

## ОТВЕТ РЕЦЕНЗЕНТУ НА ЗАМЕЧАНИЯ № 2

Отмечу, что статья была загружена на сайт журнала 12.02.2021. Да именно в 2021 году. Первая рецензия получена письмом от Дениса Кротова 19.11.22 года Вторая рецензия получена через сайт 28.11.2022 года. Текст рецензии приводится на сайте в форме сообщения. Привожу текст рецензии № 2. В конце файла приводится первая рецензия и ответ на нее.

### Вторая рецензия.

Да, я не совсем понял как используется алгоритм поиска в глубину для построения DFS-базиса. В частности, в приведенном в письме разборе случая 4-клики не совсем понятно, почему нельзя взять базис из трех циклов длины 3, отмеченных на рисунке. Стоит также обратить внимание, что в двух местах автор дает выбор якобы без потери общности, но на самом деле общность теряется: первый раз при выборе начальной вершины - есть центральная вершина, а есть вершины на периметре, выбор не эквивалентен, второй раз при выборе ребра - три ребра, идущие из вершины на периметре, не симметричны, симметричны только два, а третье, идущее в центр, при симметрии переходит само в себя (в утверждении же рассматривается конкретное расположение графа на плоскости, карта, мы не можем использовать все автоморфизмы графа). Это показывает, что полное доказательство даже для четырехвершинного графа не так просто и требует последовательного и корректного изложения.

Общий стиль рассуждений в статье не позволяет воспроизвести полные доказательства лемм. Автор апеллирует к знанию некоторого алгоритма и что из этого следуют те утверждения, которые написаны в середине доказательств. Во-первых, если в статье используются факты, доказанные в других работах, они обычно цитируются в виде явно сформулированных лемм, со ссылкой на источник. Если в указанной работе нет каких-то, пусть даже правдоподобных, фактов, то их нужно доказывать, а не просто говорить, что вот отсюда это следует. В подобных рассуждениях часто скрываются ошибки. Я принимаю обвинения в некомпетентности. Возможно, для читателя, который больше "в теме" и хорошо знаком с цитируемыми работами, логические переходы покажутся очевидными.

## Разбор рецензии № 2

### Первое утверждение от рецензента.

В частности, в приведенном в письме разборе случая 4-клики не совсем понятно, почему нельзя взять базис из трех циклов длины 3, отмеченных на рисунке.

Хорошо было бы, чтобы рецензент отметил эти циклы длины 3 или хотя бы назвал (сам не уверен, что пишет). Сам граф представлен на рис. 1. В этом графе 4 цикла длины 3. На рис. N они представлены, наверно, о них пишет рецензент. Никакие 3 цикла из них не составляют DFS-базис (именно DFS-базис) в полном 4-вершинном графе.

