S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

*Том **, стр. 144–144 (2021)* УДК 517.98+530.1
DOI 10.33048/semi.2021.16.xxx MSC 60K35,
82B26

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ТРИ

М.М.Рахматуллаев, Ж.Д.Дехконов

Abstract. The existence of weakly periodic Gibbs measures is proved for the model Ising on a Cayley tree of order three, relative to the normal divisor of index four.

Keywords: Cayley tree, Gibbs measure, Ising model, weakly periodic measure

1. Введение

Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Если существует более, чем одна мера Гиббса, то говорят, что существуют фазовые переходы. Основная проблема для данного Гамильтониана - описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. Эти меры, в основном, были трансляционно-инвариантными, либо периодическими с периодом два. Более того, для многих моделей на дереве Кэли доказано, что множество периодических мер Гиббса очень бедно, т. е. существуют периодические гиббсовские меры с периодом два. В работах [1] – [4] для модели Изинга описаны трансляционно-инвариантные меры Гиббса на дереве Кэли. Описанию периодических гиббсовских мер для некоторых моделей с конечным числом радиуса взаимодействия, посвящены работы [5] – [11].

Чтобы получить более широкое множество гиббсовских мер, в работах [16]-[19] введены более общие понятия периодической меры Гиббса, т. е. слабо периодические гиббсовские меры и доказано существование таких мер для модели

М.М.Рахматуллаев, Ж.Д.Дехконов, Существование слабо периодических мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли порядка три.

Received January, 1, 2021, published March, 1, 2021.

Изинга на дереве Кэли порядка $k \geq 4$. В работах [1], [12], [19] изучены континуальные множества непериодических мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли.

В работе [11] для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k \geq 2$ найдены новые классы гиббсовских мер, подобных к слабо периодическим.

В работах [13] и [15] доказано, что на дереве Кэли порядка $k \geq 2$ относительно нормального делителя индекса два не существуют слабо периодические меры Гиббса.

В работах [20] и [21] изучена слабо периодические меры Гиббса для модели Поттса.

В данном статье изучаются слабо периодические меры Гиббса для модели Изинга на дерево Кэли порядка три, относительно нормального делителя индекса четыре.

Структура работы: в пункте 2 даются необходимые определения и постановка задачи. Пункт 3 посвящен изучению существования слабо периодических мер Гиббса на дерево Кэли порядка три.

2. Определения и постановка задачи

Пусть $\tau^k = (V, L), k \geq 1$ — дерево Кэли порядка k, т.е бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит равно $k+1$ ребер, где V — множество вершин, L — множество ребер τ^k. Известно, что τ^k можно представить как G_k — свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка. Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим $W_n = \{x \in V | d(x^0, x) = n\}$, $V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m$, $L_n = \{< x, y > \in L | x, y \in V_n\}$, где $d(x, y)$—расстояние между x и y на дереве Кэли, т.е. число ребер пути, соединяющего x и y .

Пусть $\Phi = \{-1, 1\}$ и $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ — конфигурация, то есть $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A, принимающих значения из $\Phi = \{-1, 1\}$.

Рассмотрим гамильтониан модели Изинга

$$H(\sigma) = -J \sum_{<x,y> \in L} \sigma(x)\sigma(y), \tag{1}$$

где $J \in R, < x, y >$ — ближайшие соседи.

Известно, что каждой мере Гиббса модели Изинга соответствует совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$ удовлетворяющих,

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta), \tag{2}$$

где $S(x)$— множество *прямых потомков*, точки $x \in V$ и $f(x, \theta) = arcth(\theta thx)$, $\theta = th(J\beta)$, $\beta = \frac{1}{T}, T > 0$ температура (см.[1]-[4]).

Пусть $G_k/\widehat{G}_k = \{H_1, ..., H_r\}$ — фактор группа, где $\widehat{G}_k$ — нормальный делитель индекса $r \geq 1$. Для $x \in G_k$ обозначим через $x_\downarrow = \{y \in G_k :< x, y >\} \backslash S(x)$.

