

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>Том  $xx$ , стр. 1-12 (2014)УДК 512.54  
MSC 20D20

## О ЦЕНТРАХ ГРАФОВ РАЗРЕШИМОСТИ

Л.С. КАЗАРИН, В.Н. ТЮТЯНОВ

ABSTRACT. Let  $G$  be finite group and  $V = \pi(G)$  be the set of all prime divisors of its order. The soluble graph  $\Gamma_{sol}(G)$  is a graph with the set of vertices  $V$ , where two vertices  $p$  and  $q$  in  $V$  are adjacent if there exists a soluble subgroup  $H$  of  $G$  whose order is divisible by  $pq$ . We study centers of soluble graphs of finite sporadic and exceptional simple groups Lie types.

**Keywords:** finite group,  $\pi$ -subgroup, exceptional simple group of Lie type, sporadic simple group, soluble graph.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Граф разрешимости (разрешимый граф)  $\Gamma_{sol}(G)$  конечной группы  $G$  – это обыкновенный граф, вершинами которого являются простые делители  $\pi(G)$  ее порядка. При этом две вершины  $p, q \in \pi(G)$  смежны тогда и только тогда, когда в  $G$  найдется разрешимая подгруппа, порядок которой делится на  $pq$ .

Понятие графа разрешимости было введено С. Абе и Н. Йиори [3] как обобщение понятия графа Грюнберга-Кегеля. Легко видеть, что граф Грюнберга-Кегеля  $\Gamma(G)$  группы  $G$  является подграфом графа  $\Gamma_{sol}(G)$  с тем же множеством вершин, но при этом граф разрешимости конечной простой группы  $G$  всегда связан.

Центром графа разрешимости  $Z(\Gamma_{sol}(G))$  группы  $G$  называется множество вершин, смежных со всеми вершинами  $\Gamma_{sol}(G)$ . Если группа  $G$  разрешима, то граф  $\Gamma_{sol}(G)$  является кликой (полным графом). У спорадической простой группы центр графа разрешимости часто бывает пуст. Напротив, число элементов центра графа разрешимости знакопеременной группы степени  $n$  для большого  $n$  при специальном выборе  $n$  может быть велико.

---

KAZARIN, L.S., TUTANOV V.N. ON CENTERS OF SOLUBLE GRAPHS.

© 2015 Казарин Л.С., Тютянов В.Н..

Поступила 5 февраля 2015 г., опубликована 31 декабря 2014 г.

Участники XIII Школы-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова, проходившей 3-7 августа 2020 г. в Екатеринбурге, представили ряд открытых проблем. Данные проблемы были опубликованы в [2]. В частности, Л.С. Казарин в проблеме 7 поставил следующий вопрос: описать конечные группы  $G$  лиева типа, у которых центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  не пуст.

Главная цель работы — описание центров графов разрешимости sporadic-ских простых групп и исключительных простых групп лиева типа.

## 2. ГЛАВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Принятые обозначения, в основном, стандартны. В случае работы со sporadic-скими простыми группами мы следуем обозначениям [4].

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — конечная простая исключительная группа лиева типа. Тогда:

1.  $G \cong Sz(q)$  и  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .
2.  $G \cong {}^2G_2(q)$  и  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$ .
3.  $G \cong {}^3D_4(q)$  и  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .
4.  $G \cong {}^2F_4(q)$ , где  $q > 2$  и  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$ .
5.  $G \cong {}^2F_4(2)'$  и  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$ .
6.  $G \cong G_2(q)$  и  $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ .
7.  $G \cong F_4(q)$  и  $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ .
8.  $G \cong E_6(q)$  и  $Z(\Gamma_{sol}(G)) \in \{3, \emptyset\}$ .
9.  $G \cong {}^2E_6(q)$  и  $Z(\Gamma_{sol}(G)) \in \{3, \emptyset\}$ .
10.  $G \cong E_7(q)$  и  $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ .
11.  $G \cong E_8(q)$  и  $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ .

**Теорема 2.** Пусть  $G$  является sporadic-ской простой группой. Тогда:

1. Центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  пуст для следующих групп:  $G \cong M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_3, HS, McL, O'N, HN, Co_3, Co_2, BM, M$ ;
2. центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  состоит из вершины 2 для следующих групп:  $G \cong J_1, J_4, Lu, He, Co_1, Suz, Ru, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}$ .
3. центры графов  $G \cong J_2$  и  $G \cong Th$  состоят из вершин 2 и 3.

Центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  в случае  $|\pi(G)| = 3$  всегда не пуст. Это немедленно следует из связности указанного графа. Список простых неабелевых конечных четырехпримарных групп состоит из 35 простых групп и трех серий таких групп (см. [6]). Среди четырехпримарных простых sporadic-ских групп только у группы  $J_2$  центр графа разрешимости не пуст и  $|Z(\Gamma_{sol}(J_2))| = 2$ . Поэтому представляется полезным перечислить все конечные простые четырехпримарные группы, имеющие центр, состоящий из двух вершин, т.е. аналоги для группы  $J_2$ .

**Теорема 3.** Пусть  $G$  — конечная четырехпримарная простая группа, центр которой состоит из двух вершин. Тогда  $G$  изоморфна одной из следующих групп:  $J_2; S_6(2); A_8; A_9; A_{10}; O_8^+(2); G_2(3); {}^2F_4(2)', L_2(31), L_2(127)$ .

## 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

Рассмотрим все случаи для простых исключительных групп лиева типа.

1.  $G \cong Sz(q)$ , где  $q = 2^{2n+1}$  и  $n \geq 1$ .

В этом случае  $|G| = q^2(q^2 + 1)(q - 1) = q^2(q - \sqrt{2q} + 1)(q + \sqrt{2q} + 1)(q - 1)$ .

Из [7, теорема 4.1] следует, что группа  $G$  содержит разрешимые подгруппы  $(q - 1) : 2$ ,  $(q - \sqrt{2q} + 1) : 4$  и  $(q + \sqrt{2q} + 1) : 4$ . Отсюда легко получаем, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$  и  $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$ .

2.  $G \cong {}^2G_2(q)$ , где  $q = 3^{2n+1}$  и  $n \geq 1$ .

