S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.958

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35A01

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЯДРА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДАННЫМИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Ж.Ш. САФАРОВ

Abstract. We consider the integro-differential equation of hyperbolic type in the domain $D = \{(x,t) \mid 0 < x < l, t > 0\}$ bounded in the variable x. First, the direct problem is investigated. In this case, we obtain the necessary conditions for these tasks. By the reflection method, we obtain an integral equation for $u(x,t)$. For the direct problem, the inverse problem of determining the kernel of an integral term of an integro-differential equation is studied on the basis of the available additional information about the solution of the direct problem for $x = 0$. Differentiating three times by t the obtained integral equation with respect to $u(x,t)$ and using an additional condition, the solution of the inverse problem reduces to solving a system of integral equations for unknown functions. The contraction mapping principle is applied to this system in the space of continuous functions with weighted norms. A theorem on the global unique solvability is proved. An estimate of the conditional stability of the solution of the inverse problem is also obtained.

Keywords: integro-differential equation, inverse problem, kernel of integral, Banach theorem.

Safarov, J.Sh., An inverse problem of determining the kernel of an integro-differential wave equation with distributed data in a limited area.

Поступила января 2021 г., опубликована 2021 г.

1. Введение и постановка задачи

Исследование обратных задач определения ядра интегральных операторов в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях по некоторой информации о волновом поле играет важную роль при изучении строения и свойства среды.Обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений, это относительно новое и бурно развивающиеся направление теории обратных задач. В работах [1] – [3] изучены одномерные обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. Коэффициентным обратным задачам посвящены работы [4] – [10]. В работах [11] – [14] и [15] – [17] исследованы обратные задачи об определении одномерного и многомерного ядра соответственно, уравнения вязкоупругости. В работах [18] – [19] изучены обратные задачи об определении одномерного ядра для уравнений термовязкоупругости и электровязкоупругости. Работы [20], [21] посвящены исследованию обратных задач для интегро-дифференциального уравнения акустики. Обратные задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений рассмотрены в работах [22], [23]. Во всех этих работах данные прямой задачи представляют собой сингулярные обобщенные функции.

В данной работе исследуется глобальная разрешимость обратной задачи для одного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа с распределенными источниками данных, в ограниченной по переменной x области.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = \int_0^t k(\alpha)u(x, t-\alpha)\, d\alpha, \qquad x \in (0, l), t > 0 \tag{1.1}$$

с начальными

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$u_x|_{x=0} = \psi(t), \qquad u_x|_{x=l} = 0, \qquad t > 0. \tag{1.3}$$

Здесь $\psi(t)-$ некоторая заданная, достаточно гладкая функция; $l > 0-$ некоторое фиксированное вещественное число. Нахождение функции $u(x,t)$ из уравнения (1.1) – (1.3) при известной $k(t)$ называется прямой задачей.

Обратная задача заключается в определении ядра $k(t)(t > 0)$, интегро-дифференциального уравнения (1.1), если относительно решения задачи (1.1)–(1.3), известна дополнительная информация

$$u(0, t) = f(t), \qquad t \geq 0, \tag{1.4}$$

$f(t)-$ заданная функция.

Определение 1. *Функция* $k(t) \in C[0, \infty)$ *(из класса непрерывных функций) называется решением обратной задачи* (1.1) – (1.4), *если соответствующее ей решение прямой задачи* (1.1) – (1.3), *удовлетворяет условию* (1.4).

2. Исследование прямой задачи

Сначала займемся исследованием прямой задачи (1.1) – (1.3), т.е. предполагаем функцию $k(t)$ известной. Рассмотрим эту задачу в области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, t > 0\}$, состоящей из объединения областей D_1 и D_2, $D = D_1 \cup D_2$:

$$D_1 = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < x\}$$

$$D_2=\{(x,t):0<x<l, x<t<2l-x\}$$

Лемма 1. *Решение уравнения* (1.1) *при заданных начальных* (1.2) *и граничных* (1.3) *условиях тождественно равняется нулю в области* D_1

$$u(x,t)\equiv 0,$$

в области D_2 *удовлетворяет следующему интегральному уравнению*

$$u(x,t)=-\varphi(t-x)-\int_0^{t-x}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{\tau-2\xi}k(\alpha)u(\xi,-\xi+\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau-$$

$$-\int_{t-x}^{t}\int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}}\int_0^{-2\xi+2\tau-t+x}k(\alpha)u(\xi,-\xi+2\tau-t+x-\alpha)d\alpha d\xi d\tau, \qquad (2.1)$$

где $\varphi(t)=\int_0^t\psi(\tau)d\tau$.

Доказательство леммы 1. В области $D_0\subset D_1$ по формуле Даламбера получим интегральное уравнение

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)}\int_0^{\tau}k(\alpha)u(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau,$$

где $\Delta(x,t)=\{(x,t):\, x-t+\tau\le\xi\le x+t-\tau,\ \ 0\le\tau\le t\}$, а $D_0=\{(x,t):\, 0<x<l,\ \ 0<t<\frac{l}{2}-|x-\frac{l}{2}|\}$.

Полученное уравнение является однородным уравнением вольтерровского типа. Как известно, однородное интегральное уравнение вольтерровского типа второго рода имеет только нулевое решение.