Определение 1. *Совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$-периодической ($\widehat{G}_k$-слабо периодической), если $h_x = h_i$, при $x \in H_i$ ($h_x = h_{ij}$, при $x \in H_i, x_\downarrow \in H_j$) для $\forall x \in G_k$. G_k-периодическая мера называется трансляционно-инвариантной мерой.*

Определение 2. *Говорят, что мера μ является $\widehat{G}_k$-(слабо) периодической, если она соответствует $\widehat{G}_k$-(слабо) периодической совокупности величин h.*

Цель работы— описать множество слабо периодических гиббсовских мер для модели Изинга на дереве Кэли порядка три.

3. Слабо периодические меры

Отметим, что слабо периодические меры Гиббса зависят от выбора нормального делителя.

Пусть $A \subset \{1, 2, ..., k+1\}$ и $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{четно}\}$, где $w_x(a_i)-$ число буквы a_i в слове $x \in G_k$, $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{ четно }\}$ и $G_k^{(4)} = H_A \bigcap G_k^{(2)}$– – соответствующий ему нормальный делитель индекса 4.

Рассмотрим фактор группу $G_k/G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$, где
$H_0 = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{ четно}, |x| - \text{ четно }\}$,
$H_1 = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{ нечетно}, |x| - \text{ четно }\}$,
$H_2 = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{ четно}, |x| - \text{ нечетно }\}$,
$H_3 = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{ нечетно}, |x| - \text{ нечетно }\}$.

Тогда, в силу (2), $G_k^{(4)}$-слабо периодическая совокупность h имеет вид

$$h_x = \begin{cases} h_1, & x \in H_3,\ x_\downarrow \in H_1, \\ h_2, & x \in H_1,\ x_\downarrow \in H_3, \\ h_3, & x \in H_3,\ x_\downarrow \in H_0, \\ h_4, & x \in H_0,\ x_\downarrow \in H_3, \\ h_5, & x \in H_1,\ x_\downarrow \in H_2, \\ h_6, & x \in H_2,\ x_\downarrow \in H_1, \\ h_7, & x \in H_2,\ x_\downarrow \in H_0, \\ h_8, & x \in H_0,\ x_\downarrow \in H_2, \end{cases} \tag{3}$$

где $h_j, j = \overline{1, 8}$ удовлетворяет систему уравнений:

$$\begin{cases} h_1 = (k-i)f(h_2, \theta) + if(h_4, \theta), \\ h_2 = (k-i)f(h_1, \theta) + if(h_6, \theta), \\ h_3 = (k-i+1)f(h_2, \theta) + (i-1)f(h_4, \theta), \\ h_4 = (k-i+1)f(h_7, \theta) + (i-1)f(h_3, \theta), \\ h_5 = (k-i+1)f(h_1, \theta) + (i-1)f(h_6, \theta), \\ h_6 = (k-i+1)f(h_8, \theta) + (i-1)f(h_5, \theta), \\ h_7 = (k-i)f(h_8, \theta) + if(h_5, \theta), \\ h_8 = (k-i)f(h_7, \theta) + if(h_3, \theta), \end{cases} \tag{4}$$

здесь $i = |A|$ — мощность множества A.

Пользуясь тем, что $f(h,\theta) = arcth(\theta thh) = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\theta)e^{2h}+(1-\theta)}{(1-\theta)e^{2h}+(1+\theta)}$, и обозначая $\alpha = \frac{1-\theta}{1+\theta}$, $z_i = e^{2h_i}$, где $i = \overline{1,4}$, из (4) получим следующую систему уравнений

$$
\left\{
\begin{array}{l}
z_1 = (\varphi(z_2))^{k-i}\cdot(\varphi(z_4))^{i},\\
z_2 = (\varphi(z_1))^{k-i}\cdot(\varphi(z_6))^{i},\\
z_3 = (\varphi(z_2))^{k-i+1}\cdot(\varphi(z_4))^{i-1},\\
z_4 = (\varphi(z_7))^{k-i+1}\cdot(\varphi(z_3))^{i-1},\\
z_5 = (\varphi(z_1))^{k-i+1}\cdot(\varphi(z_6))^{i-1},\\
z_6 = (\varphi(z_8))^{k-i+1}\cdot(\varphi(z_5))^{i-1},\\
z_7 = (\varphi(z_8))^{k-i}\cdot(\varphi(z_5))^{i},\\
z_8 = (\varphi(z_7))^{k-i}\cdot(\varphi(z_3))^{i},
\end{array}
\right.
\tag{5}
$$

