{2q} + 1$ и $q^2 + q + 1 \pm \sqrt{2q}(q + 1)$.

Из пункта (1) [7, теорема 4.5] следует, что вершина 2 смежна с вершинами из множества $q - 1$. Если 3 делит $q + 1$, то из пункта (3) [7, теорема 4.5] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами из множества $q - 1$. Пусть 3 не делит $q + 1$. Тогда 3 делит $q - 1$ и вершина 3 смежна с вершинами множества $q - 1$. Следовательно, вершины 2 и 3 смежны с вершинами множества $q - 1$.

Пусть $(q + 1, 3) = 3$. Из пункта (3) [7, теорема 4.5] следует, что группа G содержит максимальную подгруппу $SU_3(q) : 2$. Однако группа $SU_3(q)$ содержит подгруппу $(q^2 - q + 1) : 3$, инвариантную относительно автоморфизма группы $SU_3(q)$ порядка 2. Таким образом, вершины 2 и 3 смежны с вершинами множества $q^2 - q + 1$.

Предположим, что $(q + 1, 3) = 1$. Тогда $PGU_3(q) \cong SU_3(q)$. Из пункта (4) [7, теорема 4.5] следует, что группа G содержит максимальную подгруппу $PGU_3(q) : 2$. Как и предыдущем пункте получаем, что вершины 2 и 3 смежны с вершинами множества $q^2 - q + 1$.

Итак, $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$ и $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$.

5. $G \cong {}^2F_4(2)'$.

Из [4, стр. 74] легко заключить, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$ и $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$.

6. $G \cong G_2(q)$, где $q = p^n > 2$.

В этом случае $|G| = q^6(q^2 - 1)(q^6 - 1) = q^6(q - 1)^2(q + 1)^2(q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1)$. Группа G содержит максимальные торы порядков $(q \pm 1)^2$, $(q^2 \pm q + 1)$, $q^2 - 1$. Отметим, что для любого $r \in \pi(G) \setminus \{p\}$ число r делит порядок некоторого из перечисленных торов. Из [1, таблица 7, стр. 48] следует, что для всякого тора T индекс $|N_G(T) : T|$ является четным числом. Таким образом, вершина 2 графа $\Gamma_{sol}(G)$ смежна со всеми вершинами из $\pi(G) \setminus \{p\}$. Поскольку порядок борелевской подгруппы в группе G равен $q^6(q - 1)^2$, то ясно что при всех значениях характеристики поля вершина 2 смежна с вершиной p . Поэтому $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

7. $G \cong F_4(q)$. Из [1, таблица 8, стр. 49] следует, что для всякого максимального тора T индекс $|N_G(T) : T|$ является четным числом. Отсюда легко заключить, что $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

8. $G \cong E_6(q)$, где $q = p^n$. тогда $|G| = (1/d)q^{36}(q^{12} - 1)(q^9 - 1)(q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 - 1)$ для $d = (q - 1, 3)$. Рассмотрим следующие случаи.

(а) $q = 3^n \geq 3$. В максимальных параболических подгруппах $q^{16} : (\Omega_{10}^+(q) \times (q - 1))$ и $q^{1+16} : (SL_6(q) \times (q - 1))$ дополнения Леви имеют композиционные факторы $\Omega_{10}^+(q)$ и $SL_6(q)$. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами $\pi((q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^4 - 1)(q^2 - 1)(q^5 - 1))$ и $\pi((q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)(q^5 - 1)(q^6 - 1))$. Из разложения $|G|$ легко заключить, что оставшиеся простые делители $|G|$ находятся в $\pi(q^6 + q^3 + 1)$ и $\pi(q^4 - q^2 + 1)$. Графу $\Gamma = E_6(a_1)$ из [1] соответствует максимальный тор $T = E_6(a_1)$ порядка $(1/d)(q^6 + q^3 + 1)$. Из [1, таблица 9, стр. 50] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi(q^6 + q^3 + 1)$. Графу $\Gamma = E_6$ из [1] соответствует максимальный тор T_1 порядка $(1/d)(q^4 - q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$. Из [1, таблица 9, стр. 50] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi((q^4 - q^2 + 1)(q^2 + q + 1))$. Таким образом, $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

(б) $q + 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Понятно, что $d = 1$. Покажем, что $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

Группа G содержит параболическую максимальную подгруппу $q^{5+20} : (SL_2(q) \times SL_5(q) \times (q - 1))$. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами $\pi((q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)(q^5 - 1))$. Имеют место равенства: $(q^8 - 1) = (q^4 - 1)(q^4 + 1)$, $q^9 - 1 = (q^3 - 1)(q^6 + q^3 + 1)$, $q^{12} - 1 = (q^6 - 1)(q^6 + 1)$. Рассмотрим следующие делители порядка группы G : $q^4 + 1$, $q^6 + q^3 + 1$, $q^3 + 1$, $q^4 - q^2 + 1$.

