S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том xx, стр. 1-12 (2014) УДК 512.54
MSC 20D20

О ЦЕНТРАХ ГРАФОВ РАЗРЕШИМОСТИ

Л.С. КАЗАРИН, В.Н.ТЮТЯНОВ

Abstract. Let G be finite group and $V = \pi(G)$ be the set of all prime divisors of its order. The soluble graph $\Gamma_{sol}(G)$ is a graph with the set of vertices V, where two vertices p and q in V are adjacent if there exists a soluble subgroup H of G whose order is divisble by pq. We study centers of soluble graphs of finite sporadic and exceptional simple groups Lie types.

Keywords: finite group, π-subgroup, exceptional simple group of Lie type, sporadic simple group, soluble graph.

1. Введение

Граф разрешимости (разрешимый граф) $\Gamma_{sol}(G)$ конечной группы G – это обыкновенный граф, вершинами которого являются простые делители $\pi(G)$ ее порядка. При этом две вершины $p, q \in \pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда в G найдется разрешимая подгруппа, порядок которой делится на pq.

Понятие графа разрешимости было введено С. Абе и Н. Йиори [3] как обобщение понятия графа Грюнберга-Кегеля. Легко видеть, что граф Грюнберга-Кегеля $\Gamma(G)$ группы G является подграфом графа $\Gamma_{sol}(G)$ с тем же множеством вершин, но при этом граф разрешимости конечной простой группы G всегда связен (теорема 1 в [3]).

Центром графа разрешимости $Z(\Gamma_{sol}(G))$ группы G называется множество вершин, каждая из которых смежна со всеми вершинами $\Gamma_{sol}(G)$. Если группа G разрешима, то граф $\Gamma_{sol}(G)$ является кликой (полным графом). У спорадической простой группы центр графа разрешимости часто бывает пуст. Напротив, число элементов центра графа разрешимости знакопеременной группы степени n для большого n при специальном выборе n может быть велико. Заметим,

---

Kazarin , L.S., Tutanov V.N. On centers of soluble graphs.

Поступила 5 февраля 2015 г., опубликована 31 декабря 2014 г.

что понятие центра графа разрешимости не является обббщеупотребительным в теории графов, но отвечает интуитивному представлению для данного случая.

Участники XIII Школы-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова, проходившей 3-7 августа 2020 г. в Екатеринбурге, представили ряд открытых проблем. Данные проблемы были опубликованы в [2]. В частности, Л.С. Казарин в проблеме 7 поставил следующий вопрос: описать конечные группы G лиева типа, у которых центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ не пуст.

Главная цель работы — описание центров графов разрешимости спорадических простых групп и исключительных простых групп лиева типа. Полное описание центров графов разрешимости исключительных простых получено для вчех исключительных простых групп лиева типа кроме $E_7(q)$ и $E_8(q)$. Для последних установлена нетривиальность их центров.

2. Главные результаты

Принятые обозначения, в основном, стандартны. В случае работы со спорадическими простыми группами мы следуем обозначениям [4].

Теорема 1. *Пусть G – конечная простая исключительная группа лиева типа. Тогда:*

1. $G \cong Sz(q)$ и $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.
2. $G \cong {}^2G_2(q)$ и $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.
3. $G \cong {}^3D_4(q)$ и $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.
4. $G \cong {}^2F_4(q)'$, где $q \geq 2$ и $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.
5. $G \cong G_2(q)$ и $\{2, 3\} = Z(\Gamma_{sol}(G))$.
6. $G \cong F_4(q)$ и $\{2\} = Z(\Gamma_{sol}(G))$.
7. $G \cong E_6(q)$. Если $q = 1 + 3t$ и $(t, 3) = 1$,то $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$.
Иначе $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.
8. $G \cong {}^2E_6(q)$ и Если $q = \pm 1 + 3t$ для $(t, 3) = 1$, то $Z(\Gamma_{sol}(G) = \emptyset$.
Иначе $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.
9. $G \cong E_7(q)$ или $G \cong E_8(q)$, то $\{2\} \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

Теорема 2. *Пусть G является спорадической простой группой. Тогда:*

1. Центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст для следующих групп: $G \cong M_{11}, M_{12}.M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_3, HS, McL, O'N, HN, Co_3, Co_2, BM, M$;

2. центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ состоит из вершины 2 для следующих групп: $G \cong J_1, J_4, Ly, He, Co_1, Suz, Ru, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}$.

3. центры графов $G \cong J_2$ и $G \cong Th$ состоят из вершин 2 и 3.

Центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ в случае $|\pi(G)| = 3$ всегда не пуст. Это немедленно следует из связности указанного графа. Список простых неабелевых конечных четырепримарных групп состоит из 35 простых групп и трех серий таких групп (см. [6]). Среди четырепримарных простых спорадических групп только у группы J_2 центр графа разрешимости не пуст и $|Z(\Gamma_{sol}(J_2))| = 2$. Поэтому представляется полезным перечислить все конечные простые четырепримарные группы, имеющие центр, состоящий из двух вершин, т.е. аналоги для группы J_2.

Теорема 3. *Пусть G – конечная четырепримарная простая группа, центр которой состоит из двух вершин. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: J_2; $S_6(2)$; A_8; A_9; A_{10}; $O_8^+(2)$; $G_2(3)$; ${}^2F_4(2)'$, $L_2(31)$, $L_2(127)$.*

3. Доказательство Теоремы 1.

Рассмотрим все случаи для простых исключительных групп лиева типа.

1. $G \cong Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1}$ и $n \geq 1$.

В этом случае $|G| = q^2(q^2+1)(q-1) = q^2(q-\sqrt{2q}+1)(q+\sqrt{2q}+1)(q-1)$. Из [8, теорема 4.1] следует, что группа G содержит разрешимые подгруппы $(q-1):2$, $(q-\sqrt{2q}+1):4$ и $(q+\sqrt{2q}+1):4$. Отсюда легко получаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G))$ содержит вершину $\{2\}$. Учитывая, что вершина $\{2\}$ смежна с вершинами из $\pi(q-1)$, а последние не смежны с вершинами из $\pi(q \pm \sqrt{2q}+1)$, заключаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

2. $G \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$ и $n \geq 1$.