где

$$
\varphi(z) = \frac{z+\alpha}{\alpha z+1}.
$$

Запишем систему уравнений (5) в виде

$$
\left\{
\begin{array}{l}
z_1 = (\varphi(z_2))^{k}\cdot\left(\frac{\varphi(z_4)}{\varphi(z_2)}\right)^{i},\\
z_2 = (\varphi(z_1))^{k}\cdot\left(\frac{\varphi(z_6)}{\varphi(z_1)}\right)^{i},\\
z_3 = (\varphi(z_2))^{k}\cdot\left(\frac{\varphi(z_4)}{\varphi(z_2)}\right)^{i-1},\\
z_4 = (\varphi(z_7))^{k}\cdot\left(\frac{\varphi(z_3)}{\varphi(z_7)}\right)^{i-1},\\
z_5 = (\varphi(z_1))^{k}\cdot\left(\frac{\varphi(z_6)}{\varphi(z_1)}\right)^{i-1},\\
z_6 = (\varphi(z_8))^{k}\cdot\left(\frac{\varphi(z_5)}{\varphi(z_8)}\right)^{i-1},\\
z_7 = (\varphi(z_8))^{k}\cdot\left(\frac{\varphi(z_5)}{\varphi(z_8)}\right)^{i},\\
z_8 = (\varphi(z_7))^{k}\cdot\left(\frac{\varphi(z_3)}{\varphi(z_7)}\right)^{i}.
\end{array}
\right.
\tag{6}
$$

Разделив в этой системе уравнений первое уравнение на третье, второе на пятое, шестое на седьмое, четвертое на восьмое, получим следующую систему уравнений:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{z_1}{z_3} = \frac{\varphi(z_4)}{\varphi(z_2)},\\
\frac{z_2}{z_5} = \frac{\varphi(z_6)}{\varphi(z_1)},\\
\frac{z_6}{z_7} = \frac{\varphi(z_8)}{\varphi(z_5)},\\
\frac{z_4}{z_8} = \frac{\varphi(z_7)}{\varphi(z_3)},
\end{array}
\right.
$$

Используя эти соотношения, систему (6) можно записать так:

$$
(7) \qquad \begin{cases}
z_1 = (\varphi(z_2))^k \cdot \left(\frac{z_1}{z_3}\right)^i, \\
z_2 = (\varphi(z_1))^k \cdot \left(\frac{z_2}{z_5}\right)^i, \\
z_3 = (\varphi(z_2))^k \cdot \left(\frac{z_1}{z_3}\right)^{i-1}, \\
z_4 = (\varphi(z_7))^k \cdot \left(\frac{z_8}{z_4}\right)^{i-1}, \\
z_5 = (\varphi(z_1))^k \cdot \left(\frac{z_2}{z_5}\right)^{i-1}, \\
z_6 = (\varphi(z_8))^k \cdot \left(\frac{z_7}{z_6}\right)^{i-1}, \\
z_7 = (\varphi(z_8))^k \cdot \left(\frac{z_7}{z_6}\right)^i, \\
z_8 = (\varphi(z_7))^k \cdot \left(\frac{z_8}{z_4}\right)^i.
\end{cases}
$$

Из первого уравнения системы (7) найдем z_3, из второго - z_5, из седьмого - z_6, из восьмого z_4 и, подставив их в восьмое, седьмое, второе и первое уравнения системы (5) соответственно, получим

$$
(8) \qquad \begin{cases}
z_1 = \left(\varphi\left(z_8^{\frac{i-1}{i}} \cdot (\varphi(z_7))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i \cdot (\varphi(z_2))^{k-i}, \\
z_2 = \left(\varphi\left(z_7^{\frac{i-1}{i}} \cdot (\varphi(z_8))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i \cdot (\varphi(z_1))^{k-i}, \\
z_7 = \left(\varphi\left(z_2^{\frac{i-1}{i}} \cdot (\varphi(z_1))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i \cdot (\varphi(z_8))^{k-i}, \\
z_8 = \left(\varphi\left(z_1^{\frac{i-1}{i}} \cdot (\varphi(z_2))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i \cdot (\varphi(z_7))^{k-i}.
\end{cases}
$$