В этом случае  $|G| = q^3(q^3 + 1)(q - 1) = q^3(q - \sqrt{3q} + 1)(q + \sqrt{3q} + 1)(q - 1)(q + 1)$ .

Из [7, теорема 4.2] следует, что группа  $G$  содержит разрешимые подгруппы  $[q^3] : (q - 1)$ ,  $(q - \sqrt{3q} + 1) : 6$ ,  $(q + \sqrt{3q} + 1) : 6$  и  $(2^2 \times D_{(q+1)/2}) : 3$ . Отсюда легко получаем, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$  и  $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$ .

3.  $G \cong {}^3D_4(q)$ .

В этом случае  $|G| = q^{12}(q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1)$ . Имеют место равенства.

$$q^8 + q^4 + 1 = (q^4 - q^2 + 1)(q^4 + q^2 + 1) = (q^4 - q^2 + 1)(q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1),$$

$$q^6 - 1 = (q^3 - 1)(q^3 + 1) = (q^2 + q + 1)(q^2 - q + 1)(q - 1)(q + 1) \text{ и}$$

$$q^2 - 1 = (q - 1)(q + 1).$$

Таким образом,  $|G| = q^{12}(q - 1)^2(q + 1)^2(q^2 - q + 1)^2(q^2 + q + 1)^2(q^4 - q^2 + 1)$ .

Из представления  $|G|$ , пункта (13) [7, теорема 4.3] и простых арифметических вычислений следует, что только число 2 может содержаться в  $Z(\Gamma_{sol}(G))$ . Теперь из пунктов (2), (11), (12) [7, теорема 4.3] следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$  и  $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$ .

4.  $G \cong {}^2F_4(q)$ , где  $q = 2^{2n+1} \geq 8$ .

В этом случае  $|G| = q^{12}(q^6 + 1)(q^4 - 1)(q^3 + 1)(q - 1)$ . Имеют место равенства.

$$q^3 + 1 = (q + 1)(q^2 - q + 1),$$

$$q^4 - 1 = (q^2 - 1)(q^2 + 1) = (q - 1)(q + 1)(q \pm \sqrt{2q} + 1),$$

$$q^6 + 1 = (q^2 + 1)(q^4 - q^2 + 1) = (q \pm \sqrt{2q} + 1)(q^4 - q^2 + 1) = (q \pm \sqrt{2q} + 1)(q^2 + q + 1 \pm \sqrt{2q}(q + 1)).$$

Отсюда следует, что  $|G| = (q - 1)^2(q + 1)^2(q \pm \sqrt{2q} + 1)^2(q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1 \pm \sqrt{2q}(q + 1))$ . Из представления  $|G|$  и пунктов (8), (9), (10) [7, теорема 4.5] следует, что только числа 2 и 3 могут содержаться в  $Z(\Gamma_{sol}(G))$ . Из этих же пунктов [7, теорема 4.5] следует, что числа 2 и 3 смежны с вершинами из множеств  $q + 1$ ,  $q \pm \sqrt{2q} + 1$  и  $q^2 + q + 1 \pm \sqrt{2q}(q + 1)$ .

Из пункта (1) [7, теорема 4.5] следует, что вершина 2 смежна с вершинами из множества  $q - 1$ . Если 3 делит  $q + 1$ , то из пункта (3) [7, теорема 4.5] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами из множества  $q - 1$ . Пусть 3 не делит  $q + 1$ . Тогда 3 делит  $q - 1$  и вершина 3 смежна с вершинами множества  $q - 1$ . Следовательно, вершины 2 и 3 смежны с вершинами множества  $q - 1$ .

Пусть  $(q + 1, 3) = 3$ . Из пункта (3) [7, теорема 4.5] следует, что группа  $G$  содержит максимальную подгруппу  $SU_3(q) : 2$ . Однако группа  $SU_3(q)$  содержит подгруппу  $(q^2 - q + 1) : 3$ , инвариантную относительно автоморфизма группы  $SU_3(q)$  порядка 2. Таким образом, вершины 2 и 3 смежны с вершинами множества  $q^2 - q + 1$ .

Предположим, что  $(q + 1, 3) = 1$ . Тогда  $PGU_3(q) \cong SU_3(q)$ . Из пункта (4) [7, теорема 4.5] следует, что группа  $G$  содержит максимальную подгруппу  $PGU_3(q) : 2$ . Как и предыдущем пункте получаем, что вершины 2 и 3 смежны с вершинами множества  $q^2 - q + 1$ .

Итак,  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$  и  $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$ .

5.  $G \cong {}^2F_4(2)'$ .

Из [4, стр. 74] легко заключить, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$  и  $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$ .

6.  $G \cong G_2(q)$ , где  $q = p^n > 2$ .

В этом случае  $|G| = q^6(q^2 - 1)(q^6 - 1) = q^6(q - 1)^2(q + 1)^2(q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1)$ . Группа  $G$  содержит максимальные торы порядков  $(q \pm 1)^2$ ,  $(q^2 \pm q + 1)$ ,  $q^2 - 1$ . Отметим, что для любого  $r \in \pi(G) \setminus \{p\}$  число  $r$  делит порядок некоторого из перечисленных торов. Из [1, таблица 7, стр. 48] следует, что для всякого тора  $T$  индекс  $|N_G(T) : T|$  является четным числом. Таким образом, вершина 2 графа  $\Gamma_{sol}(G)$  смежна со всеми вершинами из  $\pi(G) \setminus \{p\}$ . Поскольку порядок борелевской подгруппы в группе  $G$  равен  $q^6(q - 1)^2$ , то ясно что при всех значениях характеристики поля вершина 2 смежна с вершиной  $p$ . Поэтому  $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ .

7.  $G \cong F_4(q)$ . Из [1, таблица 8, стр. 49] следует, что для всякого максимального тора  $T$  индекс  $|N_G(T) : T|$  является четным числом. Отсюда легко заключить, что  $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ .

8.  $G \cong E_6(q)$ , где  $q = p^n$ . тогда  $|G| = (1/d)q^{36}(q^{12} - 1)(q^9 - 1)(q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 - 1)$  для  $d = (q - 1, 3)$ . Рассмотрим следующие случаи.