В этом случае $|G| = q^3(q^3+1)(q-1) = q^3(q-\sqrt{3q}+1)(q+\sqrt{3q}+1)(q-1)(q+1)$. Из [8, теорема 4.2] следует, что группа G содержит подгруппы $[q^3]:(q-1)$, $(q-\sqrt{3q}+1):6$, $(q+\sqrt{3q}+1):6$, $2\times L_2(q)$ и $(2^2\times D_{(q+1)/2}):3$. Отсюда легко получаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G))$ содержит вершины $\{2\}$ и $\{3\}$. Заметим, что подгруппы порядков $(q\pm\sqrt{3q}+1):6$ являются группами Фробениуса с абелевыми ядрами, а q^2-1 взаимно просто с $(q\pm\sqrt{3q}+1)$. Кроме того, простые делители этих чисел не делят порядка параболической подгруппы группы G. Поэтому единственными вершинами, кроме вершин из $\pi(q\pm\sqrt{3q}+1)$, которые могут быть им инцидентны в графе разрешимости группы G, будут вершины $\{2\}$ и $\{3\}$. Итак, $Z(\Gamma sol(G)) = \{2,3\}$.

3. $G \cong {}^3D_4(q)$.

В этом случае $|G| = q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$. Имеют место равенства.

$q^8+q^4+1 = (q^4-q^2+1)(q^4+q^2+1) = (q^4-q^2+1)(q^2-q+1)(q^2+q+1)$,

$q^6-1 = (q^3-1)(q^3+1) = (q^2+q+1)(q^2-q+1)(q-1)(q+1)$ и

$q^2-1 = (q-1)(q+1)$.

Из представления $|G|$, пункта (13) [8, теорема 4.3] и простых арифметических вычислений следует, что примитивные простые делители числа q^4-q^2+1 могут делить только порядок группы (13) в списке [8, теорема 4.3]. Отсюда следует, что только число 2 может содержаться в $Z(\Gamma_{sol}(G))$. Теперь из пунктов (2), (11), (12) [8, теорема 4.3] следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

4. $G \cong {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2n+1} \geq 8$.

В этом случае $|G| = q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1)$. Имеют место равенства.

$q^3+1 = (q+1)(q^2-q+1)$,

$q^4-1 = (q^2-1)(q^2+1) = (q-1)(q+1)(q\pm\sqrt{2q}+1)$,

$q^6+1 = (q^2+1)(q^4-q^2+1) = (q\pm\sqrt{2q}+1)(q^4-q^2+1) = (q\pm\sqrt{2q}+1)(q^2+q+1\pm\sqrt{2q}(q+1))$.

Отсюда следует, что $|G| = (q-1)^2(q+1)^2(q\pm\sqrt{2q}+1)^2(q^2-q+1)\ (q^2+q+1\pm\sqrt{2q}(q+1))$. Из представления $|G|$ и пунктов (8), (9), (10) [8, теорема 4.5]. следует, что только числа 2 и 3 могут содержаться в $Z(\Gamma_{sol}(G))$. Из этих же пунктов [8, теорема 4.5] следует, что числа 2 и 3 смежны с вершинами из множеств $\pi(q+1)$, $\pi(q\pm\sqrt{2q}+1)$ и $\pi(q^2+q+1\pm\sqrt{2q}(q+1))$.

Из пункта (1) [8, теорема 4.5] следует, что вершина 2 смежна с вершинами из множества $\pi(q-1)$. Так как 3 делит $q+1$, то из пункта (3) [7, теорема 4.5] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами из множества $\pi(q-1)$.

Из пункта (3) [8, теорема 4.5] следует, что группа G содержит максимальную подгруппу $SU_3(q):2$. Однако группа $SU_3(q)$ содержит подгруппу $(q^2-q+1):3$, инвариантную относительно автоморфизма группы $SU_3(q)$ порядка 2. Таким образом, вершины 2 и 3 смежны с вершинами из множества $\pi(q^2-q+1)$.

Так как $(q+1,3)=3$, то $PGU_3(q)\cong SU_3(q)$. Из пункта (4) [8, теорема 4.5] следует, что группа G содержит максимальную подгруппу $PGU_3(q):2$. Как и предыдущем пункте получаем, что вершины 2 и 3 смежны с вершинами множества $\pi(q^2-q+1)$.

Итак, $Z(\Gamma_{sol}(G))=\{2,3\}$ и $|Z(\Gamma_{sol}(G))|=2$.

5. $G\cong {}^2F_4(2)'$.

Из [4, стр. 74] легко заключить, что $Z(\Gamma_{sol}(G))=\{2,3\}$ и $|Z(\Gamma_{sol}(G))|=2$.

6. $G\cong G_2(q)$, где $q=p^n>2$.

В этом случае $|G|=q^6(q^2-1)(q^6-1)=q^6(q-1)^2(q+1)^2(q^2-q+1)(q^2+q+1)$. Группа G содержит максимальные торы порядков $(q\pm1)^2$, $(q^2\pm q+1)$, q^2-1. Отметим, что для любого $r\in\pi(G)\setminus\{p\}$ число r делит порядок некоторого из перечисленных торов. Из описания максимальных подгрупп группы $G_2(q)$ в [8] следует, что вершина 2 графа $\Gamma_{sol}(G)$ смежна со всеми вершинами из $\pi(G)\setminus\{p\}$. Поскольку порядок борелевской подгруппы в группе G равен $q^6(q-1)^2$, то ясно, что при всех значениях характеристики поля вершина $\{2\}$ также смежна с вершиной $p\neq2$. Поэтому $2\in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

Так как для $r\in\pi(q^2\pm q+1)$ вершина r содержится лишь в максимальных подгруппах $G_2(q)$, изоморфных $SL_3(q)$ или $SU_3(q)$, то, используя строение групп $SL_3(q)$ и $SU_3(q)$, заключаем, что во всех случаях вершина $\{3\}$ также содержится в $Z(\Gamma_{sol}(G))$. Итак, $Z(\Gamma_{sol}(G))=\{2,3\}$.