Рассмотрим отображение $W : R^4 \to R^4$, определенное следующим образом:

$$
(9) \qquad \begin{cases}
z_1' = \left(\varphi\left(z_8^{\frac{i-1}{i}} \cdot (\varphi(z_7))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i \cdot (\varphi(z_2))^{k-i}, \\
z_2' = \left(\varphi\left(z_7^{\frac{i-1}{i}} \cdot (\varphi(z_8))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i \cdot (\varphi(z_1))^{k-i}, \\
z_7' = \left(\varphi\left(z_2^{\frac{i-1}{i}} \cdot (\varphi(z_1))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i \cdot (\varphi(z_8))^{k-i}, \\
z_8' = \left(\varphi\left(z_1^{\frac{i-1}{i}} \cdot (\varphi(z_2))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i \cdot (\varphi(z_7))^{k-i}.
\end{cases}
$$

Легко доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Отображение W имеет следующие инвариантные множества*

$$
I_1 = \{z \in R^4 : z_1 = z_2 = z_7 = z_8\}, \quad I_2 = \{z \in R^4 : z_1 = z_7; z_2 = z_8\},
$$

$$
I_3 = \{z \in R^4 : z_1 = z_2; z_7 = z_8\}, \quad I_4 = \{z \in R^4 : z_1 = z_8; z_2 = z_7\}.
$$

Замечание 1. *Из определений 1 и 2 следует, что в случае I_2 (или I_j, $j = 3, 4$) слабо периодическая совокупность величин не совпадает с периодической, если хотя бы одно из равенств $z_1 = z_3, z_2 = z_5, z_4 = z_8, z_6 = z_7$ не выполняется.*

Лемма 2. *Если на инвариантных множествах $I_j, j = 2, 3, 4$ существуют слабо периодические меры Гиббса, то они являются либо трансляционно-инвариантными, либо слабо периодическими (не периодическими).*

Proof. Рассмотрим инвариантное множество I_3. Пусть $z_1 = z_2; z_7 = z_8$. Из (5) имеем $z_4 = z_6; z_3 = z_5$. Если $z_1 = z_3$, тогда имеем $z_2 = z_5$. Из равенства $z_2 = z_5$ и из второго и пятого уравнений системы (5) получим $z_1 = z_6$. Из равенства $z_1 = z_3$ и из первого и третьего уравнений системы (5) получим $z_2 = z_4$. Следовательно, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = z_7 = z_8$, т.е. соответствующие меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными. Если $z_1 \neq z_3$, то ясно, что соответствующие меры Гиббса являются слабо периодическими. В остальных случаях $I_j, j = 2, 4$ лемма доказывается аналогичным образом. □

Теорема 1. *Для модели Изинга все $G_k^{(4)}$ – слабо периодические меры Гиббса, соответствующие совокупности величин из I_1, являются трансляционно-инвариантными.*

Доказательство. Очевидно.

Теорема 2. *Пусть $i = 1$. При $k = 3$ существуют критические значения $\alpha_{cr} = 2, \alpha_c = \frac{\sqrt{3\sqrt{46}-2-\sqrt{402-12\sqrt{46}}}}{2}$ (≈ 0.33) такие, что для модели Изинга:*

a) При $\alpha \in (0, \alpha_c) \cup \left(\alpha_{cr}, \alpha_c^{-1}\right)$ – существуют не менее три $G_k^{(4)}$ -слабо периодические меры Гиббса;

b) При $\alpha \in [\alpha_c, \alpha_{cr}] \cup \left\{\alpha_{cr}^{-1}\right\}$ – существует не менее одно $G_k^{(4)}$ - слабо периодическая мера Гиббса;

c) При $\alpha \in \left(\alpha_{cr}^{-1}, +\infty\right)$ – существуют не менее пять $G_k^{(4)}$ - слабо периодические меры Гиббса;

Доказательство.