Графу $\Gamma = D_5$ в [1, таблица 9, стр. 50] соответствует максимальный тор T_1 порядка $(q^4 + 1)(q^2 - 1)$ и $|T_1|$ делится на 3. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами $\pi(q^4 + 1)$. Графу $\Gamma = E_6(a_1)$ из [1] соответствует максимальный тор T_2 порядка $q^6 + q^3 + 1$. Из [1, таблица 9, стр. 50] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi(T_2)$. Графу $\Gamma = D_4$ из [1] соответствует максимальный тор T_3 порядка $(q^3 + 1)(q + 1)(q - 1)^2$ и 3 делит $|T|$. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами $\pi(q^3 + 1)$. Графу $\Gamma = E_6$ соответствует максимальный тор T_4 порядка $(q^4 - q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$. Из [1, таблица 9, стр. 50] следует, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi(q^4 - q^2 + 1)$. Из представления $|G|$ заключаем, что $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

(с) $q - 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Пусть сначала $q - 1 \equiv 0 \pmod{9}$. Покажем, что $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. Группа G содержит параболические максимальные подгруппы $1/3q^{16} : (\Omega_{10}^+(q) \times (q - 1))$ и $1/3q^{20}(SL_6(q) \times (q - 1))$.

Так как $q - 1 \equiv 0 \pmod{9}$, то вершина 3 смежна с вершинами $\pi((q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)(q^5 - 1)(q^6 - 1))$ и $\pi(q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^4 - 1)(q^2 - 1)$. Достаточно показать, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi(q^6 + q^3 + 1)$ и $\pi(q^4 - q^2 + 1)$. Это делается точно также как в случае (b). Таким образом, $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

В случае $q - 1 = 3t$, где $(3, t) = 1$ имеются примеры групп, у которых $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$. Рассмотрим этот случай более подробно. Группа G содержит параболическую максимальную подгруппу $(1/3)q^{5+20} : (SL_2(q) \times SL_5(q) \times (q - 1))$. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами $\pi((q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)(q^5 - 1))$. Как и в случае (b) легко заключить, что оставшиеся простые делители $|G|$ находятся в $\pi((q^6 + q^3 + 1)/3)$, $\pi(q^3 + 1)$, $\pi(q^4 - q^2 + 1)$, $\pi(q^4 + 1)$.

Графу $\Gamma = E_6(a_1)$ из [1] соответствует максимальный тор T_1 порядка $(q^6 + q^3 + 1)/3$. Из [1, таблица 9, стр. 50] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi((q^6 + q^3 + 1)/3)$. Графу $\Gamma = D_4$ из [1] соответствует максимальный тор T_2 порядка $(q^3 + 1)(q + 1)(q - 1)^2/3$ и 3 делит $|T_2|$. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами $\pi(q^3 + 1)$. Графу $\Gamma = E_6$ соответствует максимальный тор T_3 порядка $(q^4 - q^2 + 1)(q^2 + q + 1)/3$. Из [1, таблица 9, стр. 50] следует, что $|N_G(T_3)/T_3| = 12$. Отсюда легко заключить, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi(T_3)$. Порядок тора T_4 , соответствующего графу D_5 из [1] равен $(q^4 + 1)(q^2 - 1)/3$ и не делится на 3. Из [1, таблица 9, стр. 50] следует, что $|N_G(T_4)/T_4| = 8$. Поэтому вершина 3 не содержится в $Z(\Gamma_{sol}(G))$.

Проиллюстрируем сказанное на следующих двух примерах.

Пусть $G \cong E_6(4)$. Тогда $|G| = 2^{72} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 73 \cdot 241 \cdot 257$

Покажем, что вершина 257 смежна только с вершинами 2 и 5. В группе G имеется максимальный тор T порядка $5 \cdot 257 = ((q^4 + 1)(q^2 - 1)/3)$. Пусть $L < G$ и $|L| = 257$. Так как $256 = 2^8$, то $\pi(|N_G(L) : L|) = \{2, 5\}$. Предположим, что $L < M$ — разрешимая группа. В силу сказанного можно считать, что $M = O_r(M) : L$ — группа Фробениуса для некоторого $r \in \pi(G)$. Ясно, что $r = 3$. В силу характеристичности подгруппы $\Omega_1(Z(O_3(M)))$ в M можно считать, что $O_3(M)$ элементарная абелева. Непосредственный подсчет показывает, что таких групп нет.