(а)  $q = 3^n \geq 3$ . В максимальных параболических подгруппах  $q^{16} : (\Omega_{10}^+(q) \times (q - 1))$  и  $q^{1+16} : (SL_6(q) \times (q - 1))$  дополнения Леви имеют композиционные факторы  $\Omega_{10}^+(q)$  и  $SL_6(q)$ . Поэтому вершина 3 смежна с вершинами  $\pi((q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^4 - 1)(q^2 - 1)(q^5 - 1))$  и  $\pi((q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)(q^5 - 1)(q^6 - 1))$ . Из разложения  $|G|$  легко заключить, что оставшиеся простые делители  $|G|$  находятся в  $\pi(q^6 + q^3 + 1)$  и  $\pi(q^4 - q^2 + 1)$ . Графу  $\Gamma = E_6(a_1)$  из [1] соответствует максимальный тор  $T = E_6(a_1)$  порядка  $(1/d)(q^6 + q^3 + 1)$ . Из [1, таблица 9, стр. 50] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами  $\pi(q^6 + q^3 + 1)$ . Графу  $\Gamma = E_6$  из [1] соответствует максимальный тор  $T_1$  порядка  $(1/d)(q^4 - q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$ . Из [1, таблица 9, стр. 50] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами  $\pi((q^4 - q^2 + 1)(q^2 + q + 1))$ . Таким образом,  $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ .

(б)  $q + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ . Понятно, что  $d = 1$ . Покажем, что  $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ .

Группа  $G$  содержит параболическую максимальную подгруппу  $q^{5+20} : (SL_2(q) \times SL_5(q) \times (q - 1))$ . Поэтому вершина 3 смежна с вершинами  $\pi((q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)(q^5 - 1))$ . Имеют место равенства:  $(q^8 - 1) = (q^4 - 1)(q^4 + 1)$ ,  $q^9 - 1 = (q^3 - 1)(q^6 + q^3 + 1)$ ,  $q^{12} - 1 = (q^6 - 1)(q^6 + 1)$ . Рассмотрим следующие делители порядка группы  $G$ :  $q^4 + 1$ ,  $q^6 + q^3 + 1$ ,  $q^3 + 1$ ,  $q^4 - q^2 + 1$ .

Графу  $\Gamma = D_5$  в [1, таблица 9, стр. 50] соответствует максимальный тор  $T_1$  порядка  $(q^4 + 1)(q^2 - 1)$  и  $|T_1|$  делится на 3. Поэтому вершина 3 смежна с вершинами  $\pi(q^4 + 1)$ . Графу  $\Gamma = E_6(a_1)$  из [1] соответствует максимальный тор  $T_2$  порядка  $q^6 + q^3 + 1$ . Из [1, таблица 9, стр. 50] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами  $\pi(T_2)$ . Графу  $\Gamma = D_4$  из [1] соответствует максимальный тор  $T_3$  порядка  $(q^3 + 1)(q + 1)(q - 1)^2$  и 3 делит  $|T|$ . Поэтому вершина 3 смежна с вершинами  $\pi(q^3 + 1)$ . Графу  $\Gamma = E_6$  соответствует максимальный тор  $T_4$  порядка  $(q^4 - q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$ . Из [1, таблица 9, стр. 50] следует, что вершина 3 смежна с вершинами  $\pi(q^4 - q^2 + 1)$ . Из представления  $|G|$  заключаем, что  $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ .

(с)  $q - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ . Пусть сначала  $q - 1 \equiv 0 \pmod{9}$ . Покажем, что  $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ . Группа  $G$  содержит параболические максимальные подгруппы  $1/3q^{16} : (\Omega_{10}^+(q) \times (q - 1))$  и  $1/3q^{20}(SL_6(q) \times (q - 1))$ .

Так как  $q-1 \equiv 0 \pmod{9}$ , то вершина 3 смежна с вершинами  $\pi((q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)(q^6-1))$  и  $\pi(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)$ . Достаточно показать, что вершина 3 смежна с вершинами  $\pi(q^6+q^3+1)$  и  $\pi(q^4-q^2+1)$ . Это делается точно также как в случае (b). Таким образом,  $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ .

В случае  $q-1 = 3t$ , где  $(3, t) = 1$  имеются примеры групп, у которых  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$ . Рассмотрим этот случай более подробно. Группа  $G$  содержит параболическую максимальную подгруппу  $(1/3)q^{5+20} : (SL_2(q) \times SL_5(q) \times (q-1))$ . Поэтому вершина 3 смежна с вершинами  $\pi((q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1))$ . Как и в случае (b) легко заключить, что оставшиеся простые делители  $|G|$  находятся в  $\pi((q^6+q^3+1)/3)$ ,  $\pi(q^3+1)$ ,  $\pi(q^4-q^2+1)$ ,  $\pi(q^4+1)$ .

Графу  $\Gamma = E_6(a_1)$  из [1] соответствует максимальный тор  $T_1$  порядка  $(q^6+q^3+1)/3$ . Из [1, таблица 9, стр. 50] заключаем, что вершина 3 смежна с вершинами  $\pi((q^6+q^3+1)/3)$ . Графу  $\Gamma = D_4$  из [1] соответствует максимальный тор  $T_2$  порядка  $(q^3+1)(q+1)(q-1)^2/3$  и 3 делит  $|T_2|$ . Поэтому вершина 3 смежна с вершинами  $\pi(q^3+1)$ . Графу  $\Gamma = E_6$  соответствует максимальный тор  $T_3$  порядка  $(q^4-q^2+1)(q^2+q+1)/3$ . Из [1, таблица 9, стр. 50] следует, что  $|N_G(T_3)/T_3| = 12$ . Отсюда легко заключить, что вершина 3 смежна с вершинами  $\pi(T_3)$ . Порядок тора  $T_4$ , соответствующего графу  $D_5$  из [1] равен  $(q^4+1)(q^2-1)/3$  и не делится на 3. Из [1, таблица 9, стр. 50] следует, что  $|N_G(T_4)/T_4| = 8$ . Поэтому вершина 3 не содержится в  $Z(\Gamma_{sol}(G))$ .

Проиллюстрируем сказанное на следующих двух примерах.