Пусть $k = 3, i = 1,\ \alpha_{cr} = 2, \alpha_c = \frac{\sqrt{3\sqrt{46}-2-\sqrt{402-12\sqrt{46}}}}{2}$ (≈ 0.33). Учитывая $\varphi(z) = \frac{z+\alpha}{\alpha z+1}$ и на I_2 из системы уравнений (8) получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \varphi\left(\varphi^3\left(z_1\right)\right) \cdot \varphi^2\left(z_2\right), \\ z_2 = \varphi\left(\varphi^3\left(z_2\right)\right) \cdot \varphi^2\left(z_1\right). \end{array} \right. \tag{10}$$

Отметим, что $\alpha > 0$. Введем обозначение $x = \frac{z_1+\alpha}{\alpha z_1+1}, y = \frac{z_2+\alpha}{\alpha z_2+1}$. Тогда из (10) получим следующую систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = \psi(y), \\ y^2 = \psi(x), \end{array} \right. \tag{11}$$

где $\psi(x) = (\frac{x-\alpha}{1-\alpha x}) \cdot (\frac{\alpha x^3+1}{x^3+\alpha})$. Очевидно, что при α котором $\psi(x) < 0$ или $\psi(y) < 0$ система уравнений (11) не имеет решение.

Чтобы найти слабо периодическую меру Гиббса, не являющейся трансляционно-инвариантной, надо найти корни

$$x^2 - \psi(\sqrt{\psi(x)}) = 0, \tag{12}$$

отличающийся от корней уравнения

$$x^2 - \psi(x) = 0. \tag{13}$$

Легко видеть, что уравнения (12) и (13) соответственно равносильны к следующим уравнениям

$$[x-1] \cdot [x+1] \cdot [x^2+1] \cdot [\alpha x^2 - x + \alpha] \cdot [x^2 - \alpha x + 1] \cdot \tag{14}$$

$$\cdot [(\alpha^2+1)x^4 + 2ax^3 + 2ax + a^2 + 1] \cdot [(\alpha^2+1)x^4 - 6\alpha x^3 + 4(\alpha^2+1)x^2 - 6\alpha x + \alpha^2 + 1] \cdot$$

$$\cdot[\alpha^4x^{20}-(\alpha^5+\alpha^3)x^{19}+3\alpha^4x^{18}+3(\alpha^5+\alpha^3)x^{17}-(4\alpha^6-5\alpha^4+4\alpha^2)x^{16}-12(\alpha^5+\alpha^3)x^{15}+$$
$$+(16\alpha^6+52\alpha^4+16\alpha^2)x^{14}-(8\alpha^7+44\alpha^5+44\alpha^3+8\alpha)x^{13}+(8\alpha^6+2\alpha^4+8\alpha^2)x^{12}+$$
$$+(8\alpha^7+54\alpha^5+54\alpha^3+8\alpha)x^{11}-(4\alpha^8+40\alpha^6+118\alpha^4+40\alpha^2+4)x^{10}+$$
$$+(8\alpha^7+54\alpha^5+54\alpha^3+8\alpha)x^9+(8\alpha^6+2\alpha^4+8\alpha^2)x^8-(8\alpha^7+44\alpha^5+44\alpha^3+8\alpha)x^7+$$
$$+(16\alpha^6+52\alpha^4+16\alpha^2)x^6-12(\alpha^5+\alpha^3)x^5-(4\alpha^6-5\alpha^4+4\alpha^2)x^4+$$
$$+3(\alpha^5+\alpha^3)x^3+3\alpha^4x^2-(\alpha^5+\alpha^3)x+\alpha^4]=0,$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(\alpha x^2-x+\alpha)=0. \tag{15}$$

