S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.958
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35Q70

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА 4-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ТРЕХМЕРНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ ИЗ ВСЕХ ПЕРЕНОСОВ ПО ПРОСТРАНСТВУ И ПО ДАВЛЕНИЮ

Д.Т. СИРАЕВА

Abstract. The gas dynamics equations with pressure in the form of the sum of density and entropy functions are considered. The admissible group of transformations is expanded due to the pressure translation. The Lie algebra corresponding to the group is 12-dimensional. Invariant submodels of rank 1 generated by 3-dimensional 4-parameter subalgebras of all translations in space and pressure translation are constructed. Three families of exact solutions are found which describe the motion of particles with a linear velocity field with inhomogeneous deformation. The moment of time of the presence or absence of particles collapse for each family of solutions are found. In a particular case, the trajectories of particles motion are constructed. The volume of particles at the initial moment of time limited by the sphere is isolated. It has been proved that at any other time moments the volume turns into an ellipsoid and the particles volume value does not change with time.

Keywords: gas dynamics equations, equation of state, admissible subalgebra, invariant submodel, exact solution.

1. Введение

Изучение уравнений механики сплошных сред средствами группового анализа было обосновано в работе академика РАН Л.В. Овсянникова «Программа

Siraeva, D.T., Invariant solutions of the gas dynamics equations on 4-parametric three-dimensional subalgebras containing all translations in space and pressure translation.

Работа поддержана грантом РФФИ (№ 18-29-10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052).

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

Подмодели» [1]. В рамках данной программы рассматриваются уравнения газовой динамики:

$$D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0, \quad Dp + \rho f_\rho \mathrm{div}\vec{u} = 0, \tag{1}$$

где $D = \partial_t + (\vec{u}\cdot\nabla)$ — оператор полного дифференцирования; t — время; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент по пространственным независимым переменным $\vec{x}$; $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление. В декартовой системе координат

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \nabla = \vec{i}\partial_x + \vec{j}\partial_y + \vec{k}\partial_z, \quad \vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — ортонормированный базис.

Известно, что система (1) с уравнением состояния общего вида

$$p = f(\rho, S)$$

допускает 11-мерную алгебру Ли L_{11}. Всевозможные виды уравнений состояния, расширяющих 11-мерную алгебру Ли, перечислены в [1]. В работе [2] приведены все неизоморфные алгебры Ли групповой классификации по уравнению состояния, для каждой из которых способ перечисления неподобных подалгебр окончательно сформулирован в [3]. Для 11-мерной алгебры Ли построены инвариантные подмодели ранга 3, 1 [4, 5] и ранга 2 [6, 7].

В настоящей работе рассматривается система (1) с уравнением состояния специального вида [1]

$$p = f(\rho) + h(S), \quad f = \rho^2 F'(\rho). \tag{2}$$

При этом термодинамические параметры идеальной среды удельной внутренней энергии и температура задаются формулами:

$$\varepsilon = F(\rho) - \rho^{-1}h(S) + g(S), \quad T = g'(S) - \rho^{-1}h'(S).$$

Система (1), (2) допускает преобразование эквивалентности для функции $h(S)$. Пусть преобразование действует так, что $\tilde{S} = h(S)$. При этом с обратной функцией $S = \tilde{h}(\tilde{S})$ справедливы формулы

$$\tilde{S} = h(\tilde{h}(\tilde{S})), \quad T(\rho, S) = T(\rho, \tilde{h}(\tilde{S})) = \tilde{T}(\rho, \tilde{S}),$$
$$\varepsilon(\rho, S) = \varepsilon(\rho, \tilde{h}(\tilde{S})) = \tilde{\varepsilon}(\rho, \tilde{S}), \quad g(S) = \tilde{g}(\tilde{S}),$$
$$p(\rho, S) = p(\rho, \tilde{h}(\tilde{S})) = \tilde{p}(\rho, \tilde{S}).$$

Получаются уравнения состояния вида

$$\tilde{p} = f(\rho) + \tilde{S}, \quad \tilde{\varepsilon} = F(\rho) - \rho^{-1}\tilde{S} + \tilde{g}(\tilde{S}), \quad \tilde{T} = \frac{\tilde{g}'(\tilde{S})}{\tilde{h}'(\tilde{S})} - \frac{1}{\rho\tilde{h}'(\tilde{S})}.$$