Поэтому $u(x,t)\equiv 0$, в области D_0.

Переходим в область $D_1\backslash D_0$. Волновой оператор $(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2})$ записываем в виде $(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x})$ и интегрируем равенство (1.1) вдоль характеристики $dx/dt=1$, от точки $(x-t,0)$ до точки (x,t) :

$$(u_t-u_x)(x,t)-(u_t-u_x)(x-t,0)=\int_0^t\int_0^{\tau}k(\tau-\alpha)u(\tau-t+x,\alpha)d\alpha d\tau,$$

где $(x,t)-$ любая точка, принадлежащая в $D_1\backslash D_0$.

Если использовать данные (1.2), последнее соотношение приобретает вид:

$$(u_t-u_x)|_{x=l}=\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_0^{\tau}k(\tau-\alpha)u(\tau-t+l,\alpha)d\alpha d\tau, \qquad t\in(0,l).$$

Отсюда с учетом граничного условия (1.3) при $x=l$, находим

$$u(l,t)=\int_0^t\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\int_0^{\tau_1}k(\tau_1-\alpha)u(\tau_1-\tau+l,\alpha)d\alpha d\tau_1 d\tau.$$

Сделаем замену переменных τ_1 на ξ по формуле $\tau_1-\tau+l=\xi$. Таким образом, мы получим окончательный вид интегрального уравнения для $u(l,t)$:

$$u(l,t)=\int_0^t\int_{l-\frac{\tau}{2}}^{l}\int_0^{\tau-l+\xi}k(\tau-l+\xi-\alpha)u(\xi,\alpha)d\alpha d\xi d\tau. \qquad (2.2)$$

Теперь возвращаемся к уравнению (1.1) и интегрируем его вдоль характеристики $dx/dt=1$, от точки $(x-t,0)$ до точки (x,t),

$$(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x})u(x,t)=\int_{\frac{l+x-t}{2}}^{x}\int_0^{\xi+t-x}k(\xi+t-x-\alpha)u(\xi,\alpha)d\alpha d\xi.$$

Для получения интегрального уравнения относительно $u(x,t)$ в области $D_1 \backslash D_0$, интегрируем последнее равенство вдоль характеристики $dx/dt = -1$, от точки (x,t) до точки $(l, t+x-l)$ и воспользуемся формулой (2.2)

$$u(x,t) = \int_0^{t+x-l} \int_{l-\frac{\tau}{2}}^{l} \int_0^{\xi+\tau-l} k(\xi+\tau-l-\alpha)u(\xi,\alpha)d\alpha d\xi d\tau+$$

$$\int_{t+x-l}^{t} \int_{\frac{l+x-t-2\tau}{2}}^{-\tau+x+t} \int_0^{\xi+2\tau-x-t} k(\xi+2\tau-x-t-\alpha)u(\xi,\alpha)d\alpha d\xi d\tau, \qquad (x,t) \in D_1 \backslash D_0.$$

Вновь полученное уравнение тоже является однородным уравнением вольтерровского типа. Следовательно,

$$u(x,t) \equiv 0, \qquad (x,t) \in D_1 \backslash D_0.$$

Переходим в область

$$D_2 = \{(x,t) : 0 < x < l, x < t < 2l - x\}.$$

В области D_2, интегрируя уравнение (1.1) вдоль характеристики $dx/dt = -1$ получим равенство

$$(u_t + u_x)(0,t) = -\int_0^{\frac{t}{2}} \int_0^{-2\xi+t} k(\alpha)u(\xi, -\xi+t-\alpha)d\alpha d\xi.$$

С учетом граничного условия (1.1) из этого равенство получим

$$u(0,t) = -\varphi(t) - \int_0^t \int_0^{\frac{\tau}{2}} \int_0^{\tau-2\xi} k(\alpha)u(\xi, -\xi+\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau.$$

Далее, используя этот результат, интегрированием уравнения (1.1), при условиях (1.2), (1.3) по характеристикам $dx/dt = -1$ и $dx/dt = 1$ получим уравнение (2.1) в области D_2.

□

Следующей нашей задачей является получение интегрального уравнения относительно неизвестной функции $k(t)$, при этом $u(x,t)$ тоже является неизвестной функцией. Имеется лишь дополнительная информация (1.4) о функции $u(x,t)$.

Лемма 2. *Решение обратной задачи* (1.1) − (1.4) *в области* D_2 *удовлетворяет следующему интегральному уравнению*

$$k(t) = \frac{2}{c_1}(f^{(4)}(t) + \psi^{(3)}(t)) -$$

$$-\frac{2c_2}{c_1}\int_0^{\frac{t}{2}} k(t-2\xi)d\xi - \frac{2}{c_1}\int_0^{\frac{t}{2}} \int_0^{t-2\xi} k(\alpha)u_{ttt}(\xi, -\xi+t-\alpha)d\alpha d\xi, \qquad (2.3)$$

где $c_2 := f''(0) = -\varphi''(0) = -\psi'(0)$.