Из выше сказанного, для слабо периодических мер Гиббса, не являющейся трансляционно-инвариантной, получим следующее уравнение:

$$[x^2-\alpha x+1]\cdot[(\alpha^2+1)x^4+2\alpha x^3+2\alpha x+\alpha^2+1]\cdot \tag{16}$$
$$\cdot[(\alpha^2+1)x^4-6\alpha x^3+4(\alpha^2+1)x^2-6\alpha x+\alpha^2+1]\cdot$$
$$\cdot[\alpha^4x^{20}-(\alpha^5+\alpha^3)x^{19}+3\alpha^4x^{18}+3(\alpha^5+\alpha^3)x^{17}-(4\alpha^6-5\alpha^4+4\alpha^2)x^{16}-12(\alpha^5+\alpha^3)x^{15}+$$
$$+(16\alpha^6+52\alpha^4+16\alpha^2)x^{14}-(8\alpha^7+44\alpha^5+44\alpha^3+8\alpha)x^{13}+(8\alpha^6+2\alpha^4+8\alpha^2)x^{12}+$$
$$+(8\alpha^7+54\alpha^5+54\alpha^3+8\alpha)x^{11}-(4\alpha^8+40\alpha^6+118\alpha^4+40\alpha^2+4)x^{10}+$$
$$+(8\alpha^7+54\alpha^5+54\alpha^3+8\alpha)x^9+(8\alpha^6+2\alpha^4+8\alpha^2)x^8-(8\alpha^7+44\alpha^5+44\alpha^3+8\alpha)x^7+$$
$$+(16\alpha^6+52\alpha^4+16\alpha^2)x^6-12(\alpha^5+\alpha^3)x^5-(4\alpha^6-5\alpha^4+4\alpha^2)x^4+$$
$$+3(\alpha^5+\alpha^3)x^3+3\alpha^4x^2-(\alpha^5+\alpha^3)x+\alpha^4]=0$$

Далее, рассмотрим выражения в первой скобке левой части (16). Оно равняется нулю, только при

$$x_{1,2}=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}}{2}. \tag{17}$$

Легко проверить, что $x_{1,2}$ при $\alpha>2=\alpha_{cr}$ получают положительные значения.

Вторую скобку (16) перепишем в следующем виде

$$(\alpha^2+1)x^4+2\alpha x^3+2\alpha x+\alpha^2+1=0$$

Очевидно, что от последного уравнения при $\alpha>0$ не имеет положительного корня.

Теперь будем расмотреть выражения в третьем скобке и будемь искать все положительные корни уравнения 4-го порядка.

$$(\alpha^2+1)x^4-6\alpha x^3+4(\alpha^2+1)x^2-6\alpha x+\alpha^2+1=0. \tag{18}$$

(18) симметричная уравнения, для решения уравнение такого типа воспользуемся следующей заменой переменных

$$x+\frac{1}{x}=t, \tag{19}$$

и из уравнение (18) получим квадратное уравнение вида (20).

$$t^2-\frac{6}{(\alpha+\frac{1}{\alpha})}t+2=0 \tag{20}$$

Здесь для выражения знаменателя второго коэффициента выполняются следующая условия $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$, так как $\alpha>0$.

Пусть $\alpha+\frac{1}{\alpha}=2$, тогда уравнения (20) имеет решения $t_1=2, t_2=1$. Из $x>0$ и (19) имеем $t\geq 2$. При $t=2$ следует $x=1$. Заметим, что для $x=1,\alpha=1$ соответствует трансляционно-инвариантная мера Гиббса.

Пуст $\alpha+\frac{1}{\alpha}>2$, тогда из (20) получим $t^2-lt+2=0$, где $l<3$.

Легко проверить, что последние квадратные уравнения имеют решения которые меньше 2 (если существуют). Но по (19) $t\geq 2$. Следовательно, при $\alpha+\frac{1}{\alpha}>2$, уравнение (18) не имеет положительного решения.

Выражения четвертой скобки многочлен 20-го порядка тоже симметрично относительно от коэффицентов.