Из равенства (2) определяется энтропия S. Последнее уравнение системы (1) может быть заменено уравнением для энтропии

$$DS = 0.$$

Уравнения (1) с уравнением состояния общего вида инвариантны при действии группы Галилея, расширенной равномерным растяжением [4]:

(3)
1^o. $\vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{a}$ (переносы по пространству),
2^o. $t' = t + a_0$ (перенос по времени),
3^o. $\vec{x}\,' = O\vec{x}, \vec{u}\,' = O\vec{u}, OO^T = E, \det O = 1$ (вращения),
4^o. $\vec{x}\,' = \vec{x} + t\vec{b}, \vec{u}\,' = \vec{u} + \vec{b}$ (Галилеевы переносы),
5^o. $t' = ct, \vec{x}\,' = c\vec{x}$ (равномерное растяжение).

Система (1), (2) инвариантна также относительно переноса по давлению p [4]:

$$6^o.\ p' = p + p_0. \tag{4}$$

Любое решение системы (1), (2) с точностью до преобразований (3), (4) снова будет решением. Поэтому в дальнейшем найденные решения будут рассматриваться с точностью до преобразований (3), (4).

Группе преобразований (3), (4) соответствует 12-мерная алгебра Ли L_{12}, базис которой в декартовой системе координат имеет вид [1]

$$\begin{gathered}
X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \\
X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w, \\
X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \quad X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \\
X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \quad X_{10} = \partial_t, \\
X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \quad Y_1 = \partial_p.
\end{gathered}$$

Все подалгебры алгебры Ли L_{12} с точностью до внутренних автоморфизмов перечислены в оптимальной системе неподобных подалгебр в работе [8]. По одномерным, двумерным и трехмерным подалгебрам можно построить инвариантные подмодели системы (1), (2) ранга 3, 2, 1 соответственно. Ранг подмодели — число независимых переменных. Две двумерные подалгебры алгебры Ли L_{12} задают частично инвариантные подмодели ранга 3 дефекта 1, редукция которых к инвариантным подмоделям доказана в [9]. Инвариантные подмодели ранга 2 в каноническом виде для остальных двумерных подалгебр алгебры Ли L_{12} построены в [10, 11]. Пример описания движения частиц по решению инвариантной подмодели ранга 2 приведен в [12]. Инвариантные подмодели ранга 1 строятся по 3-мерным подалгебрам 3.N алгебры Ли L_{12}, где N — номер подалгебры.

Для двух подмоделей ранга 1, построенных по 3-мерным подалгебрам 3.42 ($a \neq 0$, $b = 0$) и 3.47 из L_{12}, получены точные решения [13].

Для уравнений газовой динамики с уравнением состояния с разделенной в произведение плотностью в работах [14, 15] построены инвариантные подмодели ранга 1. В случае политропного газа вычислены инварианты трехмерных подалгебр и классифицированы подмодели [16], 37 из которых исследованы в [17], а 95 инвариантных подмоделей рассмотрены в [18]. Для уравнений газовой динамики с уравнением состояния в виде давления, равного сумме степенной функции плотности и функции энтропии инвариантные подмодели ранга 1 классифицированы в [19]. В случае одноатомного газа были рассмотрены все трехмерные подалгебры, содержащие проективный оператор [20, 21]. Для 9 из них были построены инвариантные подмодели ранга один, представляющие из себя систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для оставшихся 3 подалгебр были построены регулярные частично-инвариантные подмодели и исследована их совместность.

Настоящая работа посвящена исследованию инвариантных подмоделей ранга 1, построенных на трехмерной 4-параметрической подалгебре 3.30 алгебры Ли L_{12} [8], содержащей все переносы по пространству и по давлению. Подмодели задают решения с линейным полем скоростей с неоднородной деформацией.

В работе [22] записаны подмодели движения частиц с линейным полем скоростей, в том числе с плотностью зависящей от времени, но явное представление решений не получено.