7. $G\cong F_4(q)$. Из [1, таблица 8, стр. 49] следует, что для всякого максимального тора T индекс $|N_G(T):T|$ является четным числом. Отсюда легко заключить, что $2\in Z(\Gamma_{sol}(G))$. С другой стороны, имеются два максимальных тора B_4 порядка q^4+1 и F_4 порядка q^4-q^2+1. При этом индекс тора B_4 в его нормализаторе равен 8, а индекс тора F_4 в его нормализаторе равен 12 (см. [1, таблица 8], стр. 49). Так как подгруппа, изоморфная максимальному тору F_4, сильно изолированная в G, то, учитывая наличие максимального тора B_4, заключаем, что ни одна вершина из $\pi(q^4-q^2+1)$ не смежна с вершинами из $\pi(q^4+1)$. Отсюда $Z(\Gamma_{sol}(G))=\{2\}$.

8. $G\cong E_6(q)$, где $q=p^n$. тогда $|G|=(1/d)q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)$ для $d=(q-1,3)$. Рассмотрим следующие подслучаи.

(a) $q=3^n\geq3$. В максимальных параболических подгруппах $q^{16}:(\Omega^+_{10}(q)\times(q-1))$ и $q^{1+16}:(SL_6(q)\times(q-1))$ дополнения Леви имеют факторы $\Omega^+_{10}(q)$ и $SL_6(q)$. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами $\pi((q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)(q^5-1))$ и $\pi((q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)(q^6-1)$. Из разложения $|G|$ легко заключить, что оставшиеся простые делители $|G|$ находятся в $\pi(q^6+q^3+1)$ и $\pi(q^4-q^2+1)$. Графу $\Gamma=E_6(a_1)$ из [1] соответствует максимальный тор $T=E_6(a_1)$ порядка $(1/d)(q^6+q^3+1)$. Из [1, таблица 9, стр. 50] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi(q^6+q^3+1)$. Графу $\Gamma=E_6$ из [1] соответствует максимальный тор T_1 порядка $(1/d)(q^4-q^2+1)(q^2+q+1)$. Из [1, таблица 9, стр. 50] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi((q^4-q^2+1)(q^2+q+1)$. Таким образом, в рассмтриваемом случае $3\in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

(b) $q+1\equiv0 \pmod 3$. Понятно, что $d=1$. Покажем, что $3\in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

Группа G содержит параболическую максимальную подгруппу $q^{5+20} : (SL_2(q) \times SL_5(q) \times (q-1))$. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами $\pi((q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)$. Имеют место равенства: $(q^8-1) = (q^4-1)(q^4+1)$, $q^9-1 = (q^3-1)(q^6+q^3+1)$, $q^{12}-1 = (q^6-1)(q^6+1)$. Рассмотрим следующие делители порядка группы G: q^4+1, q^6+q^3+1, q^3+1, q^4-q^2+1.

Графу $\Gamma = D_5$ в [1, таблица 9, стр 50] соответствует максимальный тор T_1 порядка $(q^4+1)(q^2-1)$ и $|T_1|$ делится на 3. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами $\pi(q^4+1)$. Графу $\Gamma = E_6(a_1)$ из [1] соответствует максимальный тор T порядка q^6+q^3+1. Из [1, таблица 9, стр. 50] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi(T_2)$. Графу $\Gamma = D_4$ из [1] соответствует максимальный тор T_3 порядка $(q^3+1)(q+1)(q-1)^2$ и 3 делит $|T|$. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами $\pi(q^3+1)$. Графу $\Gamma = E_6$ соответствует максимальный тор T_4 порядка $(q^4-q^2+1)(q^2+q+1)$. Из [1, таблица 9, стр. 50] следует, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi(q^4-q^2+1)$. Из представления $|G|$ заключаем, что $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

(c) $q-1 \equiv 0 \pmod 3$. Пусть сначала $q-1 \equiv 0 \pmod 9$. Покажем, что $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. Группа G содержит параболические максимальные подгруппы $1/3q^{16} : (\Omega_{10}^+(q) \times (q-1))$ и $1/3q^{20}(SL_6(q) \times (q-1))$.

Так как $q-1 \equiv 0 \pmod 9$, то вершина 3 смежна с вершинами $\pi((q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)(q^6-1)$ и $\pi(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)$. Достаточно показать, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi(q^6+q^3+1)$ и $\pi(q^4-q^2+1)$. Это делается точно также как в случае (b). Таким образом, $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

(d) В случае $q-1 = 3t$, где $(3,t) = 1$, имеются примеры групп, у которых $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$.

Рассмотрим ситуацию (d) более подробно. Группа G содержит параболическую максимальную подгруппу $(1/3)q^{5+20} : (SL_2(q) \times SL_5(q) \times (q-1))$. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами $\pi((q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)$. Как и в случае (b) легко заключить, что оставшиеся простые делители $|G|$ находятся в $\pi((q^6+q^3+1)/3)$, $\pi(q^3+1)$, $\pi(q^4-q^2+1)$, $\pi(q^4+1)$.

Графу $\Gamma = E_6(a_1)$ из [1] соответствует максимальный тор T порядка $(q^6+q^3+1)/3$. Из [1, таблица 9, стр. 50] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi((q^6+q^3+1)/3)$. Графу $\Gamma = D_4$ из [1] соответствует максимальный тор T_2 порядка $(q^3+1)(q+1)(q-1)^2/3$ и 3 делит $|T_2|$. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами $\pi(q^3+1)$. Графу $\Gamma = E_6$ соответствует максимальный тор T_3 порядка $(q^4-q^2+1)(q^2+q+1)/3$. Из [1, таблица 9, стр. 50] следует, что $|N_G(T_3)/T_3| = 12$. Отсюда легко заключить, что вершина 3 смежна с вершинами $\pi(|T_3|)$. Порядок тора T_4, соответствующего графу D_5 из [1], равен $(q^4+1)(q^2-1)/3$ и это число не делится на 3. Из [1, таблица 9, стр. 50] следует, что $|N_G(T_4)/T_4| = 8$. Так как в нашем случае $q = 1+3t$ для t, взаимно простого с числом 3. В этом случае порядок силовской 3-подгруппы группы G не превосходит 3^{10}.