Покажем, что вершина 73 не смежна с вершиной 2. Тогда, очевидно, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$. В группе G имеется максимальный тор T порядка $19 \cdot 73 ((q^6 + q^3 + 1)/3)$. Пусть $L < G$ и $|L| = 73$. Так как порядки параболических подгрупп группы G не делятся на 73, то L не содержится в 2-локальных подгруппах. Пусть 2 делит $|N_G(L)|$. Так как $C_G(L) = T \triangleleft N_G(L)$, то 2 делит $|N_G(T)| = 19 \cdot 73 \cdot 3^2$, что невозможно.

Таким образом, $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$.

Пусть $G \cong E_6(7)$, где $|G| = (1/3) \cdot 7^{36}(7^{12} - 1)(7^9 - 1)(7^8 - 1)(7^6 - 1)(7^5 - 1)(7^2 - 1)$. Максимальный минизотропный тор T , отвечающий графу $E_6(a_1)$ из [1], имеет порядок, не делящийся на 3. Его нормализатор $N_G(T) = T : 9$ является группой Фробениуса с ядром T порядка $39331 = 37 \cdot 1063$ и дополнительным множителем порядка 9. Так как единственной максимальной разрешимой подгруппой группы G , порядок которой делится на $|T|$ является нормализатор T , а порядки остальных максимальных торов взаимно просты с $|T|$, что следует из взаимной простоты $|T|$ с $q^2 - 1, q^3 - 1, q^4 - 1, q^5 - 1, q^7 - 1, q^8 - 1, q^{12} - 1$ и минизотропности тора T , то получаем, что центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ для нашей группы

пуст. Действительно, нормализатор тора T_1 порядка $(q^4 + 1)(q^2 - 1)/3$, соответствующего графу D_5 из [1], имеет порядок, взаимно простой с $|T|$, причем $|N_G(T_1) : T_1| = 8$. Поэтому центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ для группы G пуст.

9. $G \cong {}^2E_6(q)$. Тогда $|G| = (1/d)q^{36}(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)$, где $d = (q + 1, 3)$. Для каждого максимального тора T группы G число $d|T|$ равно одному из следующих чисел [9]:

$(q + 1)^k \cdot (q - 1)^{6-k}$, $2 \leq k \leq 6$; $(q^k - (-1))^k \cdot (q^{6-k} - (-1)^{6-k})$, $1 \leq k \leq 5$;
 $(q^k - (-1)^k) \cdot (q + 1)^{6-k}$, $3 \leq k \leq 6$; $(q^3 + 1)(q^2 - 1)(q \pm 1)$; $(q^5 + 1) \cdot (q - 1)$; $(q^3 - 1)(q^2 \pm 1)(q + 1)$; $(q^4 + 1)(q^2 - 1)$; $(q^2 + 1)^2(q + 1)^2$; $(q^2 - q + 1)^3$; $(q^2 - q + 1)^2(q^2 - 1)$; $(q^4 - 1)(q - 1)^2$; $q^3 - 1)(q^2 - q + 1)(q - 1)$; $(q^4 - q^2 + 1)(q^2 - q + 1)$; $q^6 - q^3 + 1$; $(q^2 - q + 1)^2(q^2 + q + 1)$.

Более того, для каждого числа n из указанных выше существует тор T такой, что $d|T| = n$.

Сначала рассмотрим случай $q = 2$. Тогда $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ и $|G| = 2^{36} \cdot 3^9 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. При этом подгруппы порядков 13, 17 и 19 являются сильно изолированными в G . Тор T_1 порядка 19 имеет нормализатор порядка $19 \cdot 9$ и является минизотропным. Используя элементарные вычисления, легко убедиться, что центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст. В самом деле, максимальная разрешимая подгруппа группы G , содержащая тор T_1 , это нормализатор T_1 порядка $19 \cdot 9$. Отсюда следует, что либо центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ содержит вершину 3, либо пуст. Однако нормализатор тора T_2 порядка 17 имеет порядок $17 \cdot 8$. Так как в G нет разрешимых $\{p, 17\}$ -подгрупп для $p > 2$ и $p \neq 17$, то центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ отличен от 3. Следовательно, $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$.