2. Инвариантная подмодель ранга 1 на подалгебре 3.30

Базисные операторы подалгебры 3.30 [8] в декартовой системе координат t, x, y, z, u, v, w имеют вид:

$$
\begin{gathered}
aX_1 + X_2 = a\partial_x + \partial_y, \quad X_3 + X_4 = t\partial_x + \partial_z + \partial_u, \\
Y_1 + bX_1 + cX_3 + dX_5 + eX_6 = \\
= \partial_p + b\partial_x + dt\partial_y + (et + c)\partial_z + d\partial_v + e\partial_w, \\
b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 1.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Инварианты — функции, зануляющиеся при действии операторов подалгебры [23]. Инварианты подалгебры 3.30 (5) при $b^2 + e^2 + (ad + c)^2 \neq 0$ таковы

$$
\begin{gathered}
t, \quad u + \frac{(et + c)(x - ay) + (adt - b)z}{b - t(et + ad + c)}, \quad v + \frac{d(x - ay - tz)}{t(et + ad + c) - b}, \\
w + \frac{e(x - ay - tz)}{t(et + ad + c) - b}, \quad \rho, \quad p + \frac{x - ay - tz}{t(et + ad + c) - b}.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Представление инвариантного решения выбирается следующим образом. Инварианты (6), содержащие газодинамические функции, назначаются новыми функциями, зависящими от инварианта из независимой переменной. В представлении решения вводится коэффициент γ для отличия подмодели от известной подмодели алгебры Ли L_{11} [5] ($\gamma = 1$ в случае L_{12} и $\gamma = 0$ в случае L_{11}). Представление инвариантного решения с линейным полем скоростей и с неоднородной деформацией

$$
\begin{gathered}
u = u_1(t) + \frac{(c + et)(x - ay) + (adt - b)z}{t(et + ad + c) - b}, \\
v = v_1(t) + \frac{d(x - ay - tz)}{b - t(et + ad + c)}, \\
w = w_1(t) + \frac{e(x - ay - tz)}{b - t(et + ad + c)}, \quad \rho = \rho(t), \\
p = p_1(t) + \gamma\frac{x - ay - tz}{b - t(et + ad + c)}, \quad S = S_1(t) + \gamma\frac{x - ay - tz}{b - t(et + ad + c)}, \\
p_1 = f(\rho) + S_1.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Подстановка представления решения (7) в систему (1), (2) приводит к инвариантной подмодели 3.30 ранга 1

$$
\begin{gathered}
u_{1t} = \frac{1}{m}[(c + et)(u_1 - av_1) - m - t(c + et)w_1 - \gamma\rho^{-1}], \\
v_{1t} = \frac{1}{m}[-d(u_1 - av_1) + dtw_1 + a\gamma\rho^{-1}], \\
w_{1t} = \frac{1}{m}[-e(u_1 - av_1) + etw_1 + \gamma t\rho^{-1}], \\
\rho_t = -\frac{\rho m_t}{m}, \\
S_{1t} = -\frac{\gamma}{m}[u_1 - av_1 - tw_1], \quad p_1 = f(\rho) + S_1,
\end{gathered} \tag{8}
$$

где $m = b - t(et + ad + c)$.

Движение частиц задается уравнением [24]:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t). \tag{9}$$

Интегральные кривые уравнения (9) есть мировые линии частиц в пространстве $\mathbb{R}^4(t, \vec{x})$, проекция которых в $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ есть траектории частиц.

3. Решение на инвариантной подмодели ранга 1 при $e \neq 0$

Система (8) при $e \neq 0$ имеет следующие интегралы:

$$\begin{gathered}\rho = \frac{\rho_0}{m}, \quad ev_1 - dw_1 = \frac{\gamma}{\rho_0}\left(aet - d\frac{t^2}{2}\right) + C_0,\\ eu_1 + (et + c)w_1 = \frac{\gamma t}{\rho_0}\left(\frac{ct}{2} + \left(\frac{t^2}{3} - 1\right)e\right) + cC_1,\\ etu_1 - aetv_1 + bw_1 = \frac{\gamma t^2}{2\rho_0}\big(b - e(a^2+1)\big) + C_2.\end{gathered} \tag{10}$$

При $e = 0$ из каждой формулы из (10) при $C_0 = -dC_1$, $C_2 = bC_1$ получится интеграл $w_1 = \dfrac{\gamma t^2}{2\rho_0} + C_1$. С помощью галилеевых переносов 4^o из (3) при $\vec{b} = (0, 0, -C_1)$ можно считать $C_0 = C_1 = C_2 = 0$ в интегралах (10).