Если всякая вершина $\{r\}$, содержащаяся среди примитивных простых делителей числа (q^4+1), является смежной в графе разрешимости группы G с вершиной $\{3\}$, то циклическая подгруппа порядка r будет нормализовать подгруппу порядка 3^k для некоторого $1 < k \leq 10$ и действовать регулярно на элементарной абелевой подгруппе порядка 3^k. Так что $r|(3^k-1)$. Однако $q = 1+3t$, где $(3,t) = 1$. При этом все примитивные простые делители числа q^4+1 делят $(q^4+1)/(2,q-1)$. Прямая проверка делителей чисел 3^k-1 для

$1 < k \leq 10$ показывает, что это исключено. Поэтому вершина 3 не содержится в $Z(\Gamma_{sol}(G))$.

В предыдущих рассмотренных случаях (а), (в) и (с) при $q \equiv 1 \pmod 9$ имеется тор T порядка $(q^6+q^3+1)/(3,q-1)$, взаимно простого с порядками параболических максимальных подгрупп. Поэтому простые делители $|T|$ не могут делить порядки p-локальных подгрупп группы G. С другой стороны, порядок T взаимно прост с порядком группы Вейля W группы G. Отсюда в группе G нет бипримарных $\{r,s\}$ – подгрупп, где $r \in \pi(q^j-1)$ для $j \in \{2,3,5,6,8\}$, а $s \in \pi(T)$. Кроме того, $|T|$ взаимно прост с числами q^j-1 для $j \in \{2,3,5,6,8\}$ и q^6+1. Поэтому во всех указанных выше случаях ((a),(b) и (c)) имеем $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

Закончим рассмотрение случая (d). Если центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ не состоит из вершины $\{3\}$ (и не пуст), то в центре должна содержаться одна из вершин из множества $\pi(|T|)$. Предположим, что для некоторых $r \in \pi(|T|)$ и всякого $s \in \pi(G) \setminus \{p,r\}$ имеется разрешимая подгруппа K, порядок которой делится на rs. Если $O_r(K) \neq 1$, то имеется абелева нормальная подгруппа группы K, порядок которой делится на r. Это невозможно, поскольку всякая абелева p'-подгруппа должна содержаться в некотором максимальном торе группы G. Если же $O_r(K) = 1$, то выберем тор T_4 порядка $1/3(q^4+1)(q^2-1)$ с $s \in \pi(q^4+1)$. Нетрудно видеть, что централизатор элемента порядка s содержится в нормализаторе тора T_4. Это приводит к противоречию. Если же $\{3\} \in Z(\Gamma_{sol}(G))$, то $q \equiv 1 \pmod 3$. Так как $q = 3t+1$ для t, взаимно простого с 3, то порядок силовской 3-подгруппы группы G не превосходит 3^{10}. Рассматривая возможные значения порядка 3-силовской, исключаем их. Теперь легко видеть, что 3 не содержится в центре графа $\Gamma_{sol}(G)$. Таким образом, в случае $q = 3t+1$ с $(t,3) = 1$ имеем: центр графа разрешимости группы G пуст.

9. $G \cong {}^2E_6(q)$. Тогда $|G| = (1/d)q^{36}(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)$, где $d = (q+1,3)$. Для каждого максимального тора T группы G число $d|T|$ равно одному из следующих чисел [10]:

$(q+1)^k \cdot (q-1)^{6-k}, 2 \leq k \leq 6$; $(q^k-(-1))^k) \cdot (q^{6-k}-(-1)^{6-k}),\ 1 \leq k \leq 5$; $(q^k-(-1)^k)\cdot(q+1)^{6-k}$, $3 \leq k \leq 6$; $(q^3+1)(q^2-1)(q\pm1)$; $(q^5+1)\cdot(q-1)$; $(q^3-1)(q^2\pm1)(q+1)$; $(q^4+1)(q^2-1)$; $(q^2+1)^2(q+1)^2$; $(q^2-q+1)^3$; $(q^2-q+1)^2(q^2-1)$; $(q^4-1)(q-1)^2$; $q^3-1)(q^2-q+1)(q-1)$; $(q^4-q^2+1)(q^2-q+1)$; $q^6-q^3+1)$; $(q^2-q+1)^2(q^2+q+1)$.

Более того, для каждого числа n из указанных выше существует тор T такой, что $d|T| = n$.

Сначала рассмотрим случай $q = 2$. Тогда $\pi(G) = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ и $|G| = 2^{36} \cdot 3^9 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. При этом подгруппы порядков $13, 17$ и 19 являются сильно изолированными в G. Тор T_1 порядка 19 имеет нормализатор порядка $19 \cdot 9$ и является минизотропным. Используя элементарные вычисления, легко убедиться, что центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст. В самом деле, максимальная разрешимая подгруппа группы G, содержащая тор T_1, это нормализатор T_1 порядка $19 \cdot 9$. Отсюда следует, что либо центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ содержит вершину 3, либо он пуст. Однако нормализатор тора T_2 порядка 17 имеет порядок $17 \cdot 8$. Так как в G нет разрешимых $\{p,17\}$-подгрупп для $p > 2$ и $p \neq 17$, то центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ отличен от 3. Следовательно, $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$.

Рассмотрим общий случай. Из [5, таблица 5.1] следует, что среди максимальных подгрупп группы $G \cong {}^2E_6(q)$ имеется $U_3(q^3).(3\times d)$, где $d = (3,q+1)$. А значит, имеется максимальный тор T_0 порядка $(q^6-q^3+1)/d$, содержащийся в максимальном торе порядка $q^{12}+q^6+1$, соответствующего графу $E_6(a_1)$ из [1] группы $E_6(q^2)$. В силу сильной изолированности указанного тора в $E_6(q^2)$ получаем, что T_0 сильно изолирован в G. При этом максимальная разрешимая подгруппа G, содержащая T_0, содержится в нормализаторе T_0 в G.