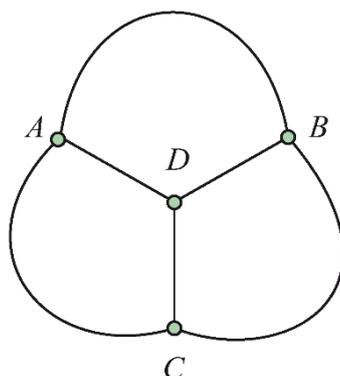


Рис. 1. Полный 4-вершинный граф

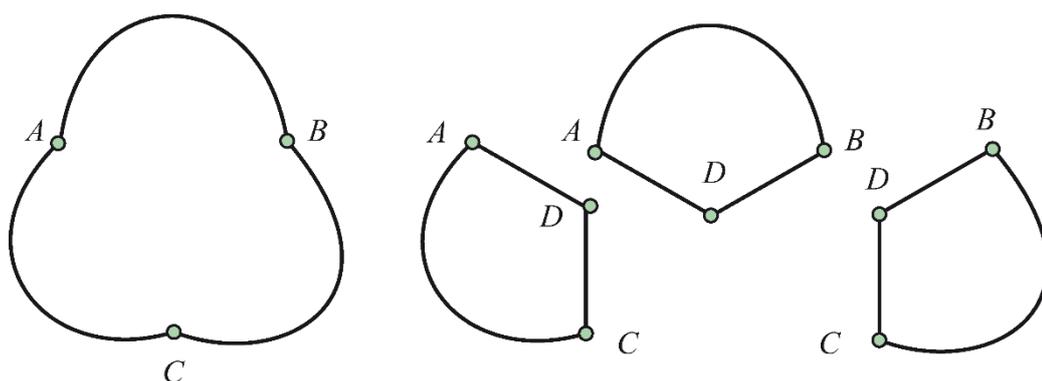


Рис. N. Все циклы длины три графа на рис. 1

*Напомню, что циклы DFS-базиса строятся при обходе графа в глубину.* Каждый из циклов DFS-базиса заканчивается обратным ребром в ранее пройденной вершине. Пусть рецензент построит дерево поиска по полному 4-вершинному графу и найдет эти циклы, которые приведены на рис. 3 и ри. 4. Отмечу, что очень странная рецензия. Рецензент, по-моему, не имеет никакого представления о циклах DFS-базиса.

### **Второе утверждение от рецензента.**

Стоит также обратить внимание, что в двух местах автор дала выбор якобы без потери общности, но на самом деле **(1) общность теряется: первый раз при выборе начальной вершины - есть центральная вершина, а есть вершины на периметре, (2) выбор не эквивалентен, второй раз при выборе ребра - три ребра, идущие из вершины на периметре, не симметричны, симметричны только два, а третье, идущее в центр, при симметрии переходит само в себя** (в утверждении же рассматривается конкретное расположение графа на плоскости, карта, мы не можем использовать все автоморфизмы графа). Это показывает, что полное доказательство даже для четырехвершинного графа не так просто и требует последовательного и корректного изложения.

**(1) общность теряется: первый раз при выборе начальной вершины - есть центральная вершина, а есть вершины на периметре**

**(2) второй раз при выборе ребра - три ребра, идущие из вершины на периметре, не симметричны, симметричны только два, а третье, идущее в центр, при симметрии переходит само в себя...**

Заметим, что исходный граф полный 4-вершинный, все вершины равнозначные (нет ни крайних и ни центральных вершин, это же полный граф). Каждая из вершин имеет степень 3. Где здесь нарушение общности? Странно, что этого не заметил рецензент.

Рассмотрим СВОЙСТВО 5

**Свойство 5.** Любые три цикла DFS-базиса  $C_1, C_2, C_3$ , попарно смежные друг с другом, имеют общий участок ребер. На карте графа, по крайней мере, один из данных циклов будет вложен в другой.

*Доказательство.* Смежные циклы DFS-базиса при их формировании размещаются в стеке циклов последовательно (см. алгоритм в работе [12, с. 385]). Пусть порядок размещения циклов в стеке  $C_1, C_2, C_3$ . (i) Общий участок в стеке первого и второго циклов является началом второго цикла. (ii) Общий участок в стеке второго и третьего циклов является началом третьего цикла. (iii) Общий участок в стеке первого и третьего циклов является началом третьего цикла. Из (i), (ii), (iii) заключаем, что участок ребер начало третьего цикла является общим для всех циклов.

На карте графа компоновка трёх циклов базиса при общей у них границы возможна, если, по крайней мере, один из данных циклов будет вложен в другой.  $\square$

**Первая часть СВОЙСТВА 5.** Любые три цикла DFS-базиса, попарно смежные друг с другом, имеют общий участок ребер.

В доказательстве этой части карта графа не используется. Это свойство верно для любого простого графа. Поэтому, чтобы снять все замечания

(1) общность теряется: первый раз при выборе начальной вершины - есть центральная вершина, а есть вершины на периметре

(2) второй раз при выборе ребра - три ребра, идущие из вершины на периметре, не симметричны, симметричны только два, а третье, идущее в центр, при симметрии переходит само в себя... (само в себя при поиске в глубину не бывает!!! Надо строить дерево поиска, постройте его.)

нарисуем этот граф в следующем абсолютно симметричном виде, смотрите рис. X1.