Доказательство леммы 2. В уравнении (2.1) положим $x = 0$ и воспользуемся условием (1.4) :

$$f(t) = u(0,t) = -\varphi(t) - \int_0^t \int_0^{\frac{\tau}{2}} \int_0^{\tau-2\xi} k(\alpha)u(\xi, -\xi+\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau. \qquad (2.4)$$

Заметим, прежде всего, что

$$f(0) = -\varphi(0) = 0.$$

Дифференцируя по t уравнение (2.4) получим

$$f'(t) = -\psi(t) - \int_0^{\frac{t}{2}} \int_0^{t-2\xi} k(\alpha) u(\xi, -\xi + t - \alpha) d\alpha d\xi.$$

Отсюда следует,

$$f'(0) = -\varphi'(0) = -\psi(0) =: c_1.$$

Дифференцируя ещё три раза по t уравнение (2.4) и разрешая полученное уравнение относительно $k(t)$ приходим к уравнению (2.3).

□

3. Теорема о разрешимости обратной задачи

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $\psi(t) \in C^3(0, 2l)$, $f(t) \in C^4(0, 2l)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = c_1$, $f''(0) = c_2$, *тогда для любого* $l > 0$, *решение обратной задачи* $(1.1) - (1.4)$ *существует, единственно и* $k(t) \in C(0, 2l)$.

Сначала заменим переменную интегрирования τ на β по формуле $t - \tau = \beta$ во внешнем интеграле последнего слагаемого в (2.1). Далее, дифференцируя его три раза по переменной t последовательно, получим

$$u_t(x,t) = -\psi(t-x) - \int_0^{\frac{t-x}{2}} \int_0^{t-x-2\xi} k(\alpha) u(\xi, -\xi + t - x - \alpha) d\alpha d\xi -$$
$$\int_0^x \int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}} \int_0^{-2\xi+t-2\beta+x} k(\alpha) u_t(\xi, -\xi + t - 2\beta + x - \alpha) d\alpha d\xi d\beta, \qquad (3.1)$$

$$u_{tt}(x,t) = -\psi'(t-x) - \int_0^{\frac{t-x}{2}} \int_0^{t-x-2\xi} k(\alpha) u_t(\xi, -\xi + t - x - \alpha) d\alpha d\xi +$$
$$+ c_1 \int_0^x \int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}} k(-2\xi + t - 2\beta + x) d\xi d\beta -$$
$$\int_0^x \int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}} \int_0^{-2\xi+t-2\beta+x} k(\alpha) u_{tt}(\xi, -\xi + t - 2\beta + x - \alpha) d\alpha d\xi d\beta. \qquad (3.2)$$

$$u_{ttt}(x,t) = -\psi''(t-x) + \frac{c_1}{2} k(t-x) x - \int_0^{\frac{t-x}{2}} \int_0^{t-x-2\xi} k(\alpha) u_{tt}(\xi, -\xi + t - x - \alpha) d\alpha d\xi +$$
$$+ c_1 \int_0^{\frac{t-x}{2}} k(t - x - 2\xi) d\xi - + c_2 \int_0^x \int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}} k(-2\xi + t - 2\beta + x) d\xi d\beta -$$
$$- \int_0^x \int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}} \int_0^{-2\xi+t-2\beta+x} k(\alpha) u_{ttt}(\xi, -\xi + t - 2\beta + x - \alpha) d\alpha d\xi d\beta. \qquad (3.3)$$

Так как уравнения $(2.1), (3.1), (3.2), (3.3)$ и (2.3) определяют в Δ замкнутую систему интегральных уравнений, относительно пяти неизвестных функций $u(x,t)$, $u_t(x,t), u_{tt}(x,t), u_{ttt}(x,t), k(t)$, эту систему можно представить в виде операторного уравнения

$$Ag = g, \qquad (3.4)$$

в котором

$$g = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\} = \{u(x,t), u_t(x,t), u_{tt}(x,t), u_{ttt}(x,t) - \frac{c_1}{2} k(t-x) x,\ k(t)\},$$

а оператор A определен на множестве функций $g \in C[D_2]$ и в соответствии с равенствами $(2.1), (3.1), (3.2), (3.3)$ и (2.3) имеет вид $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$, где

$$A_1 g = g_{01} - \int_0^{t-x} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \int_0^{\tau-2\xi} g_5(\alpha) g_1(\xi, x-\xi+\tau-\alpha) d\alpha d\xi d\tau$$

$$- \int_{t-x}^{t} \int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}} \int_0^{-2\xi+2\tau-t+x} g_5(\alpha) g_1(\xi, -\xi+2\tau-t+x-\alpha) d\alpha d\xi d\tau, \qquad (3.5)$$

$$A_2 g = g_{02} - \int_0^{\frac{t-x}{2}} \int_0^{t-x-2\xi} g_5(\alpha) g_1(\xi, -\xi+t-x-\alpha) d\alpha d\xi -$$

$$\int_0^{x} \int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}} \int_0^{-2\xi+t-2\beta+x} g_5(\alpha) g_2(\xi, -\xi+t-2\beta+x-\alpha) d\alpha d\xi d\beta, \qquad (3.6)$$

$$A_3 g = g_{03} - \int_0^{\frac{t-x}{2}} \int_0^{t-x-2\xi} g_5(\alpha) g_2(\xi, -\xi+t-x-\alpha) d\alpha d\xi +$$

$$+ c_1 \int_0^{x} \int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}} g_5(-2\xi+t-2\beta+x) d\xi d\beta -$$