Отсюда следует, что центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ либо состоит из вершины 3, либо содержит вершину $r \in \pi(T_0)$, либо пуст. Согласно [5, таблица 5.1], группа G имеет подгруппу $e.(L_2(q) \times U_6(q)).de$, где $e=(q-1,2), d=(3,q+1)$. Кроме того, имеются максимальные торы T_1 порядка $(q^5+1)(q+1)/d$ и T_2 порядка $(q^5+1)(q-1)/d$. Предположим, что имеется разрешимая подгруппа K порядка, делящегося на rs, где s – примитивный простой делитель числа q^5+1. Понятно, что $O_r(K)=1$. Следовательно, имеется абелева подгруппа S, содержащаяся в $O_s(K)$. В силу цикличности силовской s-подгруппы группы G можно считать, что $|S|=s$. Отсюда r делит $s-1$. Нетрудно видеть, что в группе $C_G(S)$ имеется холлова циклическая подгруппа порядка $(q^5+1)/(q+1)$, нормализуемая подгруппой порядка r. В частности, r делит наибольший общий делитель $((q^5+1)/(q+1)-1, |T_0|)$. Указанный наибольший общий делитель равен 1, противоречие.

Таким образом, единственная возможность, при которой центр графа разрешимости не пуст, заключается в том, что этот центр состоит из вершины $\{3\}$. Список параболических максимальных подгрупп группы G можно извлечь из работы [7].

Согласно [7], имеется ровно 4 класса сопряженности максимальных параболических подгрупп группы G: P_1, P_2, P_3 и P_4. При этом

$$\pi(P_1) \cup \pi(P_2) \cup \pi(P_3) \cup \pi(P_4) = \pi(G) \setminus \pi(T_0).$$

Строение подгрупп P_i при $i>1$ следующее: $P_i = U_iL_i$, где L_i – фактор Леви, U_i – унипотентная p-подгруппа (p – характеристика поля $GF(q)$). В случае P_4 подгруппа $L_4 \simeq {}^2D_4(q^2):(q^2-1)$. Напомним, что имеется также подгруппа $e.(L_2(q) \times U_6(q)).de$, где $e=(q-1,2), d=(3,q+1)$. В случае $q \equiv \pm 1 \pmod 9$ группа G содержит для всякого $r \in \pi(G) \setminus \{3\}$ разрешимую подгруппу порядка, делящегося на $3r$. В случае, когда $q = \pm 1 + 3t$, где $(t,3)=1$, разрешимой подгруппы порядка, делящегося на $3r$ в группе G нет. В этом случае центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст.

Если q – степень 3, то $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$. В самом деле, ввиду описания [7], для любого $r \in \pi(G) \setminus \{3\}$ существует разрешимая подгруппа, порядок которой делится на $\{3r\}$.

10. $G \in \{E_7(q), E_8(q)\}$. Согласно [1, таблица 10, стр. 51 – 53] и [1, таблица 11, стр. 54 – 58], нормализатор каждого максимального тора указанных групп имеет четный порядок. Поэтому вершина 2 содержится в $Z(\Gamma_{sol}(G))$ для любой из рассматриваемых групп.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство Теоремы 2.

Имеется 26 спорадических простых групп. Мы найдем центры графа разрешимости для каждой из этих групп.

1. Группа $G \cong M_{11}$. Согласно [4, стр. 18], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка 55 и максимальную подгруппу $2.S_4$. Единственная максимальная подгруппа G, порядок которой делится на 11, это подгруппа

порядка 55. Отсюда и из перечня максимальных подгрупп G следует, что разрешимых подгрупп порядка, делящегося на 15 в G нет. Отсюда центр графа разрешимости этой группы пуст.

2. Группа $G \cong M_{12}$. Согласно [4, стр. 33], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка 55 и максимальную подгруппу $A_4 \times S_3$. Отсюда и из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

3. Группа $G \cong M_{22}$. Согласно [4, стр. 39], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка 55 и максимальную подгруппу $2^3 : L_3(2)$. Отсюда и из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

4. Группа $G \cong M_{23}$. Согласно [4, стр. 71], группа G имеет разрешимую подгруппу порядка $23 \cdot 11$ и максимальную подгруппу A_8. Отсюда и из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

5. Группа $G \cong M_{24}$. Согласно [4, стр. 96], группа G имеет максимальную подгруппу $23 : 11$ и максимальную подгруппу $2^4 : A_8$. Отсюда и из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

6. Группа $G \cong J_1$. Согласно [4, стр. 36], группа G имеет максимальные подгруппы $19 : 6$ и $11 : 10$. Единственная максимальная подгруппа G, порядок которой делится на 19, это $19 : 6$. Кроме того, имеется максимальная подгруппа $2^3 : 7 : 3$. Отсюда следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

7. Группа $G \cong J_2$. Согласно [4, стр. 42], группа G имеет максимальную подгруппу $5^2 : D_{12}$ и максимальную подгруппу $L_3(2) : 2$. Но нет разрешимых подгрупп порядка, делящегося на 35. Отсюда следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.

8. Группа $G \cong J_3$. Согласно [4, стр. 82], группа G имеет максимальные разрешимые подгруппы порядков $19 \cdot 9$ и $17 \cdot 8$. И нет разрешимых подгрупп порядка, делящегося на $19 \cdot 17$. Отсюда следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

9. Группа $G \cong J_4$. Согласно [4, стр. 190], группа G имеет максимальные разрешимые подгруппы $37 : 12$, $43 : 14$, $29 : 28$, $(23 : 11) : 2$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

10. Группа $G \cong HS$. Согласно [4, стр. 80], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка $11 \cdot 5$ и максимальную разрешимую подгруппу порядка $4^3 \cdot 3 \cdot 7$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

11. Группа $G \cong Suz$. Согласно [4, стр. 131], группа G имеет разрешимую подгруппу порядка $11 \cdot 10$ и максимальную подгруппу $J_2 : 2$. Кроме того, в G есть разрешимая подгруппа порядка $13 \cdot 2$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

12. Группа $G \cong McL$. Согласно [4, стр. 100], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу $11 : 5$ и максимальную подгруппу $5^3 : 3 : 8$. Группа G

также содержит максимальную подгруппу $2^4 : A_7$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

13. Группа $G \cong Ru$. Согласно [4, стр. 126], группа G имеет максимальные разрешимые подгруппы порядков $29{\cdot}14$ и $13{\cdot}12$. Кроме того, группа G содержит максимальную подгруппу $2^{11} : L_3(2)$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

14. Группа $G \cong He$. Согласно [4, стр. 104], группа G имеет максимальные подгруппы $5^2 : 4A_4$ и $7^3 : (S_3 \times 3)$. В группе G имеется максимальная подгруппа $S_4(4) : 2$, содержащая максимальную подгруппу порядка $17 \cdot 8$ ([4, стр.44]). Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

15. Группа $G \cong Ly$. Согласно [4, стр. 174], группа G имеет максимальные подгруппы $37 : 18$ и $67 : 22$. Отсюда следует, что центр графа разрешимости группы G не может содержать других вершин, кроме вершины 2. В группе G имеется максимальная подгруппа $G_2(5)$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

16. Группа $G \cong O'N$. Согласно [4, стр. 132], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка $31{\cdot}15$ и максимальную подгруппу J_1, рассмотренную в пункте 6. Отсюда легко заключить, что центр графа разрешимости группы G пуст.