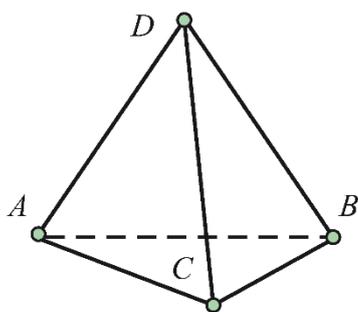


Рис. X1

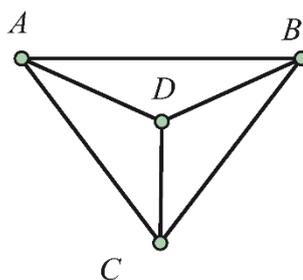


Рис. X2

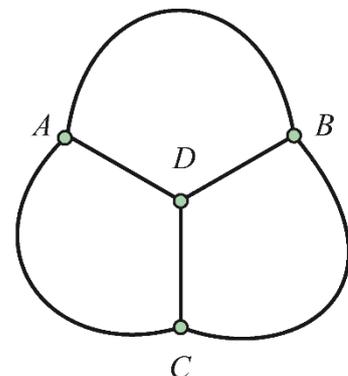


Рис. X3

Здесь на рис. X1 нет ни крайних и ни центральных вершин — все симметричные. Все варианты циклов DFS-базиса для него приведены на рис. 3 и рис. 4 на плоскости (других вариантов нет). Если внимательно посмотреть, то рис. 3 и рис. 4 — это один случай, по-разному нарисованы. Они строятся при обходе графа на рис. X1 в глубину — строится дерево поиска по графу, обойдите граф на рис. X1 и постройте эти циклы еще раз (все абсолютно симметрично). Циклы закрываются обратными ребрами в ранее пройденных вершинах. Нельзя брать циклы с потолка и говорить «почему нельзя взять базис из трех циклов длины 3» — это пишет РЕЦЕНЗЕНТ?

**Вторая часть СВОЙСТВА 5.** На карте графа, по крайней мере, один из данных циклов будет вложен в другой. (Здесь, действительно, речь идет о карте графа).

*Доказательство берем из статьи.* Циклы  $C_1, C_2, C_3$  попарно смежные и имеют общую границу. На карте графа компоновка трёх циклов базиса при общей у них границы возможна, если, по крайней мере, **один из данных циклов будет вложен в другой.**

Действительно, приведу на рис. Y **возможные** две такие компоновки на карте графа.

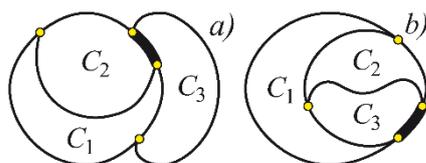


Рис. Y

### Последнее замечание рецензента.

Это показывает, что полное доказательство даже для четырехвершинного графа не так просто и требует последовательного и корректного изложения.

Неужели, построить циклы DFS-базиса для полного 4-иершинного графа (рис. Z) такая сложная задача.

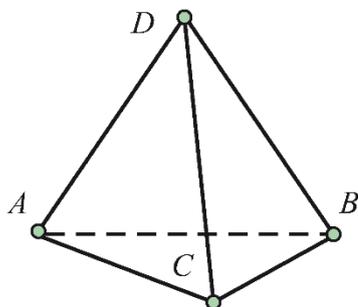


Рис. Z

Рецензент совершенно не понял, о чем идет речь в статье (или сделал вид, отписался, а сейчас говорит о каких-то автоморфизмах, хороший способ «замотать» вопрос). Никаких «автоморфизмов» нет, есть полный простой

граф, представленный на рис. Z. Для него и строятся циклы DFS-базиса. СВОЙСТВО 5, вокруг которого «крутится» рецензент, является верным. Может лучше посмотреть доказательство, предварительно изучив алгоритм поиска в глубину, а не придумывать с «потолка» циклы.

### **Третье утверждение от рецензента:**

Общий стиль рассуждений в статье не позволяет воспроизвести полные доказательства лемм. Автор апеллирует к знанию некоторого алгоритма и что из этого следуют те утверждения, которые написаны в середине доказательств. **Во-первых, если в статье используются факты, доказанные в других работах, они обычно цитируются в виде явно сформулированных лемм, со ссылкой на источник.** Если в указанной работе нет каких-то, пусть даже правдоподобных, фактов, то их нужно доказывать, а не просто говорить, что вот отсюда это следует. В подобных рассуждениях часто **скрываются ошибки.** Я принимаю обвинения в некомпетентности. Возможно, для читателя, который больше "в теме" и хорошо знаком с цитируемыми работами, логические переходы покажутся очевидными.