Пусть  $G \cong E_6(4)$ . Тогда  $|G| = 2^{72} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 73 \cdot 241 \cdot 257$

Покажем, что вершина 257 смежна только с вершинами 2 и 5. В группе  $G$  имеется максимальный тор  $T$  порядка  $5 \cdot 257 = ((q^4+1)(q^2-1)/3)$ . Пусть  $L < G$  и  $|L| = 257$ . Так как  $256 = 2^8$ , то  $\pi(|N_G(L) : L|) = \{2, 5\}$ . Предположим, что  $L < M$  – разрешимая группа. В силу сказанного можно считать, что  $M = O_r(M) : L$  – группа Фробениуса для некоторого  $r \in \pi(G)$ . Ясно, что  $r = 3$ . В силу характеристичности подгруппы  $\Omega_1(Z(O_3(M)))$  в  $M$  можно считать, что  $O_3(M)$  элементарная абелева. Непосредственный подсчет показывает, что таких групп нет.

Покажем, что вершина 73 не смежна с вершиной 2. Тогда, очевидно, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$ . В группе  $G$  имеется максимальный тор  $T$  порядка  $19 \cdot 73 ((q^6+q^3+1)/3)$ . Пусть  $L < G$  и  $|L| = 73$ . Так как порядки параболических подгрупп группы  $G$  не делятся на 73, то  $L$  не содержится в 2-локальных подгруппах. Пусть 2 делит  $|N_G(L)|$ . Так как  $C_G(L) = T \triangleleft N_G(L)$ , то 2 делит  $|N_G(T)| = 19 \cdot 73 \cdot 3^2$ , что невозможно.

Таким образом,  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$ .

Пусть  $G \cong E_6(7)$ , где  $|G| = (1/3) \cdot 7^{36}(7^{12}-1)(7^9-1)(7^8-1)(7^6-1)(7^5-1)(7^2-1)$ . Максимальный минизотропный тор  $T$ , отвечающий графу  $E_6(a_1)$  из [1], имеет порядок, не делящийся на 3. Его нормализатор  $N_G(T) = T : 9$  является группой Фробениуса с ядром  $T$  порядка  $39331 = 37 \cdot 1063$  и дополнительным множителем порядка 9. Так как единственной максимальной разрешимой подгруппой группы  $G$ , порядок которой делится на  $|T|$  является нормализатор  $T$ , а порядки остальных максимальных торов взаимно просты с  $|T|$ , что следует из взаимной простоты  $|T|$  с  $q^2-1, q^3-1, q^4-1, q^5-1, q^7-1, q^8-1, q^{12}-1$  и минизотропности тора  $T$ , то получаем, что центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  для нашей группы

пуст. Действительно, нормализатор тора  $T_1$  порядка  $(q^4 + 1)(q^2 - 1)/3$ , соответствующего графу  $D_5$  из [1], имеет порядок, взаимно простой с  $|T|$ , причем  $|N_G(T_1) : T_1| = 8$ . Поэтому центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  для группы  $G$  пуст.

9.  $G \cong {}^2E_6(q)$ . Тогда  $|G| = (1/d)q^{36}(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)$ , где  $d = (q + 1, 3)$ . Для каждого максимального тора  $T$  группы  $G$  число  $d|T|$  равно одному из следующих чисел [9]:

$$(q+1)^k \cdot (q-1)^{6-k}, 2 \leq k \leq 6; \quad (q^k - (-1)^k) \cdot (q^{6-k} - (-1)^{6-k}), 1 \leq k \leq 5; \\ (q^k - (-1)^k) \cdot (q+1)^{6-k}, \quad 3 \leq k \leq 6; \quad (q^3+1)(q^2-1)(q \pm 1); \quad (q^5+1) \cdot (q-1); \quad (q^3-1)(q^2 \pm 1)(q+1); \quad (q^4+1)(q^2-1); \quad (q^2+1)^2(q+1)^2; \quad (q^2-q+1)^3; \quad (q^2-q+1)^2(q^2-1); \quad (q^4-1)(q-1)^2; \quad q^3-1)(q^2-q+1)(q-1); \quad (q^4-q^2+1)(q^2-q+1); \quad q^6-q^3+1; \quad (q^2-q+1)^2(q^2+q+1).$$

Более того, для каждого числа  $n$  из указанных выше существует тор  $T$  такой, что  $d|T| = n$ .

Сначала рассмотрим случай  $q = 2$ . Тогда  $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$  и  $|G| = 2^{36} \cdot 3^9 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ . При этом подгруппы порядков 13, 17 и 19 являются сильно изолированными в  $G$ . Тор  $T_1$  порядка 19 имеет нормализатор порядка  $19 \cdot 9$  и является минизотропным. Используя элементарные вычисления, легко убедиться, что центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  пуст. В самом деле, максимальная разрешимая подгруппа группы  $G$ , содержащая тор  $T_1$ , это нормализатор  $T_1$  порядка  $19 \cdot 9$ . Отсюда следует, что либо центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  содержит вершину 3, либо пуст. Однако нормализатор тора  $T_2$  порядка 17 имеет порядок  $17 \cdot 8$ . Так как в  $G$  нет разрешимых  $\{p, 17\}$ -подгрупп для  $p > 2$  и  $p \neq 17$ , то центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  отличен от 3. Следовательно,  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$ .

Рассмотрим общий случай. Из [5, таблица 5.1] следует, что среди максимальных подгрупп группы  $G \cong {}^2E_6(q)$  имеется  $U_3(q^3) \cdot (3 \times e)$ , где  $e = (3, q + 1)$ . А значит, имеется максимальный тор  $T_0$  порядка  $q^6 - q^3 + 1$ , содержащийся в максимальном торе порядка  $q^{12} + q^6 + 1$ , соответствующего графу  $E_6(a_1)$  из [1] группы  $E_6(q^2)$ . В силу сильной изолированности указанного тора в  $E_6(q^2)$  получаем, что  $T_0$  сильно изолирован в  $G$ . При этом максимальная разрешимая подгруппа  $G$ , содержащая  $T_0$ , содержится в нормализаторе  $T_0$  в  $G$ .

Отсюда следует, что центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  либо состоит из вершины 3, либо пуст. Согласно [5, таблица 5.1], группа  $G$  имеет подгруппу  $d \cdot (L_2(q) \times U_6(q)) \cdot de$ , где  $d = (q - 1, 2)$ ,  $e = (3, q + 1)$ . Кроме того, имеется максимальный тор  $T_1$  порядка  $(q^5 + 1)(q + 1)$ , для которого  $|N_G(T_1) : T_1| = 10$ . Если  $q -$  степень 3 или  $q \equiv 1 \pmod{3}$ , то  $Z(\Gamma_{sol}(G)) \neq \emptyset$ . При  $q \equiv -1 \pmod{3}$  возможно, что  $3 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ . Однако при  $q = 2$  было показано, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \emptyset$ .