Таким образом, из представления решения (7) при $e \neq 0$, уравнения для S_1 из (8) и интегралов (10) точное решение системы уравнений (1), (2) имеет вид:

$$\begin{gathered}u = -\frac{1}{m}\left((c + et)(x - ay) + (adt - b)z\right) - \\ -\frac{\gamma t}{6\rho_0}\left[t^2 + 6 + t(c + et)\frac{K}{m}\right],\\ v = \frac{d}{m}(x - ay - tz) + \frac{\gamma t}{6\rho_0}\left[6a + \frac{dtK}{m}\right],\\ w = \frac{e}{m}(x - ay - tz) + \frac{\gamma t^2}{6\rho_0}\left[3 + \frac{eK}{m}\right],\\ S = \frac{\gamma}{m}(x - ay - tz) + \\ +\frac{\gamma^2}{6\rho_0 e^3}\left[(ad + c)^2 + be + 3e^2(a^2+1) + \frac{e^3t^2K}{m}\right],\\ \rho = \frac{\rho_0}{m}, \quad p = S + f(\rho),\end{gathered} \tag{11}$$

где $K = t^2 + 3(a^2 + 1)$, в выражении для давления убрана константа с помощью (4).

Плотность на решении (11) имеет особенность в два момента времени $t = t_-$ и $t = t_+$:

$$t_{\pm} = \frac{ad + c \pm \sqrt{(ad + c)^2 + 4eb}}{-2e}.$$

Формулы (11) при $(ad+c)^2+4eb > 0$ задают 3 решения: при $t < t_-$ с коллапсом частиц, при $t_- < t < t_+$ с источником и коллапсом частиц и при $t > t_+$ с источником частиц. При $(ad + c)^2 + 4eb = 0$ $t_- = t_+$. Следовательно, формулы (11) задают 2 решения при $t < t_-$ с коллапсом частиц и при $t > t_-$ с источником частиц. При $(ad + c)^2 + 4eb < 0$ одно решение для любого t, движение частиц без особенностей.

4. Решение на инвариантной подмодели ранга 1 при $e = 0,\ c + ad \neq 0$

Система (8) при $e = 0, c + ad \neq 0$ имеет следующие интегралы:

$$\begin{gathered}
du_1 + cv_1 = \frac{\gamma t}{\rho_0}\left(ac - d - \frac{dt^2}{6}\right) - dtC_1 + C_3,\\
(b - t(ad + c))(u_1 - av_1) = -bC_1 t -\\
-\frac{\gamma}{\rho_0}\left[\frac{b}{6}t^3 + t(a^2+1)\left(b - \frac{t}{2}(ad + c)\right)\right] + C_4,\\
\rho = \rho_0(b - t(ad + c))^{-1}, \quad w_1 = \frac{\gamma t^2}{2\rho_0} + C_1.
\end{gathered} \tag{12}$$

С помощью галилеевых переносов 4^o из (3) при

$$\vec{b} = \left(-\frac{abC_3 + cC_4}{b(c + ad)}, \frac{dC_4 - bC_3}{b(c + ad)}, -C_1\right)$$

можно сделать $C_1 = C_3 = C_4 = 0$ в интегралах (12). Точное решение системы уравнений (1), (2) из подмодели 3.30 при $e = 0,\ c + ad \neq 0$ с точностью до преобразования 6^o из (4) имеет вид:

$$\begin{gathered}
u = -\frac{c(x - ay) + (adt - b)z}{b - t(ad + c)} + \frac{\gamma t}{\rho_0(c + ad)}\times\\
\times\left[a\left(ac - d - \frac{dt^2}{6}\right) - \frac{c}{6}\frac{bt^2 + (a^2+1)(6b - 3t(ad + c))}{b - t(ad + c)}\right],\\
v = \frac{d}{b - t(ad + c)}(x - ay - tz) + \frac{\gamma t}{\rho_0(ad + c)}\times\\
\times\left[\frac{d}{6}\frac{bt^2 + (a^2+1)(6b - 3t(ad + c))}{b - t(ad + c)} + ac - d - \frac{dt^2}{6}\right],\\
w = \frac{\gamma t^2}{2\rho_0}, \quad \rho = \rho_0(b - t(ad + c))^{-1},\\
S = \frac{\gamma}{b - t(ad + c)}(x - ay - tz) -\\
-\frac{\gamma^2}{6\rho_0}\left[\frac{t^3}{ad + c} + \frac{b}{(ad + c)^2}t^2 + \frac{b^2 + 3(ad + c)^2(a^2+1)}{(ad + c)^3}t -\right.\\
\left.-\frac{b^2(b^2 + 3(ad + c)^2(a^2+1))}{(ad + c)^4(b - t(ad + c))}\right],\\
p = S + f(\rho).
\end{gathered} \tag{13}$$

Плотность в (13) имеет особенность при $t = t_0 = \dfrac{b}{ad + c}$. Формулы (13) задают два решения: при $t < t_0$ с коллапсом частиц и при $t > t_0$ с источником частиц.

Мировые линии частиц на решении (13) получены при интегрировании (9)

$$\begin{gathered}
x = -\frac{\gamma t^2}{2\rho_0} + (C_3 - cC_1)\,t + aC_2 + bC_1,\\
y = \frac{a\gamma}{2\rho_0}t^2 + dC_1 t + C_2, \quad z = \frac{\gamma}{6\rho_0}t^3 + C_3,
\end{gathered} \tag{14}$$

где C_1, C_2, C_3 — глобальные лагранжевы координаты. Якобиан замены переменных (14) имеет вид

$$J = b - t(c + ad).$$

Так как ранг матрицы Якоби в момент времени коллапса равен 2, многообразие коллапса частиц есть плоскость

$$x - ay - \frac{b}{ad+c}z = -\frac{\gamma b^2}{2(ad+c)^2\rho_0}\left[1 + a^2 + \frac{b^2}{3(ad+c)^2}\right].$$

5. Решение на инвариантной подмодели ранга 1 при $e = 0$, $c + ad = 0$

Интегралы подмодели 3.30 (8) при $e = 0$, $c + ad = 0$ следующие:

$$\begin{gathered}
\rho = \frac{\rho_0}{b}, \quad w_1 = \frac{\gamma t^2}{2\rho_0} + C_1, \\
u_1 - av_1 = -\frac{\gamma t^3}{6\rho_0} - C_1 t - \frac{\gamma}{\rho_0}(a^2+1)t + C_5, \\
v_1 = \frac{\gamma d t^4}{6b\rho_0} + \frac{d}{b}\left((a^2+1)\frac{\gamma}{2\rho_0} + C_1\right)t^2 + \left(\frac{a\gamma}{\rho_0} - \frac{d}{b}C_5\right)t + C_6.
\end{gathered} \tag{15}$$

С помощью галилеевых переносов 4^o из (3) при $\vec{b} = (-C_5 - aC_6, -C_6, -C_1)$ можно считать $C_1 = C_5 = C_6 = 0$ в интегралах (15).

Точное решение системы уравнений (1), (2) из подмодели 3.30 при $e = 0$, $c + ad = 0$ с точностью до преобразования (4) имеет вид:

$$\begin{gathered}
u = \frac{1}{b}(ad(x - ay) - (adt - b)z) + \\
+ \frac{\gamma}{\rho_0}\left[\frac{ad}{6b}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{ad}{2b}(a^2+1)t - 1\right]t, \\
v = \frac{d}{b}(x - ay - tz) + \frac{\gamma}{\rho_0}\left[\frac{d}{6b}t^3 + \frac{d}{2b}(a^2+1)t + a\right]t, \\
w = \frac{\gamma t^2}{2\rho_0}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{b}, \quad S = \frac{\gamma}{b}(x - ay - tz) + \frac{\gamma^2 t^2}{2b\rho_0}\left[\frac{t^2}{3} + a^2 + 1\right], \\
p = S + f(\rho),
\end{gathered} \tag{16}$$

Решение (16) с линейным полем скоростей с неоднородной деформацией, изохорическое.