$$\int_0^{x} \int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}} \int_0^{-2\xi+t-2\beta+x} g_5(\alpha) g_3(\xi, -\xi+t-2\beta+x-\alpha) d\alpha d\xi d\beta. \qquad (3.7)$$

$$A_4 g = g_{04} + c_1 \int_0^{\frac{t-x}{2}} g_5(t-x-2\xi) d\xi + c_2 \int_0^{x} \int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}} g_5(-2\xi+t-2\beta+x) d\xi d\tau -$$

$$- \int_0^{\frac{t-x}{2}} \int_0^{t-x-2\xi} g_5(\alpha) g_3(\xi, -\xi+t-x-\alpha) d\alpha d\xi -$$

$$- \int_0^{x} \int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}} \int_0^{-2\xi+t-2\beta+x} g_5(\alpha) \Big[g_4(\xi, -\xi+t-2\beta+x-\alpha) -$$

$$- \frac{c_1}{2} g_5(-2\xi+t-2\beta-\alpha)\xi \Big] d\alpha d\xi d\beta. \qquad (3.8)$$

$$A_5 g = g_{05} - \frac{2c_2}{c_1} \int_0^{\frac{t}{2}} g_5(t-2\xi) d\xi -$$

$$- \frac{2}{c_1} \int_0^{\frac{t}{2}} \int_0^{t-2\xi} g_5(\alpha) \Big[g_4(\xi, -\xi+t-\alpha) - \frac{c_1}{2} g_5(-2\xi+t-\alpha)\xi \Big] d\alpha d\xi. \qquad (3.9)$$

Пусть

$$g_0(x,t) = (g_{01}, g_{02}, g_{03}, g_{04}, g_{05}),$$

где

$$g_{01} = -\varphi(t-x),\ g_{02} = -\psi(t-x),\ g_{03} = -\psi'(t-x),\ g_{04} = -\psi''(t-x),$$

$$g_{05} = \frac{2}{c_1}(f''''(t) + \psi'''(t)).$$

Как в работе [21] обозначим через C_σ банахово пространство непрерывных функций, порожденных семейством весовых норм

$$||g||_\sigma = \max\{ \sup_{(x,t)\in D_2} |g_i(x,t)e^{-\sigma t}|, i = \overline{1,4}, \sup_{t\in[0,2l]} |g_5(t)e^{-\sigma t}| \}, \sigma \geq 0.$$

Очевидно, что при $\sigma = 0$ данное пространство совпадает с пространством непрерывных функций с обычной нормой. Эту норму будем обозначать далее $\|g\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma t}\|g\| \le \|g\|_\sigma \le \|g\|,$$

нормы $\|g\|_\sigma$ и $\|g\|$ эквивалентны для любого фиксированного $l \in (0, \infty)$. Число σ выберем позже. Пусть $Q_\sigma(g_0, \|g_0\|) := \{g : \|g - g_0\| \le \|g_0\|\}$ - шар радиуса $\|g_0\|$ с центром в точке g_0 некоторого весового пространства $C_\sigma(\sigma \ge 0)$, в котором

$$\|g_0\| = \max(\|g_{01}\|, \|g_{02}\|, \|g_{03}\|, \|g_{04}\|, \|g_{05}\|).$$

Нетрудно заметить, что для $Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$ имеет место оценка

$$\|g\|_\sigma \le \|g_0\|_\sigma + \|g_0\| \le 2\|g_0\|.$$

Пусть $g(x,t) \in Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор A переводит шар в шар, т.е. $A \in Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$. Напомним, что оператор называется сжимающим на множестве $B(g_0)$, если выполнены следующие два условия:
1) если $g \in B(g_0)$, то $Ag \in B(g_0)$,
2) если g^1, g^2 любые два элемента $B(g_0)$, то $||Ag^1 - Ag^2|| \le \rho||g^1 - g^2||$ в котором $\rho < 1$.

Сначала проверим выполнение первого из этих условий. Для $(x,t) \in D_2$ имеют место оценки

$$\|A_1 g - g_{01}\| = \sup_{(x,t)\in D_2} |(A_1 g - g_{01})e^{-\sigma t}| =$$

$$\sup_{(x,t)\in D_2}\left|\int_0^{t-x}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{\tau-2\xi} g_3(\alpha)e^{-\sigma\alpha}g_1(\xi, x-\xi+\tau-\alpha)e^{-\sigma(-\xi+x+\tau-\alpha)}e^{-\sigma(\xi+t-\tau)}d\alpha d\xi d\tau +\right.$$

$$+\int_{t-x}^{t}\int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}}\int_0^{-2\xi+2\tau-t+x} g_3(\alpha)e^{-\sigma\alpha}g_1(\xi, -\xi+2\tau-t+x-\alpha)\times$$

$$\left.\times e^{-\sigma(-\xi+x+2\tau-t-\alpha)}e^{-\sigma(\xi+t-2\tau)}d\alpha d\xi d\tau\right| \le \frac{20}{\sigma}\|g_0\|^2 l^2 =: \frac{\|g_0\|}{\sigma}\alpha_1,$$