10.  $G \in \{E_7(q), E_8(q)\}$ . Согласно [1, таблица 10, стр. 51 – 53] и [1, таблица 11, стр. 54 – 58], нормализатор каждого максимального тора указанных групп имеет четный порядок. Поэтому вершина 2 содержится в  $Z(\Gamma_{sol}(G))$  для любой из двух, рассматриваемых групп.

Теорема 1 доказана.

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

Имеется 26 спорадических простых групп. Мы найдем центры графа разрешимости для каждой из этих групп.

1. Группа  $G \cong M_{11}$ . Согласно [4, стр. 18], группа  $G$  имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка 55 и максимальную подгруппу  $2.S_4$ . Отсюда и

из перечня максимальных подгрупп  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

2. Группа  $G \cong M_{12}$ . Согласно [4, стр. 33], группа  $G$  имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка 55 и максимальную подгруппу  $A_4 \times S_3$ . Отсюда и из перечня максимальных подгрупп  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

3. Группа  $G \cong M_{22}$ . Согласно [4, стр. 39], группа  $G$  имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка 55 и максимальную подгруппу  $2^3 : L_3(2)$ . Отсюда и из перечня максимальных подгрупп  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

4. Группа  $G \cong M_{23}$ . Согласно [4, стр. 71], группа  $G$  имеет разрешимую подгруппу порядка  $23 \cdot 11$  и максимальную подгруппу  $A_8$ . Отсюда и из перечня максимальных подгрупп  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

5. Группа  $G \cong M_{24}$ . Согласно [4, стр. 96], группа  $G$  имеет максимальную подгруппу  $23 : 11$  и максимальную подгруппу  $2^4 : A_8$ . Отсюда и из перечня максимальных подгрупп  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

6. Группа  $G \cong J_1$ . Согласно [4, стр. 36], группа  $G$  имеет максимальные подгруппы  $19 : 6$  и  $11 : 10$ . Кроме того, имеется максимальная подгруппа  $2^3 : 7 : 3$ . Отсюда следует, что центр графа разрешимости этой группы  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

7. Группа  $G \cong J_2$ . Согласно [4, стр. 42], группа  $G$  имеет максимальную подгруппу  $5^2 : D_{12}$  и максимальную подгруппу  $L_3(2) : 2$ . Отсюда следует, что центр графа разрешимости этой группы  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$ .

8. Группа  $G \cong J_3$ . Согласно [4, стр. 82], группа  $G$  имеет максимальные разрешимые подгруппы порядков  $19 \cdot 9$  и  $17 \cdot 8$ . Отсюда следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

9. Группа  $G \cong J_4$ . Согласно [4, стр. 190], группа  $G$  имеет максимальные разрешимые подгруппы  $37 : 12$ ,  $43 : 14$ ,  $29 : 28$ ,  $(23 : 11) : 2$ . Из перечня максимальных подгрупп  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

10. Группа  $G \cong HS$ . Согласно [4, стр. 80], группа  $G$  имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка  $11 \cdot 5$  и максимальную разрешимую подгруппу порядка  $4^3 \cdot 3 \cdot 7$ . Из перечня максимальных подгрупп  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

11. Группа  $G \cong Suz$ . Согласно [4, стр. 131], группа  $G$  имеет разрешимую подгруппу порядка  $11 \cdot 10$  и максимальную подгруппу  $J_2 : 2$ . Кроме того, в  $G$  есть разрешимая подгруппа порядка  $13 \cdot 2$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

12. Группа  $G \cong McL$ . Согласно [4, стр. 100], группа  $G$  имеет максимальную разрешимую подгруппу  $11 : 5$  и максимальную подгруппу  $5^3 : 3 : 8$ . Группа  $G$  также содержит максимальную подгруппу  $2^4 : A_7$ . Из перечня максимальных подгрупп  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

13. Группа  $G \cong Ru$ . Согласно [4, стр. 126], группа  $G$  имеет максимальные разрешимые подгруппы порядков  $29 \cdot 14$  и  $13 \cdot 12$ . Кроме того, группа  $G$  содержит

максимальную подгруппу  $2^{11} : L_3(2)$ . Из перечня максимальных подгрупп  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

14. Группа  $G \cong He$ . Согласно [4, стр. 104], группа  $G$  имеет максимальные подгруппы  $5^2 : 4A_4$  и  $7^3 : (S_3 \times 3)$ . В группе  $G$  имеется максимальная подгруппа  $S_4(4) : 2$ , содержащая максимальную подгруппу порядка  $17 \cdot 8$  ([4, стр.44]). Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

15. Группа  $G \cong Ly$ . Согласно [4, стр. 174], группа  $G$  имеет максимальные подгруппы  $37 : 18$  и  $67 : 22$ . Отсюда следует, что центр графа разрешимости группы  $G$  не может содержать других вершин, кроме вершины 2. В группе  $G$  имеется максимальная подгруппа  $G_2(5)$ . Из перечня максимальных подгрупп  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

16. Группа  $G \cong O'N$ . Согласно [4, стр. 132], группа  $G$  имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка  $31 \cdot 15$  и максимальную подгруппу  $J_1$ , рассмотренную в пункте 6. Отсюда легко заключить, что центр графа разрешимости группы  $G$  пуст.

17. Группа  $G \cong Co_1$ . Согласно [4, стр. 183], группа  $G$  имеет максимальную разрешимую подгруппу порядка  $7^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3$  и максимальную подгруппу  $(A_5 \times J_2) : 2$ . Поэтому имеется полный подграф графа  $\Gamma_{sol}(G)$  на вершинах 2, 3, 5, 7. Наличие максимальной подгруппы  $2^{11} : M_{24}$  показывает, что вершина 23 смежна с вершинами 2 и 11. В группе  $G$  имеется максимальная подгруппа  $(A_4 \times G_2(4)) : 2$ , содержащая подгруппу  $(A_4 \times 13) : 2$ . Поэтому вершина 13 смежна с вершинами 3 и 2. Из сказанного следует,  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

18. Группа  $G \cong Co_2$ . Согласно [4, стр. 154], группа  $G$  имеет максимальную подгруппу  $M_{23}$ , рассмотренную в пункте 4. Отсюда следует, что центр у графа разрешимости (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 11. Учитывая наличие в группе  $G$  максимальных подгрупп  $HS : 2$  и  $McL$ , заключаем, что  $Z(\Gamma_{sol}(G))$  должен содержать вершину 2. Противоречие. Таким образом, центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  пуст.