$$
\begin{aligned}
(21)\quad & \alpha^4x^{20}-(\alpha^5+\alpha^3)x^{19}+3\alpha^4x^{18}+3(\alpha^5+\alpha^3)x^{17}-(4\alpha^6-5\alpha^4+4\alpha^2)x^{16}-\\
&-12(\alpha^5+\alpha^3)x^{15}++(16\alpha^6+52\alpha^4+16\alpha^2)x^{14}-(8\alpha^7+44\alpha^5+44\alpha^3+8\alpha)x^{13}+\\
&+(8\alpha^6+2\alpha^4+8\alpha^2)x^{12}+(8\alpha^7+54\alpha^5+54\alpha^3+8\alpha)x^{11}-(4\alpha^8+40\alpha^6+118\alpha^4+40\alpha^2+4)x^{10}+\\
&+(8\alpha^7+54\alpha^5+54\alpha^3+8\alpha)x^9+(8\alpha^6+2\alpha^4+8\alpha^2)x^8-(8\alpha^7+44\alpha^5+44\alpha^3+8\alpha)x^7+\\
&+(16\alpha^6+52\alpha^4+16\alpha^2)x^6-12(\alpha^5+\alpha^3)x^5-(4\alpha^6-5\alpha^4+4\alpha^2)x^4+\\
&+3(\alpha^5+\alpha^3)x^3+3\alpha^4x^2-(\alpha^5+\alpha^3)x+\alpha^4=0.
\end{aligned}
$$

Воспользуемся следующей заменой переменных

$$
x+\frac{1}{x}=\xi. \tag{22}
$$

После замене переменных из уравнения (21) получим следующие уравнения 10-го порядка.

$$
\begin{aligned}
&\alpha^4\xi^{10}-(\alpha^5+\alpha^3)\xi^9-7\alpha^4\xi^8+(12\alpha^5+12\alpha^3)\xi^7-\left(4\alpha^6-22\alpha^4+4\alpha^2\right)\xi^6-\\
&-(60\alpha^5+60\alpha^3)\xi^5+(40\alpha^6+32\alpha^4+40\alpha^2)\xi^4-(8\alpha^7-88\alpha^5-88\alpha^3+8\alpha)\xi^3-\\
&-(92\alpha^6+184\alpha^4+92\alpha^2)\xi^2+(32\alpha^7+96\alpha^5+96\alpha^3+32\alpha)\xi-(4\alpha^8+24\alpha^6+14\alpha^4+24\alpha^2+4)=0.
\end{aligned}
$$

Введем обозначение

$$
\begin{aligned}
(23)\quad & g(\xi,\alpha)=\alpha^4\xi^{10}-(\alpha^5+\alpha^3)\xi^9-7\alpha^4\xi^8+(12\alpha^5+12\alpha^3)\xi^7-(4\alpha^6-22\alpha^4+4\alpha^2)\xi^6-\\
&-(60\alpha^5+60\alpha^3)\xi^5+(40\alpha^6+32\alpha^4+40\alpha^2)\xi^4-(8\alpha^7-88\alpha^5-88\alpha^3+8\alpha)\xi^3-(92\alpha^6+184\alpha^4+92\alpha^2)\xi^2+\\
&+(32\alpha^7+96\alpha^5+96\alpha^3+32\alpha)\xi-(4\alpha^8+24\alpha^6+14\alpha^4+24\alpha^2+4)
\end{aligned}
$$

Легко проверить, что $g(2,\alpha)<0$ при $\alpha\in \mathrm{E}=(0,\alpha_c)\cup(\alpha_c^{-1},+\infty)$.

Действительно,предположим

$$
g(2,\alpha)=-4\alpha^8-8\alpha^6+402\alpha^4-8\alpha^2-4<0.
$$

Отсюда получим,

$$
4(\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4})+8(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2})-402>0, \tag{24}
$$

Введем обозначение $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=t, \alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}=t^2-2$. Тогда (24) имеет следующий вид

$$
2t^2+4t-205>0. \tag{25}
$$

Решив (25) и учытивая $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=t$. Получим следуюшие $\mathrm{E}=(0,\alpha_c)\cup(\alpha_c^{-1},+\infty)$, т.е при $\alpha\in\mathrm{E}$ выполняется $g(2,\alpha)<0$.

Так как, $\lim\limits_{\xi\to+\infty}g(\xi,\alpha)=+\infty$. Отсюда получим, что уравнение (23) при $\alpha\in\mathrm{E}$ имеет хотя бы одно решение которое больще 2. Из (22) получим, что уравнение (21) при $\alpha\in\mathrm{E}$ имеет два положительного решения.