Рассмотрим общий случай. Из [5, таблица 5.1] следует, что среди максимальных подгрупп группы $G \cong {}^2E_6(q)$ имеется $U_3(q^3) \cdot (3 \times e)$, где $e = (3, q + 1)$. А значит, имеется максимальный тор T_0 порядка $q^6 - q^3 + 1$, содержащийся в максимальном торе порядка $q^{12} + q^6 + 1$, соответствующего графу $E_6(a_1)$ из [1] группы $E_6(q^2)$. В силу сильной изолированности указанного тора в $E_6(q^2)$ получаем, что T_0 сильно изолирован в G . При этом максимальная разрешимая подгруппа G , содержащая T_0 , содержится в нормализаторе T_0 в G .

Отсюда следует, что центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ либо состоит из вершины 3, либо пуст. Согласно [5, таблица 5.1], группа G имеет подгруппу $d \cdot (L_2(q) \times U_6(q)) \cdot de$, где $d = (q - 1, 2)$, $e = (3, q + 1)$. Кроме того, имеется максимальный тор T_1 порядка $(q^5 + 1)(q + 1)$, для которого $|N_G(T_1) : T_1| = 10$. Если q — степень 3 или $q \equiv 1 \pmod{3}$, то $Z(\Gamma_{sol}(G)) \neq \emptyset$. При $q \equiv -1 \pmod{3}$ возможно, что $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. Однако при $q = 2$ было показано, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$.

10. $G \in \{E_7(q), E_8(q)\}$. Согласно [1, таблица 10, стр. 51 – 53] и [1, таблица 11, стр. 54 – 58], нормализатор каждого максимального тора указанных групп имеет четный порядок. Поэтому вершина 2 содержится в $Z(\Gamma_{sol}(G))$ для любой из двух, рассматриваемых групп.

Теорема 1 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

Имеется 26 спорадических простых групп. Мы найдем центры графа разрешимости для каждой из этих групп.

1. Группа $G \cong M_{11}$. Согласно [4, стр. 18], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка 55 и максимальную подгруппу $2.S_4$. Отсюда и

из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

2. Группа $G \cong M_{12}$. Согласно [4, стр. 33], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка 55 и максимальную подгруппу $A_4 \times S_3$. Отсюда и из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

3. Группа $G \cong M_{22}$. Согласно [4, стр. 39], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка 55 и максимальную подгруппу $2^3 : L_3(2)$. Отсюда и из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

4. Группа $G \cong M_{23}$. Согласно [4, стр. 71], группа G имеет разрешимую подгруппу порядка $23 \cdot 11$ и максимальную подгруппу A_8 . Отсюда и из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

5. Группа $G \cong M_{24}$. Согласно [4, стр. 96], группа G имеет максимальную подгруппу $23 : 11$ и максимальную подгруппу $2^4 : A_8$. Отсюда и из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

6. Группа $G \cong J_1$. Согласно [4, стр. 36], группа G имеет максимальные подгруппы $19 : 6$ и $11 : 10$. Кроме того, имеется максимальная подгруппа $2^3 : 7 : 3$. Отсюда следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

7. Группа $G \cong J_2$. Согласно [4, стр. 42], группа G имеет максимальную подгруппу $5^2 : D_{12}$ и максимальную подгруппу $L_3(2) : 2$. Отсюда следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.

8. Группа $G \cong J_3$. Согласно [4, стр. 82], группа G имеет максимальные разрешимые подгруппы порядков $19 \cdot 9$ и $17 \cdot 8$. Отсюда следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

9. Группа $G \cong J_4$. Согласно [4, стр. 190], группа G имеет максимальные разрешимые подгруппы $37 : 12$, $43 : 14$, $29 : 28$, $(23 : 11) : 2$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

10. Группа $G \cong HS$. Согласно [4, стр. 80], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка $11 \cdot 5$ и максимальную разрешимую подгруппу порядка $4^3 \cdot 3 \cdot 7$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

11. Группа $G \cong Suz$. Согласно [4, стр. 131], группа G имеет разрешимую подгруппу порядка $11 \cdot 10$ и максимальную подгруппу $J_2 : 2$. Кроме того, в G есть разрешимая подгруппа порядка $13 \cdot 2$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

12. Группа $G \cong McL$. Согласно [4, стр. 100], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу $11 : 5$ и максимальную подгруппу $5^3 : 3 : 8$. Группа G также содержит максимальную подгруппу $2^4 : A_7$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

13. Группа $G \cong Ru$. Согласно [4, стр. 126], группа G имеет максимальные разрешимые подгруппы порядков $29 \cdot 14$ и $13 \cdot 12$. Кроме того, группа G содержит

максимальную подгруппу $2^{11} : L_3(2)$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