$$\|A_2 g - g_{02}\| = \sup_{(x,t)\in D_2} |(A_2\varphi - \varphi_{02})e^{-\sigma t}| \le \Big[4\|g_0\|(1+l)l\Big]\frac{\|g_0\|}{\sigma} := \frac{\|g_0\|}{\sigma}\alpha_2.$$

$$\|A_3 g - g_{03}\| = \sup_{(x,t)\in D_2} |(A_2\varphi - \varphi_{02})e^{-\sigma t}| \le \Big[\|g_0\|(4+8l) + c_1\Big] l\frac{\|g_0\|}{\sigma} := \frac{\|g_0\|}{\sigma}\alpha_3.$$

$$\|A_4 g - g_{04}\| = \sup_{(x,t)\in D_2} |(A_2\varphi - \varphi_{02})e^{-\sigma t}| \le \Big[c_1 + c_2 l + 2\|g_0\|(4+4l+c_1 l^2)l)\Big]\frac{\|g_0\|}{\sigma} := \frac{\|g_0\|}{\sigma}\alpha_4.$$

$$|A_5 g - g_{05}| = \sup_{t\in[0,2l]} |(A_2\varphi - \varphi_{02})e^{-\sigma t}| \le \frac{2}{c_1}\Big[c_2 + 2l\|g_0\|(4+lc_1)\Big]\frac{\|g_0\|}{\sigma} =: \frac{\|g_0\|}{\sigma}\alpha_5,$$

Выбирая

$$\sigma \ge \alpha_0 := max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$$

получим, что A переводит шар $Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$ в шар $Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$.

Теперь проверим выполнение второго условия. Пусть $g^k := (g_1^k, g_2^k, g_3^k, g_4^k, g_5^k)$ и $g^k \in B(g_0), k = 1, 2$. Используя очевидное неравенство

$$|g_k^1 g_s^1 - g_k^2 g_s^2| e^{-\sigma t} \le |g_k^1 - g_k^2||g_s^1| e^{-\sigma t} + |g_k^2||g_s^1 - g_s^2| e^{-\sigma t}$$

получим

$$||(Ag^1 - Ag^2)_1||_\sigma = \sup_{(x,t)\in D_2} |(Ag^1 - Ag^2)_1 e^{-\sigma t}| \le$$

$$\le 20||g_0||l^2 \frac{||g^1 - g^2||_\sigma}{\sigma} =: \beta_1 \frac{||g^1 - g^2||_\sigma}{\sigma},$$

$$||(Ag^1 - Ag^2)_2||_\sigma = \sup_{(x,t)\in D_2} |(Ag^1 - Ag^2)_2 e^{-\sigma t}| \le$$

$$\le \left[8\|g_0\|(1+l)l)\right] \frac{||g^1 - g^2||_\sigma}{\sigma} =: \beta_2 \frac{||g^1 - g^2||_\sigma}{\sigma},$$

$$||(Ag^1 - Ag^2)_3||_\sigma = \sup_{(x,t)\in D_2} |(Ag^1 - Ag^2)_3 e^{-\sigma t}| \le$$

$$\le \left[2\|g_0\|(4+8l) + c_1\right] l \frac{||g^1 - g^2||_\sigma}{\sigma} =: \beta_3 \frac{||g^1 - g^2||_\sigma}{\sigma},$$

$$||(Ag^1 - Ag^2)_4||_\sigma = \sup_{(x,t)\in D_2} |(Ag^1 - Ag^2)_4 e^{-\sigma t}| \le$$

$$\le \left[c_1 + c_2 l + 2\|g_0\|(4 + 4l + c_1 l^2)l)\right] \frac{||g^1 - g^2||_\sigma}{\sigma} =: \beta_4 \frac{||g^1 - g^2||_\sigma}{\sigma},$$

$$||(Ag^1 - Ag^2)_5||_\sigma = \sup_{t\in[0,2l]} |(Ag^1 - Ag^2)_5 e^{-\sigma t}| \le$$

$$\le \frac{2}{c_1}\left[c_2 + 4l\|g_0\|(4 + lc_1)\right] \frac{||g^1 - g^2||_\sigma}{\sigma} =: \beta_5 \frac{||g^1 - g^2||_\sigma}{\sigma}.$$

Следовательно, $||Ag^1 - Ag^2|| \le \rho||g^1 - g^2||$, если $l > 0$ удовлетворяет условию

$$\beta_i \le \rho < 1, i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Пусть $\beta_0 := max(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$. Как следует из полученных оценок если число σ выбрать из условия $\sigma > max(\alpha_0, \beta_0)$, то оператор A является сжимающим на $Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$. Тогда, согласно принципу Банаха, уравнение (3.4) имеет и притом единственное решение в $Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$ при любом фиксированном $l > 0$. [25]. Теорема 1 доказана.

□

4. Оценка устойчивости решения обратной задачи

Пусть $K(k_0)$ множество функций $k(t) \in C[0, 2l]$, удовлетворяющих при некотором $l > 0$ условию

$$\|k\|_{C[0,2l]} \leqslant k_0$$

с постоянной $k_0 > 0$.