19. Группа  $G \cong Co_3$ . Согласно [4, стр. 134], группа  $G$  имеет максимальную подгруппу  $M_{23}$ , рассмотренную в пункте 4. Отсюда следует, что центр у графа разрешимости (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 11. Учитывая наличие в группе  $G$  максимальных подгрупп  $HS$  и  $McL : 2$ , заключаем, что  $Z(\Gamma_{sol}(G))$  должен содержать вершину 2. Противоречие. Следовательно, центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  пуст.

20. Группа  $G \cong Fi_{22}$ . В этом случае  $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ . Согласно [4, стр. 163], группа  $G$  имеет максимальную подгруппу  $2^{10} : M_{22}$ . Отсюда непосредственно следует, что центр у графа разрешимости группы  $G$  (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 2. Группа  $G$  содержит максимальную подгруппу  ${}^2F_4(2)'$ , имеющую подгруппу  $L_3(3) : 2$ . Поэтому  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

21. Группа  $G \cong Fi_{23}$ . Тогда  $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23\}$ . Согласно [4, стр. 177], группа  $G$  имеет максимальную подгруппу  $2^{11} : M_{23}$ . Отсюда заключаем, что центр у графа разрешимости группы  $G$  (если он не пуст) может состоять только из вершины 2. Из существования в группе  $G$  максимальной подгруппы  $2.Fi_{22}$ , заключаем, что центр графа разрешимости группы  $G$   $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

22. Группа  $G \cong Fi'_{24}$ . В этом случае  $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29\}$ . Согласно [4, стр. 207], группа  $G$  имеет максимальные подгруппы  $2.Fi_{22}.2$ ,  $Fi_{23}$  и

29 · 14. Отсюда следует, что центр у графа разрешимости  $\Gamma_{sol}(G)$  может состоять лишь из вершины 2. Из перечня других максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

23. Группа  $G \cong HN$ . Тогда  $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 19\}$ . Согласно [4, стр. 166], группа  $G$  имеет максимальную подгруппу  $U_3(8) : 3$ , порядок которой делится на 19. Других максимальных подгрупп порядка, делящегося на 19, в группе  $G$  нет. Отсюда следует, что центр у графа разрешимости группы  $G$  (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 3. Так как группа  $G$  имеет максимальную подгруппу  $2 \cdot HS.2$ , заключаем, что  $Z(\Gamma_{sol}(G))$  должен содержать вершину 2. Из перечня других максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  пуст.

24. Группа  $G \cong Th$ . В этом случае  $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 13, 19, 31\}$ . Согласно [4, стр. 177], группа  $G$  имеет максимальную подгруппу  $31 \cdot 15$ . Учитывая также наличие максимальной подгруппы  $L_2(19) : 2$ , заключаем, что  $Z(\Gamma_{sol}(G))$  должен содержать вершину 3. Рассмотрев список других максимальных подгрупп  $G$ , получаем, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$ .

25. Группа  $G \cong BM \cong F_2+$ . В этом случае  $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 47\}$ . В [4, стр. 217] приведено полное описание максимальных  $p$ -локальных подгрупп группы  $G$ . В частности, группа  $G$  содержит максимальную подгруппу  $47 : 23$  и порядок любой  $p$ -локальной подгруппы для  $p \neq 47$  не делится на 47. Отсюда легко заключить, что центр у графа разрешимости группы  $G$  (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 23. С другой стороны, например, все 17-локальные подгруппы группы  $G$  имеют порядок, делящийся только на простые числа 17 и 2. Поэтому вершина 23 не смежна с вершиной 17. Отсюда получаем, что центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  пуст.

26. Группа  $G \cong M \cong F_1$ . В этом случае  $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71\}$ . В [4, стр. 234] приведено описание всех максимальных  $p$ -локальных подгрупп группы  $G$ . Группа  $G$  содержит максимальную подгруппу  $59 : 29$  и порядок всякой  $p$ -локальной подгруппы группы  $G$  для  $p \neq 59$  не делится на 59. Отсюда легко следует, что центр у графа разрешимости группы  $G$  (если он не пуст) может состоять лишь из вершины 29. С другой стороны, например, все 41-локальные подгруппы группы  $G$  имеют порядок, делящийся только на простые числа 41, 5, 2. Поэтому вершина 29 не смежна с вершиной 41. Отсюда получаем, что центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  пуст.

Теорема 2 доказана.

### 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.

Согласно [6, лемма 1.3] перечень четырехпримарных простых групп состоит из следующих групп: (1)  $A_7, A_8, A_9, A_{10}, M_{11}, M_{12}, J_2, L_2(16), L_2(25), L_2(49), L_2(81), L_3(4), L_3(5), L_3(7), L_3(8), L_3(17), L_4(3), S_4(4), S_4(5), S_4(7), S_4(9), S_6(2), O_8^+(2), G_2(3), U_3(4), U_3(5), U_3(7), U_3(8), U_3(9), U_4(3), U_5(2), Sz(8), Sz(32), {}^3D_4(2), {}^2F_4(2)'$ .

(2)  $L_2(r)$ , где  $r$  – простое число,  $17 \neq r \geq 11$ ,  $r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$ ,  $s > 3$  – простое число,  $a, b \in \mathbb{N}$  и  $c$  равно либо 1, либо 2 при  $r \in \{97, 577\}$ .

(3)  $L_2(2^m)$ , где  $m$ ,  $2^m - 1$  и  $(2^m + 1)/3$  – простые числа, большие 3.

(4)  $L_2(3^m)$ , где  $m$  и  $(3^m - 1)/2$  нечетные простые числа, а  $(3^m + 1)/4$  либо равно простому числу, либо  $11^2$  (при  $m = 5$ ).