14. Группа $G \cong He$. Согласно [4, стр. 104], группа G имеет максимальные подгруппы $5^2 : 4A_4$ и $7^3 : (S_3 \times 3)$. В группе G имеется максимальная подгруппа $S_4(4) : 2$, содержащая максимальную подгруппу порядка $17 \cdot 8$ ([4, стр. 44]). Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

15. Группа $G \cong Ly$. Согласно [4, стр. 174], группа G имеет максимальные подгруппы $37 : 18$ и $67 : 22$. Отсюда следует, что центр графа разрешимости группы G не может содержать других вершин, кроме вершины 2. В группе G имеется максимальная подгруппа $G_2(5)$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

16. Группа $G \cong O'N$. Согласно [4, стр. 132], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка $31 \cdot 15$ и максимальную подгруппу J_1 , рассмотренную в пункте 6. Отсюда легко заключить, что центр графа разрешимости группы G пуст.

17. Группа $G \cong Co_1$. Согласно [4, стр. 183], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка $7^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3$ и максимальную подгруппу $(A_5 \times J_2) : 2$. Поэтому имеется полный подграф графа $\Gamma_{sol}(G)$ на вершинах 2, 3, 5, 7. Наличие максимальной подгруппы $2^{11} : M_{24}$ показывает, что вершина 23 смежна с вершинами 2 и 11. В группе G имеется максимальная подгруппа $(A_4 \times G_2(4)) : 2$, содержащая подгруппу $(A_4 \times 13) : 2$. Поэтому вершина 13 смежна с вершинами 3 и 2. Из сказанного следует, $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

18. Группа $G \cong Co_2$. Согласно [4, стр. 154], группа G имеет максимальную подгруппу M_{23} , рассмотренную в пункте 4. Отсюда следует, что центр у графа разрешимости (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 11. Учитывая наличие в группе G максимальных подгрупп $HS : 2$ и McL , заключаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G))$ должен содержать вершину 2. Противоречие. Таким образом, центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст.

19. Группа $G \cong Co_3$. Согласно [4, стр. 134], группа G имеет максимальную подгруппу M_{23} , рассмотренную в пункте 4. Отсюда следует, что центр у графа разрешимости (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 11. Учитывая наличие в группе G максимальных подгрупп HS и $McL : 2$, заключаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G))$ должен содержать вершину 2. Противоречие. Следовательно, центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст.

20. Группа $G \cong Fi_{22}$. В этом случае $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Согласно [4, стр. 163], группа G имеет максимальную подгруппу $2^{10} : M_{22}$. Отсюда непосредственно следует, что центр у графа разрешимости группы G (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 2. Группа G содержит максимальную подгруппу ${}^2F_4(2)'$, имеющую подгруппу $L_3(3) : 2$. Поэтому $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

21. Группа $G \cong Fi_{23}$. Тогда $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23\}$. Согласно [4, стр. 177], группа G имеет максимальную подгруппу $2^{11} : M_{23}$. Отсюда заключаем, что центр у графа разрешимости группы G (если он не пуст) может состоять только из вершины 2. Из существования в группе G максимальной подгруппы $2.Fi_{22}$, заключаем, что центр графа разрешимости группы G $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

22. Группа $G \cong Fi'_{24}$. В этом случае $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29\}$. Согласно [4, стр. 207], группа G имеет максимальные подгруппы $2.Fi_{22}.2$, Fi_{23} и

29 · 14. Отсюда следует, что центр у графа разрешимости $\Gamma_{sol}(G)$ может состоять лишь из вершины 2. Из перечня других максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

23. Группа $G \cong HN$. Тогда $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 19\}$. Согласно [4, стр. 166], группа G имеет максимальную подгруппу $U_3(8) : 3$, порядок которой делится на 19. Других максимальных подгрупп порядка, делящегося на 19, в группе G нет. Отсюда следует, что центр у графа разрешимости группы G (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 3. Так как группа G имеет максимальную подгруппу $2 \cdot HS.2$, заключаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G))$ должен содержать вершину 2. Из перечня других максимальных подгрупп группы G следует, что центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст.

24. Группа $G \cong Th$. В этом случае $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 13, 19, 31\}$. Согласно [4, стр. 177], группа G имеет максимальную подгруппу $31 \cdot 15$. Учитывая также наличие максимальной подгруппы $L_2(19) : 2$, заключаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G))$ должен содержать вершину 3. Рассмотрев список других максимальных подгрупп G , получаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.