Рецензент делает «намек», что в статье используются какие-то результаты других авторов, на которые нет ссылок в статье. Утверждаю, что это голословное обвинение. **НИКАКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДРУГИХ АВТОРОВ БЕЗ ССЫЛОК НА НИХ В СТАТЬЕ НЕ ИСПОЛЬЗУЮТСЯ.** Даже странно, что рецензент об этом **ЗАЯВЛЯЕТ** во второй рецензии, в первой он об этом ничего подобного не говорил. Думаю, что рецензент понял, что СВОЙСТВО 5 верное, но что делать дальше пока не знает. Далее заявляет о каких-то **ОШИБКАХ**, сам их пока рецензент не нашел. На месте рецензента надо **УКАЗАТЬ** хоть какую-то ссылку на такую информацию и на **ПЛАГИАТ**, о котором рецензент пытается сказать. На все используемые результаты других авторов даются ссылки.

**Заключение.** Ничего нового во второй рецензии не нашел. *Контрпример 4-вершинного полного графа* (рецензия № 1) не является таковым, рецензент все пытается эту тему развивать. Однако просто так говорить о том, чем сам не владеешь, неправильно. На мой взгляд, тему с 4-вершинным графом надо закрыть (никакой это не контрпример, обычная отписка) или дайте этот полный 4-вершинный граф кому-нибудь еще и пусть он построит циклы DFS-базиса для рецензента. В статье все доказано корректно и верно. Повторю, что лучше разобраться в доказательстве СВОЙСТВА 5, там написано все понятно и доходчиво.

***Если можете, то напишите зачем вы решили поднять вопрос о статье после 2 лет молчания, что случилось?***

Эту переписку можно продолжить и дальше, но ошибок вы не найдете в статье, допускаю только какие-то опечатки. Не хочется читать отписки общего характера, зачем все это?

## ОТВЕТ РЕЦЕНЗЕНТУ НА ЗАМЕЧАНИЯ № 1

Отмечу, что статья была загружена на сайт журнала 12.02.2021. Да именно в 2021 году. Очень странного, что почти через 2 года журнал в лице Дениса Кротова присылает рецензию. Здесь какая-то ошибка или розыгрыш. Сама рецензия не верная, она и не является рецензией. Просто какая-то отписка. Все что написал рецензент абсолютно не верно.

### РЕЦЕНЗЕНТ пишет (это вся рецензия):

«Однако доказательства свойств не являются полными, присутствуют необоснованные утверждения вроде "Общий участок в стеке первого и второго циклов является началом второго цикла." Такие утверждения, как и все остальные математические рассуждения, требуют строгих математических доказательств, иначе легко не заметить ошибку. В частности, полный четырех-вершинный граф является контрпримером к Свойству 5, из чего следует, что оно неверно в том виде, в котором приведено в тексте. Рекомендую отклонить работу ввиду недостаточной обоснованности рассуждений.

Полный граф на 4х вершинах, **похоже**, контрпример к Свойству 5.»

Вот это СВОЙСТВО 5, о котором говорит рецензент. Я его взял из статьи.

**Свойство 5.** Любые три цикла DFS-базиса  $C_1, C_2, C_3$ , попарно смежные друг с другом, имеют общий участок ребер. На карте графа, по крайней мере, один из данных циклов будет вложен в другой.

*Доказательство.* Смежные циклы DFS-базиса при их формировании размещаются в стеке циклов последовательно (см. алгоритм в работе [12, с. 385]). Пусть порядок размещения циклов в стеке  $C_1, C_2, C_3$ . (i) Общий участок в стеке первого и второго циклов является началом второго цикла. (ii) Общий участок в стеке второго и третьего циклов является началом третьего цикла. (iii) Общий участок в стеке первого и третьего циклов является началом третьего цикла. Из (i), (ii), (iii) заключаем, что участок ребер начало третьего цикла является общим для всех циклов.

На карте графа компоновка трёх циклов базиса при общей у них границы возможна, если, по крайней мере, один из данных циклов будет вложен в другой. □

Полный граф на 4-х вершинах, о котором говорит рецензент, представлен на рис.1. В статье рассматриваются графы, уложенные на плоскости без самопересечений ребер — карты графа.