Заключение: Система уравнений (10) при $0 < \alpha \leq \alpha_c$ имеет хотя бы трех положительных $(1,1),(z_3^{(1)},z_4^{(1)}),(z_3^{(2)},z_4^{(2)})$ решений, при $\alpha_c \leq \alpha \leq 2$ одна положительная $(1,1)$ решения, при $2 < \alpha < \alpha_c^{-1}$ хотя бы трех положительных $(1,1),(z_1^{(1)},z_2^{(1)}),(z_1^{(2)},z_2^{(2)})$ решений, при $\alpha > \alpha_c^{-1}$ хотя бы пять положительных $(1,1),(z_1^{(1)},z_2^{(1)}),(z_1^{(2)},z_2^{(2)})$, $(z_3^{(1)},z_4^{(1)}),(z_3^{(2)},z_4^{(2)})$ решений.

Теорема доказана.

Замечание 2. 1) В теореме 2 одна из $G_k^{(4)}$-слабо периодических мер является трансляционно-инвариантной. Все остальные меры являются $G_k^{(4)}$-слабо периодическими (не трансляционно-инвариантными).

2) Заметим, что слабо периодическая мера Гиббса зависит от выбора нормального делителя группы G_k. В случае $|A| = k+1$ соответствующий нормальный делитель $G_k^{(4)}$ совпадает с $G_k^{(2)}$, что и есть нормальный делитель индекса два, а в этом случае слабо периодическая мера Гиббса совпадает с периодической, которая была изучена в работе [5].

References

[1] U.A.Rozikov, *Gibbs measures on Cayley trees*, World scientific.,2013.
[2] П.М.Блехер, Н.Н.Ганиходжаев *ТВП*, **35**:2 (1990), 220-230.
[3] F.Spitzer *Ann. Prob.*, **3** (1975), 387-398.
[4] S.Zachary, *Ann. Prob.*, **11**:4 (1983), 894-903.
[5] У.А.Розиков *ТМФ*, **112**:1 (1997),170-176.
[6] У.А.Розиков *ТМФ*, **118**:1 (1999),95-104.
[7] U.A.Rozikov, Yu.M.Suhov *Inf. Dim. Anal.Quant.Prob.* **9**:3 (2006), 471-488.
[8] J.B.Martin, U.A.Rozikov, Yu.M.Suhov *Journal Nonlinear Mathematical Physics* **12**:3 (2005), 432-448.
[9] У.А.Розиков, *Сибирский МЖ* **39**:2 (1998), 427-435.
[10] F.M.Mukhamedov, U.A.Rozikov, *Jour. Stat. Phys.* **114**:3/4 (2004), 825-848.
[11] D.Gandolfo, J.Ruiz, S.Shlosman. *Journal of Statistical Physics, Springer Verlag,* 2012, 148 (06), pp.999-1005
[12] У.А.Розиков, М.М.Рахматуллаев, *ТМФ*, **156**:2 (2008), 292–302.
[13] М.М.Рахматуллаев, *Известия вузов. Математика.* **11**, (2015), 54-63.
[14] М.М.Рахматуллаев, *ТМФ*, **183**:3 (2015), 434–440.
[15] M.M.Rahmatullaev *Journal of Physics: Conference series.* **697** (2016), 012020.
[16] Малышев В.А., Минлос Р.А. *Гиббсовские случайные поля* (Наука.М., 1985).
[17] Рюэль Д. *Статистическая механика* (Мир.М., 1971).
[18] de Jongh L.J., Miedema A.R. *Experiments on simple magnetic model systems,* Adv. Phys. **23**(1), 1–260 (1974).
[19] Фейман Р. *Статистическая механика* (Мир.М., 1978).
[20] Рахматуллаев М. М. Существование слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. 2014. Т. 180, № 3. С. 1018–1028.
[21] Рахматуллаев М. М. Слабо периодических мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли // Сибирский математический журнал 2015. Том 56, № 5. С. 1163–1170.

Музаффар Мухаммаджанович Рахматуллаев
Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан,
ул. Мирзо Улугбек, 81,
100170, Ташкент, Узбекистан.
E-mail address: mrahmatullaev@rambler.ru

Жасурбек Дилмурод угли Дехконов
Андижанский государственный университет,
ул. УНИВЕРСИТЕТСКАЯ, 129,
170100, Андижан, Узбекистан.
E-mail address: dehqonovjasur@bk.ru