25. Группа $G \cong BM \cong F_2+$. В этом случае $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 47\}$. В [4, стр. 217] приведено полное описание максимальных p -локальных подгрупп группы G . В частности, группа G содержит максимальную подгруппу $47 : 23$ и порядок любой p -локальной подгруппы для $p \neq 47$ не делится на 47. Отсюда легко заключить, что центр у графа разрешимости группы G (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 23. С другой стороны, например, все 17-локальные подгруппы группы G имеют порядок, делящийся только на простые числа 17 и 2. Поэтому вершина 23 не смежна с вершиной 17. Отсюда получаем, что центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст.

26. Группа $G \cong M \cong F_1$. В этом случае $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71\}$. В [4, стр. 234] приведено описание всех максимальных p -локальных подгрупп группы G . Группа G содержит максимальную подгруппу $59 : 29$ и порядок всякой p -локальной подгруппы группы G для $p \neq 59$ не делится на 59. Отсюда легко следует, что центр у графа разрешимости группы G (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 29. С другой стороны, например, все 41-локальные подгруппы группы G имеют порядок, делящийся только на простые числа 41, 5, 2. Поэтому вершина 29 не смежна с вершиной 41. Отсюда получаем, что центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст.

Теорема 2 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.

Согласно [6, лемма 1.3] перечень четырехпримарных простых групп состоит из следующих групп: (1) $A_7, A_8, A_9, A_{10}, M_{11}, M_{12}, J_2, L_2(16), L_2(25), L_2(49), L_2(81), L_3(4), L_3(5), L_3(7), L_3(8), L_3(17), L_4(3), S_4(4), S_4(5), S_4(7), S_4(9), S_6(2), O_8^+(2), G_2(3), U_3(4), U_3(5), U_3(7), U_3(8), U_3(9), U_4(3), U_5(2), Sz(8), Sz(32), {}^3D_4(2), {}^2F_4(2)'$.

(2) $L_2(r)$, где r – простое число, $17 \neq r \geq 11, r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c, s > 3$ – простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1, либо 2 при $r \in \{97, 577\}$.

(3) $L_2(2^m)$, где $m, 2^m - 1$ и $(2^m + 1)/3$ – простые числа, большие 3.

(4) $L_2(3^m)$, где m и $(3^m - 1)/2$ нечетные простые числа, а $(3^m + 1)/4$ либо равно простому числу, либо 11^2 (при $m = 5$).

Лемма 1. Пусть G одна из групп $A_7, A_8, A_9, A_{10}, M_{11}, M_{12}, J_2$. Если центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ содержит две вершины, то G является одной из следующих групп: A_8, A_9, A_{10} или J_2 .

Доказательство. Из [4] легко следует, что $Z(\Gamma_{sol}(A_7)) = \emptyset$ и для групп A_8, A_9, A_{10} центр их графа разрешимости совпадает со множеством $\{2, 3\}$. Для групп M_{11}, M_{12}, J_2 доказательство следует из теоремы 2. $\square$

Лемма 2. Пусть G – конечная простая четырехперимарная группа, изоморфная $PSL_2(q)$, где $q = p^m$. Если $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$, то $p = q > 7$ – простое число Мерсенна и $(p-1)/2$ имеет два различных простых делителя. В последнем случае $p \in \{31, 127\}$.

Доказательство. Сведения о подгрупповом строении групп $L_2(q)$ можно найти в [8, теорема II.8.27]. Из [6, лемма 1.3] следует, что достаточно рассмотреть следующие случаи.

(1) $q = 2^m$. Тогда G имеет две диэдральные подгруппы порядков $2(q \pm 1)$ и силовскую 2-подгруппу порядка q . Поэтому $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. С другой стороны, вершины из $\pi(q+1)$ не инцидентны вершинам из $\pi(q-1)$. Таким образом, $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$.

(2) $q = 3^m$. Тогда в G есть подгруппа S_4 и потому вершина 3 смежна с вершиной 2. Так как G содержит диэдральные подгруппы порядков $3^m \pm 1$, то $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. При этом вершины из $\pi(q+1) \setminus \{2\}$ не смежны с вершинами из $\pi(q(q-1)/2)$. Отсюда заключаем, что $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$.