17. Группа $G \cong Co_1$. Согласно [4, стр. 183], группа G имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка $7^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3$ и максимальную подгруппу $(A_5 \times J_2) : 2$. Поэтому имеется полный подграф графа $\Gamma_{sol}(G)$ на вершинах 2, 3, 5, 7. Наличие максимальной подгруппы $2^{11} : M_{24}$ показывает, что вершина 23 смежна с вершинами 2 и 11. В группе G имеется максимальная подгруппа $(A_4 \times G_2(4)) : 2$, содержащая подгруппу $(A_4 \times 13) : 2$. Поэтому вершина 13 смежна с вершинами 3 и 2. Из сказанного следует, $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

18. Группа $G \cong Co_2$. Согласно [4, стр. 154], группа G имеет максимальную подгруппу M_{23}, рассмотренную в пункте 4. Отсюда следует, что центр у графа разрешимости (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 11. Учитывая наличие в группе G максмальных подгрупп $HS : 2$ и McL, заключаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G))$ должен содержать вершину 2. Противоречие. Таким образом, центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст.

19. Группа $G \cong Co_3$. Согласно [4, стр. 134], группа G имеет максимальную подгруппу M_{23}, рассмотренную в пункте 4. Отсюда следует, что центр у графа разрешимости (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 11. Учитывая наличие в группе G максмальных подгрупп HS и $McL : 2$, заключаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G))$ должен содержать вершину 2. Противоречие. Следовательно, центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст.

20. Группа $G \cong Fi_{22}$. В этом случае $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Согласно [4, стр. 163], группа G имеет максимальную подгруппу $2^{10} : M_{22}$. Отсюда непосредственно следует, что центр у графа разрешимости группы G (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 2. Группа G содержит максимальную подгруппу ${}^2F_4(2)'$, имеющую подгруппу $L_3(3) : 2$. Поэтому $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

21. Группа $G \cong Fi_{23}$. Тогда $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23\}$. Согласно [4, стр. 177], группа G имеет максимальную подгруппу $2^{11} : M_{23}$. Отсюда заключаем, что центр у графа разрешимости группы G (если он не пуст) может состоять

только из вершины 2. Из существования в группе G максимальной подгруппы $2.Fi_{22}$, заключаем, что центр графа разрешимости группы G $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

22. Группа $G \cong Fi'_{24}$. В этом случае $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29\}$. Согласно [4, стр. 207], группа G имеет максимальные подгруппы $2.Fi_{22}.2$, Fi_{23} и $29 \cdot 14$. Отсюда следует, что центр у графа разрешимости $\Gamma_{sol}(G)$ может состоять лишь из вершины 2. Из перечня других максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

23. Группа $G \cong HN$. Тогда $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 19\}$. Согласно [4, стр. 166], группа G имеет максимальную подгруппу $U_3(8) : 3$, порядок которой делится на 19. Других максимальных подгрупп порядока, делящегося на 19, в группе G нет. Отсюда следует, что центр у графа разрешимости группы G (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 3. Так как группа G имеет максимальную подгруппу $2 \cdot HS.2$, заключаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G))$ должен содержать вершину 2. Из перечня других максимальных подгрупп группы G следует, что центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст.

24. Группа $G \cong Th$. В этом случае $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 13, 19, 31\}$. Согласно [4, стр. 177], группа G имеет максимальную подгруппу $31 \cdot 15$. Учитывая также наличие максимальной подгруппы $L_2(19) : 2$, заключаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G))$ должен содержать вершину 3. Однако имеется и подгруппа порядка $2^5 \cdot 31$. Рассмотрев список других максимальных подгрупп G, получаем, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.

25. Группа $G \cong BM \cong F_2+$. В этом случае $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 47\}$. В [4, стр. 217] приведено полное описание максимальных p-локальных подгрупп группы G. В частности, группа G содержит максимальную подгруппу $47 : 23$ и порядок любой p-локальной подгруппы для $p \neq 47$ не делится на 47. Отсюда легко заключить, что центр у графа разрешимости группы G (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 23. С другой стороны, например, все 17-локальные подгруппы группы G имеют порядок, делящийся только на простые числа 17 и 2. Поэтому вершина 23 не смежна с вершиной 17. Отсюда получаем, что центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст.

26. Группа $G \cong M \cong F_1$. В этом случае $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71\}$. В [4, стр. 234] приведено описание всех максимальных p-локальных подгрупп группы G. Группа G содержит максимальную подгруппу $59 : 29$ и порядок всякой p-локальной подгруппы группы G для $p \neq 59$ не делится на 59. Отсюда легко следует, что центр у графа разрешимости группы G (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 29. С другой стороны, например, все 41-локальные подгруппы группы G имеют порядок, делящийся только на простые числа 41, 5, 2. Поэтому вершина 29 не смежна с вершиной 41. Отсюда получаем, что центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст.

Теорема 2 доказана.

5. Доказательство Теоремы 3.

Согласно [6, лемма 1.3] перечень четырепримарных простых групп состоит из следующих групп: (1) $A_7, A_8, A_9, A_{10}, M_{11}, M_{12}, J_2, L_2(16), L_2(25), L_2(49),$ $L_2(81), L_3(4), L_3(5), L_3(7), L_3(8), L_3(17), L_4(3), S_4(4), S_4(5), S_4(7), S_4(9), S_6(2),$ $O_8^+(2), G_2(3), U_3(4), U_3(5), U_3(7), U_3(8), U_3(9), U_4(3), U_5(2), Sz(8), Sz(32),$ ${}^3D_4(2), {}^2F_4(2)'$.