Теорема 2. *Пусть* $k^1(t) \in K(k_0), k^2(t) \in K(k_0)-$ *два решения обратной задачи* (1.1) – (1.4) *с данными* f^1 *и* f^2 *соответственно. Тогда найдется такое положительное число* $C = C(k_0, l)$, *что выполняется неравенство*

$$||k^1(t) - k^2(t)||_{C[0,2l]} \leqslant C||f^1 - f^2||_{C^4[0,2l]}. \tag{4.1}$$

Функцию $u(x,t)$ будем искать в виде функционального ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \tag{4.2}$$

где $u_0(x,t) = -\varphi(t-x)$, а функции $u_n(x,t)$ при $n \geq 1$ определим рекуррентными формулами

$$u_n(x,t) = -\int_0^{t-x}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{\tau-2\xi} k(\alpha)u_{n-1}(\xi, -\xi+\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau -$$
$$\int_{t-x}^{t}\int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}}\int_0^{-2\xi+2\tau-t+x} k(\alpha)u_{n-1}(\xi, -\xi+2\tau-t+x-\alpha)d\alpha d\xi d\tau.$$

Так как $\varphi(t)$ ограниченная функция, то $|u_0(x,t)| \leq \Phi$. Здесь $\Phi-$ некоторое конечное вещественное число. Отсюда следует, что

$$|u_1(x,t)| \leq \Phi\left|\int_0^{t-x}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{\tau-2\xi} k(\alpha)d\alpha d\xi d\tau + \int_{t-x}^{t}\int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}}\int_0^{-2\xi+2\tau-t+x} k(\alpha)d\alpha d\xi d\tau\right|.$$

Из условия $k(t) \in C[0,2l]$ следует, что $u_n(x,t)$ являются непрерывными функциями в области D_2 вместе с первыми и вторыми производными по x и t для всех $n \geq 1$. Тогда для $(x,t) \in D_2$ имеем, что

$$|u_1(x,t)| \leqslant \frac{k_0\Phi l}{3}t^2,$$
$$|u_2(x,t)| \leqslant (\frac{k_0\Phi l}{3})^2\frac{t^4}{1\cdot 3},$$
$$|u_3(x,t)| \leqslant (\frac{k_0\Phi l}{3})^3\frac{t^6}{1\cdot 3\cdot 5}.$$

Продолжая подобные вычисления, методом математической индукции найдем, что

$$|u_n(x,t)| \leqslant (\frac{k_0\Phi l}{3})^n\frac{t^{2n}}{(2n-1)!!} \leqslant \frac{1}{(2n-1)!!}(\frac{k_0\Phi l^3}{3})^n.$$

Поэтому ряд в (4.2) сходится равномерно и его сумма является непрерывной функцией в D_2. Более того, имеет место оценка

$$|u(x,t)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|u_n(x,t)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!!}(\frac{k_0\Phi l^3}{3})^n =: \mu_{01}. \tag{4.3}$$

Аналогичным образом можно получить оценки: $|u_t(x,t)| \leq \mu_{02}$, $|u_{tt}(x,t)| \leq \mu_{03}$, $|u_{ttt}(x,t)| \leq \mu_{04}$. Обозначим $\mu_0 := max(\mu_{01}, \mu_{02}, \mu_{03}, \mu_{04})$.

Пусть u^1, u^2 два решения задачи (1.1) – (1.3) соответствующие функциям k^1, k^2, и в дальнейшим будем обозначать как в работе [26], разность двух функций, наименование которых отличается только цифрой сверху той же самой буквой со знаком $\sim$. Например $\widetilde{u} = u^1 - u^2$, $\widetilde{k} = k^1 - k^2$ и т.д. Тогда из уравнений $(2.1), (3.1), (3.2), (3.3)$ и (2.3) нетрудно получить следующую систему

$$\widetilde{u}(x,t) = -\int_0^{t-x}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{\tau-2\xi}[k^1(\alpha)\widetilde{u}(\xi,-\xi+\tau-\alpha)+\widetilde{k}(\alpha)u^2(\xi,-\xi+\tau-\alpha)]\,d\alpha d\xi d\tau-$$
$$\int_{t-x}^{t}\int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}}\int_0^{-2\xi+2\tau-t+x}[k^1(\alpha)\widetilde{u}(\xi,-\xi+2\tau-t+x-\alpha)+$$
$$+\widetilde{k}(\alpha)u^2(\xi,-\xi+2\tau-t+x-\alpha)]\,d\alpha d\xi d\tau. \tag{4.4}$$

$$\widetilde{u}_t(x,t) = -\int_0^{\frac{t-x}{2}}\int_0^{t-x-\xi}[k^1(\alpha)\widetilde{u}(\xi,-\xi+\tau-\alpha)+\widetilde{k}(\alpha)u^2(\xi,-\xi+\tau-\alpha)]\,d\alpha d\xi-$$
$$-\int_0^{x}\int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}}\int_0^{-2\xi+t-2\beta+x}[k^1(\alpha)\widetilde{u}_t(\xi,-\xi+t-2\beta+x-\alpha)+$$
$$+\widetilde{k}(\alpha)u_t^2(\xi,-\xi+t-2\beta+x-\alpha)]\,d\alpha d\xi d\beta. \tag{4.5}$$