6. Траектории движения частиц и движение объема частиц

Мировые линии частиц на решении (16) задаются формулами:

$$\begin{gathered}
x = -\frac{\gamma t^2}{2\rho_0} + C_1 t + C_2, \\
y = \gamma\frac{a t^2}{2\rho_0} + \frac{t}{a}(C_1 - C_3) + \frac{C_2}{a} - \frac{b}{a^2 d}(C_1 - C_3), \quad z = \gamma\frac{t^3}{6\rho_0} + C_3,
\end{gathered} \tag{17}$$

где C_1, C_2, C_3 — глобальные лагранжевы координаты; C_1 — скорость частицы по x при $t = 0$, C_3 — проекция частицы на ось z при $t = 0$, C_2 — проекция частицы на ось x при $t = 0$. Якобиан замены переменных (17) постоянен и равен $b/(a^2 d)$, поэтому коллапса частиц нет.

Предложение 1. *Мировые линии частиц* (17) *не пересекаются.*

Доказательство. Мировые линии частиц (17) в векторном виде имеют вид

$$\vec{x} = \vec{a}(t) + \Omega(t)\vec{C}, \quad \Omega = \begin{Vmatrix} t & 1 & 0 \\ t/a - b/(a^2 d) & 1/a & b/(a^2 d) - t/a \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -\gamma t^2/(2\rho_0) \\ \gamma a t^2/(2\rho_0) \\ \gamma t^3/(6\rho_0) \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},$$

где Ω — матрица Якоби, $|\Omega| \neq 0$,

$$\Omega^{-1} = \begin{Vmatrix} ad/b & -a^2 d/b & -adt/b + 1 \\ -adt/b + 1 & a^2 dt/b & adt^2/b - t \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Пусть при $t = t_0$ частицы находятся в разных точках пространства $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$.

Координаты точек $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ в момент времени $t = t_0$ имеют вид

$$\vec{x}_1 = \vec{a}(t_0) + \Omega(t_0)\vec{C}_1, \quad \vec{x}_2 = \vec{a}(t_0) + \Omega(t_0)\vec{C}_2,$$

откуда следует

$$\vec{C}_i = \Omega^{-1}(t_0)(\vec{x}_i - a(t_0)), \quad i = 1, 2.$$

Мировые линии частиц, проходящие в момент времени $t = t_0$ через точки с координатами $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, имеют вид

$$\vec{x}_i(t) = \vec{a}(t) + \Omega(t)\Omega^{-1}(t_0)(\vec{x}_i - a(t_0)), \quad i = 1, 2. \tag{18}$$

Пусть в момент времени $t = t_1 \neq t_0$ мировые линии частиц (18) пересекаются, тогда справедливо соотношение

$$\Omega(t_1)(\Omega^{-1}(t_0)(\vec{x}_1 - a(t_0))) = \Omega(t_1)(\Omega^{-1}(t_0)(\vec{x}_2 - a(t_0))). \tag{19}$$

Так как $|\Omega| \neq 0$ для любого t из (19) следует

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_2,$$

что противоречит первоначальному предположению. Значит, мировые линии частиц (17) не пересекаются. □

Пусть далее $b = d \neq 0$, $a = 1$, $\rho_0 = 1/2$, $\gamma = 1$. Начальные данные таковы: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$. Движение частиц завихренное, так как $\mathrm{rot}\vec{u} = (t, 1 - t, 2)$. Траектории (17) имеют вид

$$x = -t^2 + (x_0 - y_0 + z_0)t + x_0, \quad y = t^2 + (x_0 - y_0)t + y_0, \\ z = \frac{t^3}{3} + z_0, \tag{20}$$

где x_0, y_0, z_0 — локальные лагранжевы координаты. Траектории движения частиц (20) при $t = 0$ находящиеся на квадрате со стороной единичной длины изображены на Рис. 1.