(3) $q = p$, где p – простое число, $17 \neq p \geq 11, p^2 - 1 = 2^a 3^b s^c, s > 3$ – простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1, либо 2 при $p \in \{97, 577\}$. Пусть сначала $p \equiv 1 \pmod{4}$, тогда $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. При этом вершины из $\pi(q+1) \setminus \{2\}$ не смежны с вершинами из $\pi(q(q-1)/2)$. Отсюда следует, что $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$. Пусть $p \equiv -1 \pmod{4}$. Тогда вершины из $\pi(p+1) \setminus \{2\}$ не смежны с вершинами из $\pi(p(p-1)/2)$. Если $p+1$ не является степенью двойки, то центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст. Следовательно, $p = 2^r - 1$ – простое число Мерсенна. Все простые делители числа $(p-1)/2$ содержатся в центре $\Gamma_{sol}(G)$. Отметим, что для чисел $p = 2^5 - 1 = 31$ и $p = 2^7 - 1 = 127$ имеет место равенство $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$. Покажем, что при $p > 127$ число простых делителей $(p-1)/2$ не меньше 3. В самом деле, $p = 2^r - 1$ для некоторого простого $r > 7$. Так как порядок подгруппы Бореля группы $PSL_2(q)$ равен $p(p-1)/2 = p \cdot (2^{r-1} - 1)$, то имеются по крайней мере два различных простых делителя чисел $2^{r-1} - 1$ и $2^{(r-1)/2} - 1$. Действительно, имеется примитивный простой делитель (делитель Жигмонди) s числа $2^{r-1} - 1$, причем $s \geq (r-1) + 1 = r$ и примитивный простой делитель (делитель Жигмонди) t числа $2^{(r-1)/2} - 1$, отличный от s такой, что $t \geq (r-1)/2 + 1 > (7-1)/2 + 1 = 4$. Кроме того, очевидно, что число 3 делит $2^{r-1} - 1 = (2^{(r-1)/2} - 1)(2^{(r-1)/2} + 1)$. Таким образом, $2^{r-1} - 1$ при $r > 7$ делится по крайней мере на три различных простых числа.

(4) Группа G изоморфна одной из групп $L_2(25), L_2(49)$ или $L_2(81)$. Рассуждениями, аналогичными предыдущим, легко показать, что во всех случаях $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. Пусть G одна из четырехперимарных групп, отличных от групп $L_2(q)$ и групп, приведенных в списке леммы 1. Если центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ содержит две вершины, то $G \cong S_6(2), G_2(3), {}^2F_4(2)'$ или $O_8^+(2)$.

Доказательство. Согласно [6, лемма 1.3] необходимо рассмотреть следующие случаи.

1. Группа $G \cong L_3(4)$. Согласно [4, стр. 23], группа G содержит максимальные подгруппы $2^4 : A_5$ и $L_2(7)$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

2. Группа $G \cong L_3(5)$. Согласно [4, стр. 38], группа G содержит максимальную разрешимую подгруппу $31 : 3$ и максимальную подгруппу $5^2 : GL_2(5)$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

3. Группа $G \cong L_3(7)$. Согласно [4, стр. 50], группа G содержит максимальную разрешимую подгруппу $19 : 3$ и максимальную подгруппу $L_2(7) : 2$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

4. Группа $G \cong L_3(8)$. Согласно [4, стр. 74], группа G содержит максимальные разрешимые подгруппы $73 : 3$ и $7^2 : S_3$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

5. Группа $G \cong L_4(3)$. Согласно [4, стр. 69], группа G содержит максимальные подгруппы $3^3 : L_3(3)$ и $U_4(2) : 2$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

6. Группа $G \cong S_4(4)$. Согласно [4, стр. 44], группа G содержит максимальные подгруппы $L_2(16) : 2$ и $2^6 : (3 \times A_5)$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

7. Группа $G \cong S_4(5)$. Согласно [4, стр. 61], группа G содержит максимальные подгруппы $L_2(25) : 2_2$ и $S_3 \times S_5$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

8. Группа $G \cong S_4(7)$. Из [7, таблица 8.12, таблица 8.13] следует, что в симплектической группе $Sp_4(7)$ имеются максимальные подгруппы $2_-^{1+4} \cdot S_5$ и $GL_2(7) : 2$. Из списка максимальных подгрупп группы $Sp_4(7)$ легко заключить, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

9. Группа $G \cong S_4(9)$. Из [7, таблица 8.12, таблица 8.13] следует, что в симплектической группе $Sp_4(9)$ имеется максимальная подгруппа $Sp_2(81) : 2$, поэтому группа G содержит максимальную разрешимую подгруппу $41 : 4$. Группа $Sp_4(9)$ также содержит максимальную подгруппу $GL_2(9) : 2$. Из списка максимальных подгрупп группы $Sp_4(9)$ легко заключить, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

10. Группа $G \cong S_6(2)$. Согласно [4, стр. 46], группа G содержит максимальные подгруппы $2^6 : L_3(2)$ и $S_3 \times S_6$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.