Рецензент пишет, что такой граф является «**ПОХОЖЕ**» контрпримером, который опровергает СВОЙСТВО 5.

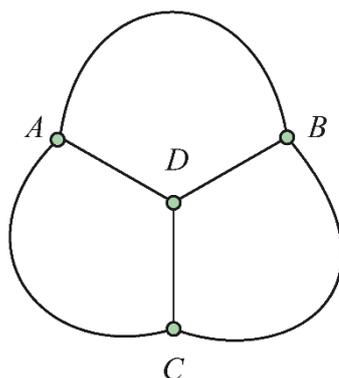


Рис. 1. Карта 4-вершинного полного графа

**У меня вопрос:**

Вообще, о чем пишет рецензент?

В статье в условии СВОЙСТВА 5 речь идет о циклах DFS-базиса (посмотрите выше). Пусть рецензент построит на 4-вершинном полном графе циклы DFS-базиса. Ведь об этом рецензент пишет!!! Только циклы могут служить контрпримером. Ничего подобного рецензент не приводит. Скорее всего, он их и не строил, а написал из каких-то своих соображений. Его замечание никакого отношения не имеет к СВОЙСТВУ 5. И, вообще, все замечания рецензента касаются содержимого стека, на котором формируются циклы DFS-базиса в алгоритме поиска в глубину.

СВОЙСТВО 5 в статье доказано математически строго (другие свойства тоже), если знать, как формируется стек в алгоритме поиска в глубину (в статье есть ссылка на этот алгоритм). Еще раз, перечитайте СВОЙСТВО 5 и замечание рецензента «о полном 4-вершинном полном графе». В СВОЙСТВЕ 5 речь идет о циклах DFS-базиса карты графа. Рецензент просто отписался. Так поступают, если не владеешь материалом.

Автор статьи: Иванов Борис Николаевич

Для полноты моих ответов рецензенту привожу все возможные варианты (их всего 2) циклов DFS-базиса для 4-вершинной полной карты (рис. 1).

### ОБХОД В ГЛУБИНУ 4-ВЕРШИННОГО ПОЛНОГО ГРАФА И ЕГО ЦИКЛЫ DFS-БАЗИСА

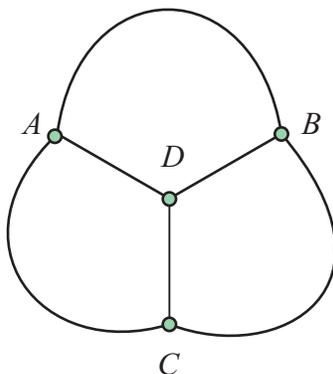


Рис. 1. Исходная полная 4-вершинная карта графа

О таком графе, как на рис. 1, говорит рецензент. Именно такой граф, по его мнению, является контрпримером. Рецензент предполагает, что в нем есть три цикла DFS-базиса, которые попарно смежные, однако не имеют общей границы.

В СВОЙСТВЕ 5 именно доказательство того, что опровергает рецензент контрпримером. Построим все варианты возможных цикла DFS-базиса для графа на рис. 1. Мы увидим, что для графа на рис. 1 СВОЙСТВО 5 выполняется. Это снимет обвинения рецензента в мой адрес контрпримером. Рецензент должен был бы указать эти цикла DFS-базиса, для которых нарушается условие СВОЙСТВО 5, если бы такие циклы нашлись. Покажем, что такого не может быть.

На рис. 1 представлен 4-вершинный полный плоский граф. Все его вершины являются равнозначными. Поэтому обход в глубину начнем с вершины  $A$ .

В точке  $A$  можно пойти по двум ребрам  $AB$  или  $AD$  или  $AC$ . Ребра  $AB$ ,  $AD$ ,  $AC$  — симметричные относительно вершины  $A$ . Достаточно рассмотреть обход графа в глубину относительно только одного из этих ребер. Рассмотрим относительно ребра  $AB$ . Дерево обхода в глубину графа на рис. 1 для этого случая представлено на рис. 2. На этом дереве красными разрывными линиями выделены циклы DFS-базиса. У них начальные и конечные вершины совпадают. По этому дереву получим два комплекта циклов DFS-базиса. По дереву обхода видно, что для первого комплекта циклов DFS-базиса общим ребром будет ребро  $BD$ . Для второго комплекта — это ребро  $BC$ . Они проведены более толстыми линиями.