Пусть при $t = 0$ частицы с траекториями (20) находятся на сфере

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2. \tag{21}$$

Предложение 2. *При $t > 0$ сфера (21) перейдет в эллипсоид (Рис. 2). С течением времени величина движущегося объема из одних и тех же частиц не изменяется.*

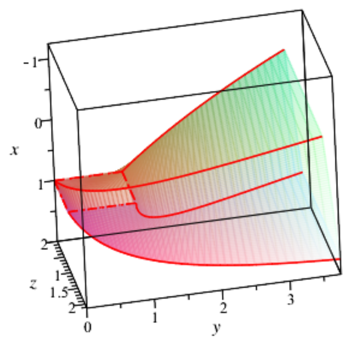

Рис. 1. Поверхность из траекторий частиц (20) при $x_0 = 1$, $0 < y_0 < 1$, $0 < z_0 < 1$, $t = 0..1.5$

Доказательство. Выразив x_0, y_0, z_0 из (20) и подставив в уравнение сферы (21), получится квадратичная форма, задающая местоположение частиц для любого t. Инварианты поверхности второго порядка [25] показывают, что при $t > 0$ местоположение частиц есть эллипсоид. Так как якобиан замены переменных (20) равен 1, очевидно, что с течением времени величина движущегося объема из одних и тех же частиц не изменяется. □

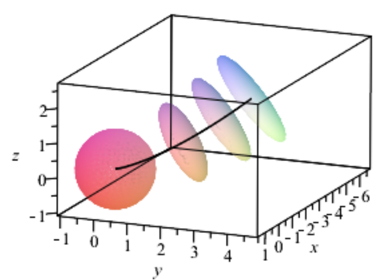

Рис. 2. Движение объема частиц при $r = 1$, $t = 0; 1.2; 1.5; 1.7$, кривая — местоположение центров эллипсоидов (20) при $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Из вычислений в системе компьютерной математики Maple 2018.2 видно, что одна из осей эллипсоида стремится к нулю (Рис. 2).

7. Заключение

Таким образом, для 4-параметрических трехмерных подалгебр из всех переносов по пространству и по давлению 3.30 12-мерной алгебры Ли, допускаемой уравнениями газовой динамики с давлением в виде суммы функций плотности и энтропии, вычислены инварианты, построены инвариантные подмодели ранга 1 и получены три семейства точных решений. Полученные решения задают движение частиц в пространстве с линейным полем скоростей с неоднородной деформацией. Первое семейство решений может иметь два момента времени коллапса плотности. Второе семейство решений имеет один момент времени коллапса частиц на плоскость. Третье семейство решений не имеет коллапса, мировые линии частиц не пересекаются. Выбранный в начальный момент времени объем из одних и тех же частиц в виде сферы в последующие моменты времени превращается в эллипсоид.

References

[1] L.V. Ovsyannikov, *The "podmodeli" program. Gas dynamics*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **58**:4 (1994), 601–627. https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90137-6

[2] S.V. Khabirov, *Nonisomorphic Lie algebras admitted by gasdynamic models*, Ufa Mathematical Journal, **3**:2 (2011), 85–88.

[3] S.V. Khabirov, *Optimal system for sum of two ideals admitted by hydrodynamic type equations*, Ufa Mathematical Journal, **6**:2 (2014), 97–101. https://doi.org/10.13108/2014-6-2-97

[4] Yu.A. Chirkunov, S.V. Khabirov, *Elements of Symmetry Analysis of Differential Equations of Continuum Mechanics: monograph*, Novosibirsk: NSTU publisher, 2012. (in Russian)

[5] S.V. Khabirov, *Lectures analytical methods in gas dynamics*, Ufa: BSU, 2013. (in Russian)

[6] E.V. Mamontov, *Invariant submodels of rank two of the equations of gas dynamics*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **40**:2 (1999), 232–237. https://doi.org/10.1007/BF02468519

[7] E.V. Mamontov, *Gruppovyye svoystva 2-podmodeley klassa S uravneniy gazovoy dinamiki [Group properties of 2-submodels of class S of equations of gas dynamics]*, Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika, **7**:1 (2007), 72–84. (in Russian)