(2) $L_2(r)$, где r – простое число, $17 \neq r \geq 11, r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$, $s > 3$ – простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1, либо 2 при $r \in \{97, 577\}$.

(3) $L_2(2^m)$, где $m, 2^m - 1$ и $(2^m + 1)/3$ – простые числа, большие 3.

(4) $L_2(3^m)$, где m и $(3^m - 1)/2$ нечетные простые числа, а $(3^m + 1)/4$ либо равно простому числу, либо 11^2 (при $m = 5$).

Лемма 1. *Пусть G одна из групп $A_7, A_8, A_9, A_{10}, M_{11}, M_{12}, J_2$. Если центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ содержит две вершины, то G является одной из следующих групп: A_8, A_9, A_{10} или J_2.*

Доказательство. Из [4] легко следует, что $Z(\Gamma_{sol}(A_7)) = \emptyset$ и для групп A_8, A_9, A_{10} центр их графа разрешимости совпадает со множеством $\{2, 3\}$. Для групп M_{11}, M_{12}, J_2 доказательство следует из теоремы 2. □

Лемма 2. *Пусть G – конечная простая четырепримарная группа, изоморфная $PSL_2(q)$, где $q = p^m$. Если $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$, то $p = q > 7$ – простое число Мерсенна и $(p-1)/2$ имеет два различных простых делителя. В последнем случае $p \in \{31, 127\}$.*

Доказательство. Сведения о подгрупповом строении групп $L_2(q)$ можно найти в [9, теорема II.8.27]. Из [6, лемма 1.3] следует, что достаточно рассмотреть следующие случаи.

(1) $q = 2^m$. Тогда G имеет две диэдральные подгруппы порядков $2(q \pm 1)$ и силовскую 2-подгруппу порядка q. Поэтому $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. С другой стороны, вершины из $\pi(q + 1)$ не инцидентны вершинам из $\pi(q - 1)$. Таким образом, $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$.

(2) $q = 3^m$. Тогда в G есть подгруппа S_4 и потому вершина 3 смежна с вершиной 2. Так как G содержит диэдральные подгруппы порядков $3^m \pm 1$, то $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. При этом вершины из $\pi(q+1) \setminus \{2\}$ не смежны с вершинами из $\pi(q(q-1)/2)$. Отсюда заключаем, что $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$.

(3) $q = p$, где p – простое число, $17 \neq p \geq 11, p^2 - 1 = 2^a 3^b s^c, s > 3$ – простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1, либо 2 при $p \in \{97, 577\}$. Пусть сначала $p \equiv 1 \pmod 4$, тогда $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. При этом вершины из $\pi(q+1) \setminus \{2\}$ не смежны с вершинами из $\pi(q(q-1)/2)$. Отсюда следует, что $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$. Пусть $p \equiv -1 \pmod 4$. Тогда вершины из $\pi(p + 1) \setminus \{2\}$ не смежны с вершинами из $\pi(p(p-1)/2)$. Если $p + 1$ не является степенью двойки, то центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ пуст. Следовательно, $p = 2^r - 1$ – простое число Мерсенна. Все простые делители числа $(p-1)/2$ содержатся в центре $\Gamma_{sol}(G)$. Отметим, что для чисел $p = 2^5-1 = 31$ и $p = 2^7 - 1 = 127$ имеет место равенство $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$. Покажем, что при $p > 127$ число простых делителей $(p - 1)/2$ не меньше 3. В самом деле, $p = 2^r - 1$ для некоторого простого $r > 7$. Так как порядок подгруппы Бореля группы $PSL_2(q)$ равен $p(p - 1)/2 = p \cdot (2^{r-1} - 1)$, то имеются по крайней мере два различных простых делителя чисел $2^{r-1} - 1$ и $2^{(r-1)/2} - 1$. Действительно, имеется примитивный простой делитель (делитель Жигмонди) s числа $2^{r-1} - 1$, причем $s \geq (r - 1) + 1 = r$ и примитивный простой делитель (делитель Жигмонди) t числа $2^{(r-1)/2} - 1$, отличный от s такой, что $t \geq (r - 1)/2 + 1 > (7-1)/2+1 = 4$. Кроме того, очевидно, что число 3 делит $2^{r-1}-1 = (2^{(r-1)/2} - 1)(2^{(r-1)/2} + 1)$. Таким образом, $2^{r-1} - 1$ при $r > 7$ делится по крайней мере на три различных простых числа.

(4) Группа G изоморфна одной из групп $L_2(25)$, $L_2(49)$ или $L_2(81)$. Рассуждениями, аналогичными предыдущим, легко показать, что во всех случаях $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть G одна из четырепримарных групп, отличных от групп $L_2(q)$ и групп, приведенных в списке леммы 1. Если центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ содержит две вершины, то $G \cong S_6(2), G_2(3), {}^2F_4(2)'$ или $O_8^+(2)$.*

Доказательство. Согласно [6, лемма 1.3] необходимо рассмотреть следующие случаи.