На рис. 3 и рис. 4 показаны явно построенные данные два комплекта циклов DFS-базиса при обходе в глубину графа на рис. 1.

Отмечу еще раз, что никакого нарушения для СВОЙСТВА 5 указанный граф рецензентом не дает. Скорее всего, рецензент не понял, что он хотел сказать этим графом. СВОЙСТВО 5 доказано верно. Все-таки вы дайте эти рисунки рецензенту посмотреть после почти 2 летнего рецензирования. Статья на сайт была загружена 17.02.2021 года.

По рецензии статья была отклонена из-за этого 4-вершинного полного графа. Однако все выполняется.

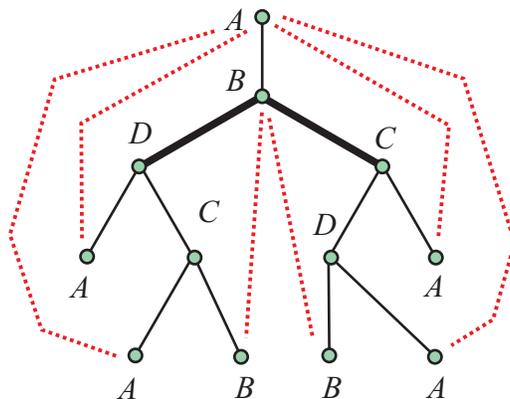


Рис. 2. Дерево обхода графа в глубину

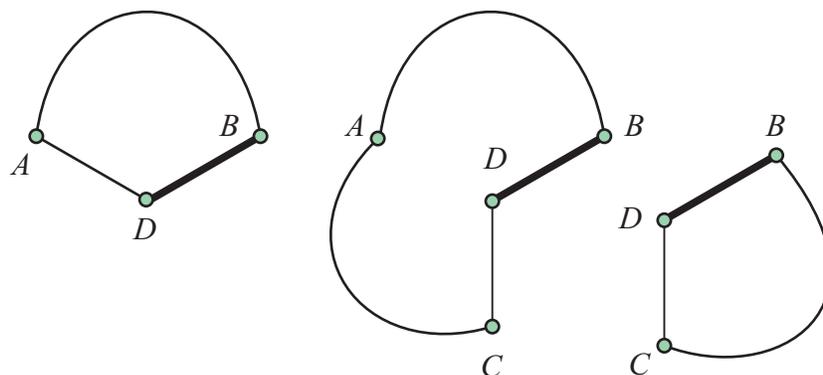


Рис. 3. Первый комплект циклов DFS-базиса

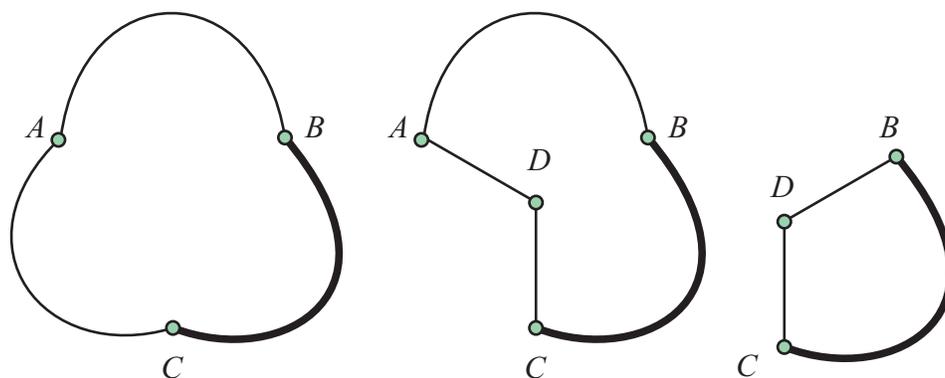


Рис. 4. Второй комплект циклов DFS-базиса

BORIS NIKOLAEVICH IVANOV  
 FAR EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,  
 SCHOOL OF NATURAL SCIENCES,  
 DEPARTMENT OF ALGEBRA, GEOMETRY AND ANALYSIS,  
 ST. SUHANOVA, 8,  
 690091, VLADIVOSTOK, RUSSIA  
*E-mail address:* ivanov.bn@dvfu.ru