$$\widetilde{u}_{tt}(x,t) = -\int_0^{\frac{t-x}{2}}\int_0^{t-x-\xi}[k^1(\alpha)\widetilde{u}_t(\xi,-\xi+\tau-\alpha)+\widetilde{k}(\alpha)u_t^2(\xi,-\xi+\tau-\alpha)]\,d\alpha d\xi-$$
$$-c_1\int_0^{x}\int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}}\widetilde{k}(-2\xi+t-2\beta+x)d\xi d\beta-$$
$$-\int_0^{x}\int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}}\int_0^{-2\xi+t-2\beta+x}[k^1(\alpha)\widetilde{u}_{tt}(\xi,-\xi+t-2\beta+x-\alpha)+$$
$$+\widetilde{k}(\alpha)u_{tt}^2(\xi,-\xi+t-2\beta+x-\alpha)]\,d\alpha d\xi d\beta. \tag{4.6}$$

$$\widetilde{u}_{ttt}(x,t) = \frac{c_1}{2}\widetilde{k}(t-x)x-c_1\int_0^{\frac{t-x}{2}}\widetilde{k}(t-x-2\xi)d\xi-c_2\int_0^{x}\int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}}\widetilde{k}(-2\xi+t-2\beta+x)d\xi d\beta-$$
$$-\int_0^{\frac{t-x}{2}}\int_0^{t-x-\xi}[k^1(\alpha)\widetilde{u}_{tt}(\xi,-\xi+\tau-\alpha)+\widetilde{k}(\alpha)u_{tt}^2(\xi,-\xi+\tau-\alpha)]\,d\alpha d\xi-$$
$$-\int_0^{x}\int_{x-\beta}^{\frac{t-2\beta+x}{2}}\int_0^{-2\xi+t-2\beta+x}[k^1(\alpha)\widetilde{u}_{ttt}(\xi,-\xi+t-2\beta+x-\alpha)+$$
$$+\widetilde{k}(\alpha)u_{ttt}^2(\xi,-\xi+t-2\beta+x-\alpha)]\,d\alpha d\xi d\beta. \tag{4.7}$$

$$\widetilde{k}(t) = -\widetilde{f}''''(t) - \frac{2c_2}{c_1}\int_0^{\frac{t}{2}}\widetilde{k}(t-2\xi)d\xi - \frac{2}{c_1}\int_0^{\frac{t}{2}}\int_0^{t-2\xi}[k^1(\alpha)\widetilde{u}_{ttt}(\xi,-\xi+\tau-\alpha)+$$
$$+\widetilde{k}(\alpha)u_{ttt}^2(\xi,-\xi+\tau-\alpha)]d\alpha d\xi. \tag{4.8}$$

Пусть

$$\eta(t) = \max[\max_{0\leqslant x\leqslant l}|\widetilde{u}(x,t)|,\ \max_{0\leqslant x\leqslant l}|\widetilde{u}_t(x,t)|,\ \max_{0\leqslant x\leqslant l}|\widetilde{u}_{tt}(x,t)|,\ \max_{0\leqslant x\leqslant l}|\widetilde{u}_{ttt}(x,t)|,\ |\widetilde{k}(t)|],\ \ t\in[0,2l].$$

Используя уравнения $(4.4) - (4.8)$, находим

$$|\widetilde{u}(x,t)| \leqslant 2(\mu_0+k_0)l^2\int_0^t \eta(\alpha)\,d\alpha,$$

$$|\widetilde{u}_t(x,t)| \leqslant (\mu_0+k_0)(l+l^2)\int_0^t \eta(\alpha)\,d\alpha,$$

$$|\widetilde{u}_{tt}(x,t)| \leqslant (c_1 l + (\mu_0+k_0)(l+l^2)\int_0^t \eta(\alpha)\,d\alpha,$$

$$|\widetilde{u}_{ttt}(x,t)| \leqslant \frac{lc_1}{2}\|\widetilde{f}(t)\|_{C^4[0,2l]} + \left(c_1+2c_2 l+(\mu_0+k_0)(l+2l^2)\right)\int_0^t \eta(\alpha)\,d\alpha,$$

$$|\widetilde{k}(t)| \leqslant \|\widetilde{f}(t)\|_{C^4[0,2l]} + \left(\frac{2c_2}{c_1}l + \frac{2}{c_1}(k_0+\mu_0)l\right)\int_0^t \eta(\alpha)\,d\alpha.$$

При оценивании $|\widetilde{u}_{ttt}(x,t)|$ использована оценка $|\widetilde{k}(t)|$. Из этих соотношений следует, что $\eta(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$|\eta(t)| \leqslant \gamma\|\widetilde{f}(t)\|_{C^4[0,2l]} + \mu_1\int_0^t \eta(\alpha)\,d\alpha,$$

в котором $\mu_1 := \max\{2(\mu_0+k_0)l^2, (\mu_0+k_0)(l+l^2), (c_1 l+(\mu_0+k_0)(l+l^2), c_1 + 2c_2 l + (\mu_0+k_0)(l+2l^2), \frac{2c_2}{c_1}l + \frac{2}{c_1}(k_0+\mu_0)l\}$ и $\gamma = \max\{1, \frac{lc_1}{2}\}$. Используя неравенство Гронуолла, получаем оценку

$$|\eta(t)| \leqslant \gamma\|\widetilde{f}(t)\|_{C^4[0,T]})\exp(\mu_1 t) \qquad t\in(0,2l).$$

Если в последнем неравенстве обозначить $\gamma\exp(\mu_1 t) =: C$, то получим неравенство (4.1).