**Лемма 1.** Пусть  $G$  одна из групп  $A_7, A_8, A_9, A_{10}, M_{11}, M_{12}, J_2$ . Если центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  содержит две вершины, то  $G$  является одной из следующих групп:  $A_8, A_9, A_{10}$  или  $J_2$ .

*Доказательство.* Из [4] легко следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(A_7)) = \emptyset$  и для групп  $A_8, A_9, A_{10}$  центр их графа разрешимости совпадает со множеством  $\{2, 3\}$ . Для групп  $M_{11}, M_{12}, J_2$  доказательство следует из теоремы 2.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $G$  – конечная простая четырехперимарная группа, изоморфная  $PSL_2(q)$ , где  $q = p^m$ . Если  $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$ , то  $p = q > 7$  – простое число Мерсенна и  $(p-1)/2$  имеет два различных простых делителя. В последнем случае  $p \in \{31, 127\}$ .

*Доказательство.* Сведения о подгрупповом строении групп  $L_2(q)$  можно найти в [8, теорема II.8.27]. Из [6, лемма 1.3] следует, что достаточно рассмотреть следующие случаи.

(1)  $q = 2^m$ . Тогда  $G$  имеет две диэдральные подгруппы порядков  $2(q \pm 1)$  и силовскую 2-подгруппу порядка  $q$ . Поэтому  $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ . С другой стороны, вершины из  $\pi(q+1)$  не инцидентны вершинам из  $\pi(q-1)$ . Таким образом,  $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$ .

(2)  $q = 3^m$ . Тогда в  $G$  есть подгруппа  $S_4$  и потому вершина 3 смежна с вершиной 2. Так как  $G$  содержит диэдральные подгруппы порядков  $3^m \pm 1$ , то  $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ . При этом вершины из  $\pi(q+1) \setminus \{2\}$  не смежны с вершинами из  $\pi(q(q-1)/2)$ . Отсюда заключаем, что  $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$ .

(3)  $q = p$ , где  $p$  – простое число,  $17 \neq p \geq 11$ ,  $p^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$ ,  $s > 3$  – простое число,  $a, b \in \mathbb{N}$  и  $c$  равно либо 1, либо 2 при  $p \in \{97, 577\}$ . Пусть сначала  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , тогда  $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ . При этом вершины из  $\pi(q+1) \setminus \{2\}$  не смежны с вершинами из  $\pi(q(q-1)/2)$ . Отсюда следует, что  $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 1$ . Пусть  $p \equiv -1 \pmod{4}$ . Тогда вершины из  $\pi(p+1) \setminus \{2\}$  не смежны с вершинами из  $\pi(p(p-1)/2)$ . Если  $p+1$  не является степенью двойки, то центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  пуст. Следовательно,  $p = 2^r - 1$  – простое число Мерсенна. Все простые делители числа  $(p-1)/2$  содержатся в центре  $\Gamma_{sol}(G)$ . Отметим, что для чисел  $p = 2^5 - 1 = 31$  и  $p = 2^7 - 1 = 127$  имеет место равенство  $|Z(\Gamma_{sol}(G))| = 2$ . Покажем, что при  $p > 127$  число простых делителей  $(p-1)/2$  не меньше 3. В самом деле,  $p = 2^r - 1$  для некоторого простого  $r > 7$ . Так как порядок подгруппы Бореля группы  $PSL_2(q)$  равен  $p(p-1)/2 = p \cdot (2^{r-1} - 1)$ , то имеются по крайней мере два различных простых делителя чисел  $2^{r-1} - 1$  и  $2^{(r-1)/2} - 1$ . Действительно, имеется примитивный простой делитель (делитель Жигмонди)  $s$  числа  $2^{r-1} - 1$ , причем  $s \geq (r-1) + 1 = r$  и примитивный простой делитель (делитель Жигмонди)  $t$  числа  $2^{(r-1)/2} - 1$ , отличный от  $s$  такой, что  $t \geq (r-1)/2 + 1 > (7-1)/2 + 1 = 4$ . Кроме того, очевидно, что число 3 делит  $2^{r-1} - 1 = (2^{(r-1)/2} - 1)(2^{(r-1)/2} + 1)$ . Таким образом,  $2^{r-1} - 1$  при  $r > 7$  делится по крайней мере на три различных простых числа.

(4) Группа  $G$  изоморфна одной из групп  $L_2(25)$ ,  $L_2(49)$  или  $L_2(81)$ . Рассуждениями, аналогичными предыдущим, легко показать, что во всех случаях  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $G$  одна из четырехперимарных групп, отличных от групп  $L_2(q)$  и групп, приведенных в списке леммы 1. Если центр графа  $\Gamma_{sol}(G)$  содержит две вершины, то  $G \cong S_6(2), G_2(3), {}^2F_4(2)'$  или  $O_8^+(2)$ .

*Доказательство.* Согласно [6, лемма 1.3] необходимо рассмотреть следующие случаи.

1. Группа  $G \cong L_3(4)$ . Согласно [4, стр. 23], группа  $G$  содержит максимальные подгруппы  $2^4 : A_5$  и  $L_2(7)$ . Из перечня максимальных подгрупп  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

2. Группа  $G \cong L_3(5)$ . Согласно [4, стр. 38], группа  $G$  содержит максимальную разрешимую подгруппу  $31 : 3$  и максимальную подгруппу  $5^2 : GL_2(5)$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$ .

3. Группа  $G \cong L_3(7)$ . Согласно [4, стр. 50], группа  $G$  содержит максимальную разрешимую подгруппу  $19 : 3$  и максимальную подгруппу  $L_2(7) : 2$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$ .

4. Группа  $G \cong L_3(8)$ . Согласно [4, стр. 74], группа  $G$  содержит максимальные разрешимые подгруппы  $73 : 3$  и  $7^2 : S_3$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$ .

5. Группа  $G \cong L_4(3)$ . Согласно [4, стр. 69], группа  $G$  содержит максимальные подгруппы  $3^3 : L_3(3)$  и  $U_4(2) : 2$ . Из перечня максимальных подгрупп  $G$  следует, что центр графа разрешимости этой группы пуст.