[8] D.T. Siraeva, *Optimal system of non-similar subalgebras of sum of two ideals*, Ufa Mathematical Journal, **6**:1 (2014), 90–103. https://doi.org/10.13108/2014-6-1-90

[9] D.T. Siraeva, *Reduction of partially invariant submodels of rank 3 defect 1 to invariant submodels*, Multiphase Systems, **13**:3 (2018), 59–63. (in Russian) https://doi.org/10.21662/mfs2018.3.009

[10] D.T. Siraeva, *Classification of rank 2 stationary submodels of ideal hydrodynamics*, Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal, **4**:1 (2019), 18–32. (in Russian) https://doi.org/10.24411/2500-0101-2019-14102

[11] D.T. Siraeva. *The Canonical Form of the Rank 2 Invariant Submodels of Evolutionary Type in Ideal Hydrodynamics*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **13**:2 (2019), 340–349. https://doi.org/10.1134/S1990478919020157

[12] D.T. Siraeva, S.V. Khabirov, *Invariant submodel of rank 2 on subalgebra of translations linear combinations for a hydrodynamic type model*, Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. **3**:1 (2018), 38–57. (in Russian) http://cpmj.csu.ru/index.php/cpmj/article/view/133/114

[13] D.T. Siraeva, *Two invariant submodels of rank 1 of the hydrodynamic type equations and exact solutions*, Journal of Physics: Conference Series, **1666** 012049 (2020). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1666/1/012049

[14] E.V. Makarevich, *Invariant and partially invariant solutions with respect to Galilean shifts and dilatation*, Ufa Mathematical Journal, **5**:3 (2013), 118–126. https://doi.org/10.13108/2013-5-3-118

[15] E.V. Makarevich, *Gasdynamics equations submodels hierarchy in case of state equation with separated density*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9** (2012), 306–328. (in Russian) http://semr.math.nsc.ru/v9/p306-328.pdf
[16] A.A. Cherevko, *Group-theoretical solutions to gas dynamic equations generated by threedimensional Lie subalgebras*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **4** (2007), 553–595. (in Russian) http://semr.math.nsc.ru/v4/p553-595.pdf
[17] A.I. Golod, A.P. Chupakhin, *Invariant solution of dynamics of polytropic gas generated by three-dimensional algebras of symmetry*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **5** (2008), 229–250. (in Russian) http://semr.math.nsc.ru/v5/p229-250.pdf
[18] E.V. Mamontov, *Invariant solutions to dynamic of polytropic gas generated by threedimensional Lie subalgebras*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **6** (2009), 53–109. (in Russian) http://semr.math.nsc.ru/v6/p53-109.pdf
[19] L.Z. Urazbakhtina, Invariantnyye podmodeli ranga odin gazovoy dinamiki so spetsial'nym uravneniyem sostoyaniya [Rank one invariant submodels of gas dynamics with a special equation of state], Ufa Mathematical Journal, **1**:3 (2009), 139–153. (in Russian) https://matem.anrb.ru/sites/default/files/files/vup3/Urazbachtina.pdf
[20] R.F. Nikonorova, *The lowest-rank monatomic gas submodels constructed on the basis of three-dimensional symmetry subalgebras*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1216–1226. (in Russian) https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.098
[21] R.F. Shayakhmetova, *Vortex Scattering of Monatomic Gas Along Plane Curves*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **59**:2 (2018), 241–250. https://doi.org/10.1134/S0021894418020074
[22] Yu.V. Tarasova, *Classification of Submodels with a Linear Velocity Field in Gas Dynamics*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **4**:4 (2010), 570–577. https://doi.org/10.1134/S1990478910040125
[23] L.V. Ovsyannikov, *Group analysis of differential equations*. Academic press, 1982.
[24] L.V. Ovsyannikov, *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki [Lectures on the fundamentals of gas dynamics]*, Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2003. (in Russian)
[25] I.N. Bronshteyn, K.A. Semendyayev, *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov [A guide to mathematics for engineers and college students]*, Moskva: Gostekhizdat, 1955. (in Russian)

Siraeva Diilara Takhirovna
Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS,
pr. Oktyabrya, 71,
450054, Ufa, Russia
Email address: sirdilara@gmail.com