1. Группа $G \cong L_3(4)$. Согласно [4, стр. 23], группа G содержит максимальные подгруппы $2^4 : A_5$ и $L_2(7)$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

2. Группа $G \cong L_3(5)$. Согласно [4, стр. 38], группа G содержит максимальную разрешимую подгруппу $31 : 3$ и максимальную подгруппу $5^2 : GL_2(5)$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

3. Группа $G \cong L_3(7)$. Согласно [4, стр. 50], группа G содержит максимальную разрешимую подгруппу $19 : 3$ и максимальную подгруппу $L_2(7) : 2$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

4. Группа $G \cong L_3(8)$. Согласно [4, стр. 74], группа G содержит максимальные разрешимые подгруппы $73 : 3$ и $7^2 : S_3$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

5. Группа $G \cong L_4(3)$. Согласно [4, стр. 69], группа G содержит максимальные подгруппы $3^3 : L_3(3)$ и $U_4(2) : 2$. Из перечня максимальных подгрупп G следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

6. Группа $G \cong S_4(4)$. Согласно [4, стр. 44], группа G содержит максимальные подгруппы $L_2(16) : 2$ и $2^6 : (3 \times A_5)$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

7. Группа $G \cong S_4(5)$. Согласно [4, стр. 61], группа G содержит максимальные подгруппы $L_2(25) : 2_2$ и $S_3 \times S_5$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

8. Группа $G \cong S_4(7)$. Из [7, таблица 8.12, таблица 8.13] следует, что в симплектической группе $Sp_4(7)$ имеются максимальные подгруппы $2_-^{1+4}.S_5$ и $GL_2(7) : 2$. Из списка максимальных подгрупп группы $Sp_4(7)$ легко заключить, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

9. Группа $G \cong S_4(9)$. Из [8, таблица 8.12, таблица 8.13] следует, что в симплектической группе $Sp_4(9)$ имеется максимальная подгруппа $Sp_2(81) : 2$, поэтому группа G содержит максимальную разрешимую подгруппу $41 : 4$. Группа $Sp_4(9)$ также содержит максимальную подгруппу $GL_2(9) : 2$. Из списка максимальных подгрупп группы $Sp_4(9)$ легко заключить, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

10. Группа $G \cong S_6(2)$. Согласно [4, стр. 46], группа G содержит максимальные подгруппы $2^6 : L_3(2)$ и $S_3 \times S_6$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.

11. Группа $G \cong O_8^+(2)$. Согласно [4, стр. 85], группа G содержит максимальную подгруппу $S_6(2)$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$.

12. Группа $G \cong U_3(5)$. Согласно [4, стр. 34], группа G содержит максимальные подгруппы A_7 и $A_6{}^{\cdot}2_3$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что центр графа разрешимости данной группы пуст.

13. Группа $G \cong U_3(8)$. Согласно [4, стр. 66], группа G содержит максимальные разрешимые подгруппы $19 : 3$ и $2^{3+6} : 21$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

14. Группа $G \cong U_3(9)$. Согласно [4, стр. 79], группа G содержит максимальные разрешимые подгруппы $73:3$ и $10^2:S_3$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

15. Группа $G \cong U_4(3)$. Согласно [4, стр. 52], группа G содержит максимальные подгруппы A_7 и $3^4 : A_6$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$.

16. Группа $G \cong U_5(2)$. Согласно [4, стр. 73], группа G содержит максимальные подгруппы $L_2(11)$ и $2^{4+4} : (3 \times A_5)$. Из перечня максимальных подгрупп группы G следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{5\}$.

17. Группа $G \in \{G_2(3), Sz(8), Sz(32), {}^3D_4(2), {}^2F_4(2)'$. Согласно [4, стр. 61], группа $G_2(3)$ содержит максимальные подгруппы $L_2(13)$, $2^3 : L_3(2)$ и $L_2(8):3$. Из перечня ее максимальных подгрупп следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G_2(3))) = \{2,3\}$. Остальные группы были рассмотрены в теореме 1. Порядок центра группы ${}^2F_4(2)'$ равен 2, центры остальных групп меньше 2.

Теорема 3 непосредственно следует из лемм 1, 2 и 3. □

6. Заключительные замечания.

Замечание 1. Как следует из леммы 3, группы $S_6(2), {}^2F_4(2)'$ и $\Omega_8^+(2)$ являются контрпримерами к предположению первого автора о том, что число вершин в центре графа $\Gamma_{sol}(G)$ для группы лиева типа над полем $GF(q)$ характеристики p ограничено числом $q-1$. Вероятно, существует линейная граница для числа вершин в центре графа разрешимости для простой группы лиева типа в терминах поля определения. Как видно из приведенных выше результатов, для исключительных простых групп лиева типа это так.

Замечание 2. В работе Б.Амберга и Л.Казарина [11] утверждается что число независимости $t_s(G)$ графа группы $G = B = F_2$ равно 7. Более внимательное изучение показало, что $t_s(G) = 6$. Перечислим вершины, входящие в максимальную систему независимых вершин этого графа: $\{47, 31, 19, 17, 13, 11\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ВИП-008 ЯрГУ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта Ф20Р-291.

Список литературы

[1] Carter R.W., *Conjugacy classes in the weil group* Compositio Mathematica **25:1** (1972)1 – 59.

[2] N. V. Maslova, I. N. Belousov, N. A. Minigulov. *Open questions formulated at the 13th School–Conference on Group Theory Dedicated to V. A. Belonogov's 85th Birthday*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN, 2020, **26:3** (2020)275–285.

[3] Abe S.,Iiyori N., *A generalization of prime graphs of finite groups*, Hokkaido Math. J. **29:2** (2000), 391 – 407.

[4] Conway J.H., Curtis R,T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups* London.: Clarendon, 1985. - 252 p.

[5] Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M., *Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type*, Proc. London Math. Soc. **65** (1992), 297 – 325.

[6] Kondrat'ev A.S., Khramtsov I. V., *On finite tetraprimary groups*, Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), **279, suppl. 1** (2012), 43–61.

[7] Korableva V.V., , *Parabolic permutation representations of the group* ${}^2E_6(q^2)$, Math. Notes, **67:6** (2000), 758 – 770.

[8] Wilson R.A. The finite simple groups. *Springer: Graduate text in mathematics*, **251** – 2009. 298p.

[9] Huppert B. *Endliche Gruppen I*, Berlin, Springer, 1967, Band 134. 793p.
[10] Vasiliev A.V., Vdovin E.P. *An adjacency criterion for the prime graph of a finite simple group* Algebra and Logic **44:2** (2005), 381 – 406.
[11] Amberg B.,Kazarin L, *On the soluble graph of a finite simple group*, Communications in Algebra **41** (2013) 2297 – 2309.

Лев Сергеевич Казарин
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Советская, 14,
15003, Ярославль, Россия
Email address: lsk46@mail.ru

Валентин Николаевич Тютянов
Гомельский филиал Международного университета "МИТСО",
пр. Октября, 46а,
246029, Гомель, Беларусь
Email address: vtutanov@gamail.com