6. Группа  $G \cong S_4(4)$ . Согласно [4, стр. 44], группа  $G$  содержит максимальные подгруппы  $L_2(16) : 2$  и  $2^6 : (3 \times A_5)$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

7. Группа  $G \cong S_4(5)$ . Согласно [4, стр. 61], группа  $G$  содержит максимальные подгруппы  $L_2(25) : 2_2$  и  $S_3 \times S_5$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

8. Группа  $G \cong S_4(7)$ . Из [7, таблица 8.12, таблица 8.13] следует, что в симплектической группе  $Sp_4(7)$  имеются максимальные подгруппы  $2_1^{1+4} \cdot S_5$  и  $GL_2(7) : 2$ . Из списка максимальных подгрупп группы  $Sp_4(7)$  легко заключить, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

9. Группа  $G \cong S_4(9)$ . Из [7, таблица 8.12, таблица 8.13] следует, что в симплектической группе  $Sp_4(9)$  имеется максимальная подгруппа  $Sp_2(81) : 2$ , поэтому группа  $G$  содержит максимальную разрешимую подгруппу  $41 : 4$ . Группа  $Sp_4(9)$  также содержит максимальную подгруппу  $GL_2(9) : 2$ . Из списка максимальных подгрупп группы  $Sp_4(9)$  легко заключить, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ .

10. Группа  $G \cong S_6(2)$ . Согласно [4, стр. 46], группа  $G$  содержит максимальные подгруппы  $2^6 : L_3(2)$  и  $S_3 \times S_6$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$ .

11. Группа  $G \cong O_8^+(2)$ . Согласно [4, стр. 85], группа  $G$  содержит максимальную подгруппу  $S_6(2)$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2, 3\}$ .

12. Группа  $G \cong U_3(5)$ . Согласно [4, стр. 34], группа  $G$  содержит максимальные подгруппы  $A_7$  и  $A_6 \cdot 2_3$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что центр графа разрешимости данной группы пуст.

13. Группа  $G \cong U_3(8)$ . Согласно [4, стр. 66], группа  $G$  содержит максимальные разрешимые подгруппы  $19 : 3$  и  $2^{3+6} : 21$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$ .

14. Группа  $G \cong U_3(9)$ . Согласно [4, стр. 79], группа  $G$  содержит максимальные разрешимые подгруппы  $73 : 3$  и  $10^2 : S_3$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$ .

15. Группа  $G \cong U_4(3)$ . Согласно [4, стр. 52], группа  $G$  содержит максимальные подгруппы  $A_7$  и  $3^4 : A_6$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$ .

16. Группа  $G \cong U_5(2)$ . Согласно [4, стр. 73], группа  $G$  содержит максимальные подгруппы  $L_2(11)$  и  $2^{4+4} : (3 \times A_5)$ . Из перечня максимальных подгрупп группы  $G$  следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{5\}$ .

17. Группа  $G \in \{G_2(3), Sz(8), Sz(32), {}^3D_4(2), {}^2F_4(2)'\}$ . Согласно [4, стр. 61], группа  $G_2(3)$  сдержит максимальные подгруппы  $L_2(13)$ ,  $2^3 : L_3(2)$  и  $L_2(8) : 3$ . Из перечня ее максимальных подгрупп следует, что  $Z(\Gamma_{sol}(G_2(3))) = \{2, 3\}$ . Остальные группы были рассмотрены в теореме 1. Порядок центра группы  ${}^2F_4(2)'$  равен 2, центры остальных групп меньше 2.

Теорема 3 непосредственно следует из лемм 1, 2 и 3.  $\square$

## 6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ.

**Замечание 1.** Как следует из леммы 3, группы  $S_6(2)$ ,  ${}^2F_4(2)'$  и  $\Omega_8^+(2)$  являются контрпримерами к предположению первого автора о том, что число вершин в центре графа  $\Gamma_{sol}(G)$  для группы лиева типа над полем  $GF(q)$  характеристики  $p$  ограничено числом  $q - 1$ . Вероятно, существует линейная граница для числа вершин в центре графа разрешимости для простой группы лиева типа в терминах поля определения. Как видно из приведенных выше результатов, для исключительных простых групп лиева типа это так.

**Замечание 2.** В работе Б.Амберга и Л.Казарина [10] утверждается что число независимости  $t_s(G)$  графа группы  $G = B = F_2$  равно 7. Более внимательное изучение показало, что  $t_s(G) = 6$ . Перечислим вершины, входящие в максимальную систему независимых вершин этого графа:  $\{47, 31, 19, 17, 13, 11\}$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке ВИП-008 ЯрГУ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта Ф20Р-291.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Carter R.W., *Conjugacy classes in the weil group* Compositio Mathematica **25:1** (1972)1 – 59.
- [2] N. V. Maslova, I. N. Belousov, N. A. Minigulov. *Open questions formulated at the 13th School-Conference on Group Theory Dedicated to V. A. Belonogov's 85th Birthday*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN, 2020, **26:3** (2020)275–285.
- [3] Abe S., Iiyori N., *A generalization of prime graphs of finite groups*, Hokkaido Math. J. **29:2** (2000), 391 – 407.
- [4] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups* London.: Clarendon, 1985. - 252 p.
- [5] Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M., *Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type*, Proc. London Math. Soc. **65** (1992), 297 – 325.
- [6] Kondrat'ev A.S., Khramtsov I. V., *On finite tetraprimary groups*, Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), **279, suppl. 1** (2012), 43–61.
- [7] Wilson R.A. The finite simple groups. *Springer: Graduate text in mathematics*, **251** – 2009. 298p.
- [8] Huppert B. *Endliche Gruppen I*, Berlin, Springer, 1967, Band 134. 793p.
- [9] Vasiliev A.V., Vdovin E.P. *An adjacency criterion for the prime graph of a finite simple group* Algebra and Logic **44:2** (2005), 381 – 406.
- [10] Amberg B., Kazarin L., *On the soluble graph of a finite simple group*, Communications in Algebra **41** (2013) 2297 – 2309.

ЛЕВ СЕРГЕЕВИЧ КАЗАРИН  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
Советская, 14,  
15003, Ярославль, Россия  
*Email address: lsk46@mail.ru*

Валентин Николаевич Тютянов  
Гомельский филиал Международного университета "МИТСО",  
пр. Октября, 46А,  
246029, Гомель, Беларусь  
*Email address: vtutanov@gmail.com*