Теорема 2 доказана.

□

References

[1] D. K.Durdiev, *Inverse problems for media with aftereffect*, Tashkent:Turon-Iqbol, 2014.

[2] J. Sh.Safarov, *An inverse problem for an integro-differential hyperbolic equation in a bounded domain.* Uzb. Mat. Journal, Tashkent, **2** (2012), 117–124.

[3] J. Sh.Safarov, *Questions of local solvability of one inverse problem for the integro-differential equation of oscillation of an infinite string.* Uzb. Mat. Journal, Tashkent, **2** (2013), 100–106.

[4] D. K. Durdiev, *Problem of determining the nonstationary potential in a hyperbolic-type equation", Theoret. and Math. Phys.*, **156**:2 (2008), 1154–1158.
DOI: https://doi.org/10.4213/tmf6242

[5] D.K. Durdiev, *The inverse problem of determining two coefficients in one integro-differential wave equation*, Siberian Journal of Industrial Mathematics, **12**: 3 (2009), 28–40.

[6] V. G. Romanov, *On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations,* Siberian Math. J., **55**:3 (2014), 503–510.

[7] Zh. D. Totieva,*The problem of determining the coefficient of thermal expansion of the equation of thermoviscoelasticity.* Siberian Electronic Mathematical Reports,**14** (2017), 1108–1119.
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10752

[8] S. K.Zaripov *A construction of analog of Fredgolm theorems for one class of first order model integro-diferential equation with logarithmic singularity in the kernel.* J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., **21**:2(2017), 236–248.
DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1515

[9] Zh. D. Totieva, *One-dimensional inverse coefficient problems of anisotropic viscoelasticity*, Siberian Electronic Mathematical Reports,**16** (2019), 786–811.
DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.053

[10] D. K. Durdiev, Zh. D. Totieva, *Inverse problem for a second-order hyperbolic integro-differential equation with variable coefficients for lower derivatives*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 1106–1127.
DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.084

[11] V. G. Romanov, *Problem of kernel recovering for the viscoelasticity equation,* Doklady Mathematics, **86**:2 (2012), 608–610

[12] D. K. Durdiev, Zh. D. Totieva, *The problem of determining the one-dimensional core of the equation of viscoelasticity.* Siberian Journal of Industrial Mathematics,**16**:2 (2013) 72–82.

[13] D.K. Durdiev, Zh.Sh. Safarov, *The inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded region.* Mat. Notes,**97**:6 (2015), 855–867.
DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm10659

[14] J. Sh.Safarov, *One-dimensional inverse problem for the equation of viscoelasticity in a bounded region.* Journal SVMO, **17**:3 (2015),44–55.

[15] V. G. Romanov,*A two-dimension inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics,* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **280**:1 (2013), 151–157.

[16] V.G.Romanov, *A two-dimensional inverse problem for the viscoelasticity equation.* Siberian Math. J., **53**:6, (2017), 1128–1138.
DOI:doi:10.1134/S0037446612060171

[17] D. K. Durdiev , Zh.D Totieva, *The problem of determining the multidimensional core of the equation of viscoelasticity.* Vladikavkaz Mathematical Journal, **4**(2015), 18–43.

[18] D. K. Durdiev , Zh.D Totieva, *The problem of determining the one-dimensional kernel of the electroviscoelasticity equation.* Siberian Math. J.,Novosibirsk, **58**:3,(2017), 427–444.
DOI: https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.094

[19] Zh. D. Totieva, D. K.Durdiev, *The Problem of Finding the One-Dimensional Kernel of the Thermoviscoelasticity Equation.* Math. Notes, **103**:1 (2018), 118–132.
DOI: https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.094

[20] J. Sh.Safarov , D.K.Durdiev, *Inverse problem for the integro-differential equation of acoustics.* Differ. equat. **54**:1 (2018), 136–144.
DOI: 10.1134/S0374064118010119

[21] Jurabek Sh. Safarov, *Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics.* J. Sib. Fed. Univ. Math Phys.,**11**:6, 753–763.
DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763

[22] D. K. Durdiev, A. A. Rakhmonov, *Inverse problem for a system of integro-differential equations for SH waves in a visco-elastic porous medium: Global solvability*, Theoret. and Math. Phys., **195**:3 (2018), 923–937.
DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9480

[23] U.D. Durdiev, *An inverse problem for a system of equations of viscoelasticity in homogeneous anisotropic media*, Siberian Journal of Industrial Mathematics, **22**: 4 (2019), 26–32.
DOI: https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.403

[24] D. K. Durdiev, A. A. Rahmonov,*The problem of determining the 2D-kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium* , J. Appl. Industr. Math., **14**:2 (2020), 281–295.

[25] A.N.Kolmogorov, S.V.Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis.* M: Science, 1976.

[26] J. Sh.Safarov *Estimates of the stability of solutions of some inverse problems for integro-differential equations.* Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki. **3**(2014). p. 75–82.
http://mi.mathnet.ru/rus/vuu/y2014/i3/p75

Jurabek Shakarovich Safarov
Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Universitet str., 4b,
100170, Tashkent, Uzbekistan
E-mail address: j.safarov65@mail.ru