11. Группа $G \cong O_8^+(2)$. Согласно [4, стр. 85], группа G содержит максимальную подгруппу $S_6(2)$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.

12. Группа $G \cong U_3(5)$. Согласно [4, стр. 34], группа G содержит максимальные подгруппы A_7 и $A_6 : 2_3$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что центр графа разрешимости данной группы пуст.

13. Группа $G \cong U_3(8)$. Согласно [4, стр. 66], группа G содержит максимальные разрешимые подгруппы $19 : 3$ и $2^{3+6} : 21$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

14. Группа $G \cong U_3(9)$. Согласно [4, стр. 79], группа G содержит максимальные разрешимые подгруппы $73 : 3$ и $10^2 : S_3$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

15. Группа $G \cong U_4(3)$. Согласно [4, стр. 52], группа G содержит максимальные подгруппы A_7 и $3^4 : A_6$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

16. Группа $G \cong U_5(2)$. Согласно [4, стр. 73], группа G содержит максимальные подгруппы $L_2(11)$ и $2^{4+4} : (3 \times A_5)$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{5\}$.

17. Группа $G \in \{G_2(3), Sz(8), Sz(32), {}^3D_4(2), {}^2F_4(2)'\}$. Согласно [4, стр. 61], группа $G_2(3)$ содержит максимальные подгруппы $L_2(13)$, $2^3 : L_3(2)$ и $L_2(8) : 3$. Из перечня ее максимальных подгрупп следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G_2(3))) = \{2, 3\}$. Остальные группы были рассмотрены в теореме 1. Порядок центра группы ${}^2F_4(2)'$ равен 2, центры остальных групп меньше 2.

Теорема 3 непосредственно следует из лемм 1, 2 и 3. $\square$

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ.

Замечание 1. Как следует из леммы 3, группы $S_6(2)$, ${}^2F_4(2)'$ и $\Omega_8^+(2)$ являются контрпримерами к предположению первого автора о том, что число вершин в центре графа $\Gamma_{sol}(G)$ для группы лиева типа над полем $GF(q)$ характеристики p ограничено числом $q - 1$. Вероятно, существует линейная граница для числа вершин в центре графа разрешимости для простой группы лиева типа в терминах поля определения. Как видно из приведенных выше результатов, для исключительных простых групп лиева типа это так.

Замечание 2. В работе Б.Амберга и Л.Казарина [10] утверждается что число независимости $t_s(G)$ графа группы $G = B = F_2$ равно 7. Более внимательное изучение показало, что $t_s(G) = 6$. Перечислим вершины, входящие в максимальную систему независимых вершин этого графа: $\{47, 31, 19, 17, 13, 11\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ВПИ-008 ЯрГУ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и БРФИ в рамках научного проекта Ф20Р-291.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Carter R.W., *Conjugacy classes in the weil group* Compositio Mathematica **25:1** (1972)1 – 59.
- [2] N. V. Maslova, I. N. Belousov, N. A. Minigulov. *Open questions formulated at the 13th School-Conference on Group Theory Dedicated to V. A. Belonogov's 85th Birthday*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN, 2020, **26:3** (2020)275–285.
- [3] Abe S., Iiyori N., *A generalization of prime graphs of finite groups*, Hokkaido Math. J. **29:2** (2000), 391 – 407.
- [4] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups* London.: Clarendon, 1985. - 252 p.
- [5] Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M., *Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type*, Proc. London Math. Soc. **65** (1992), 297 – 325.
- [6] Kondrat'ev A.S., Khramtsov I. V., *On finite tetraprimary groups*, Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), **279, suppl. 1** (2012), 43–61.
- [7] Wilson R.A. The finite simple groups. *Springer: Graduate text in mathematics*, **251** – 2009. 298p.
- [8] Huppert B. *Endliche Gruppen I*, Berlin, Springer, 1967, Band 134. 793p.
- [9] Vasiliev A.V., Vdovin E.P. *An adjacency criterion for the prime graph of a finite simple group* Algebra and Logic **44:2** (2005), 381 – 406.
- [10] Amberg B., Kazarin L., *On the soluble graph of a finite simple group*, Communications in Algebra **41** (2013) 2297 – 2309.

ЛЕВ СЕРГЕЕВИЧ КАЗАРИН
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Советская, 14,
15003, Ярославль, Россия
Email address: lsk46@mail.ru

Валентин Николаевич Тютянов
Гомельский филиал Международного университета “МИТСО”,
пр. Октября, 46А,
246029, Гомель, Беларусь
Email address: vtutanov@gmail.com