S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том ??, стр. ??–?? (2021) УДК 512.538
DOI ??????????? MSC 20N15

О СТЕПЕНИ НЕАССОЦИАТИВНОСТИ ИДЕМПОТЕНТНОГО КОММУТАТИВНОГО ГРУППОИДА

В.С. Кальницкий, А.Н. Петров

Abstract. We introduced the notion of the degree of non-associativity of idempotent commutative groupoid and constructed symmetrical idempotent ternary operation on the set of ordered partitions of the finite set. We have shown that the traditionally used ternary operation on this set does not have the natural property, but it can be replaced by an alternative ternary operation that is a symmetrization of a derivative of the initial binary operation.

Keywords: commutative groupoid, idempotent groupoid, universal algebra, non-associativity.

1. Степень неассоциативности

Пусть $(G, \circ)$ — группоид с бинарной операцией $\circ : G \times G \to G$. Структура *конечного* группоида полностью определяется таблицей Кэли, в которой представлены все результаты операции. Введем обозначения основных законов, которым может удовлетворять операция $\circ$, для удобства ссылок.

$\mathfrak{A}$. Для любых $a, b, c \in G$: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (ассоциативность).

$\mathfrak{I}$. Для любого $a \in G$: $a \circ a = a$ (идемпотентность).

$\mathfrak{K}$. Для любых $a, b \in G$: $a \circ b = b \circ a$ (коммутативность).

$\mathfrak{N}$. Существует $o \in G$, такой, что для любого $a \in G$: $o \circ a = a \circ o = a$ (наличие нейтрального элемента).

$\mathfrak{O}$. Для любого $a \in G$ существует $b \in G$: $b \circ a = a \circ b = o$ (обратимость).

Мы будем придерживаться аддитивной формы записи, если рассматриваемый нами группоид будет коммутативными.

Kalnitsky, V.S., Petrov, A.N. On the degree of non-associativity of an idempotent commutative groupoid.

Поступила ? ?? 2021 г., опубликована ? ?? 2021 г.

Определение 1. *Группоид* $(G, \oplus)$ *будем называть*

а) $\mathfrak{IK}$*-группоидом, если в нем выполнены аксиомы* $\mathfrak{I}, \mathfrak{K}$*;*

б) парагруппой ([1]), если в нем выполнены аксиомы $\mathfrak{N}, \mathfrak{O}$*;*

в) $\mathfrak{IK}$*-парагруппой, если в нем выполнены аксиомы* $\mathfrak{I}, \mathfrak{K}, \mathfrak{N}, \mathfrak{O}$.

Рассмотрим на множестве G n-арную операцию, $n \geqslant 2$, $\Box_n : G \times \cdots \times G \to G$. Если для любого элемента $a \in G$ выполнено равенство $\Box_n(a, \ldots, a) = a$, то операция называется *идемпотентной*. Если для любого набора элементов $(a_1, \ldots, a_n)$ и для любой перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ выполнено равенство

$$\Box_n(a_1, \ldots, a_n) = \Box_n(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}),$$

то операция называется *симметричной*.

Определение 2. *Тройку элементов* (a_1, a_2, a_3) *группоида* $(G, \circ)$ *назовем*

а) ассоциативной, если выполнено равенство

$$(a_1 \circ a_2) \circ a_3 = a_1 \circ (a_2 \circ a_3),$$

б) симметрично-ассоциативной, если однозначно определен элемент, равный сумме элементов в любом порядке и при любой расстановке скобок

$$(a_1 \circ a_2) \circ a_3 = a_1 \circ (a_2 \circ a_3) = (a_{\sigma(1)} \circ a_{\sigma(2)}) \circ a_{\sigma(3)} = a_{\sigma(1)} \circ (a_{\sigma(2)} \circ a_{\sigma(3)}).$$

Целью настоящей статьи является построение по бинарной операции $\oplus$ на $\mathfrak{IK}$-группоиде симметричной идемпотентной тернарной операции $\widehat{\oplus}$, совпадающей с суммой трех элементов на множестве W всех симметрично-ассоциативных троек.

Определим на $\mathfrak{IK}$-группоиде $(G, \oplus)$ тернарную операцию

$$[a, b, c] = (a \oplus b) \oplus c.$$

Полученный 3-группоид $(G, [\,])$ называется *производным* группоидом ([6], [7]). Операция $[\,]$, вообще говоря не симметрична, но в силу коммутативности для каждой тройки элементов (a, b, c) различными могут быть лишь три значения из шести значений на всех перестановках.

Определение 3. *Сопоставление*

$$\mathfrak{S} : (a, b, c) \mapsto ([a, b, c], [b, c, a], [c, a, b])$$

будем называть шагом симметризации.

Если $(a, b, c) \in W$, то $\mathfrak{S}(a, b, c) = (d, d, d)$, где $d = (a \oplus b) \oplus c$.

Определение 4. *Наименьшее число* s *такое, что* $\mathfrak{S}^{s+1}(a, b, c) = (d, d, d)$ *для некоторого* d*, будем называть степенью неассоциативности тройки* (a, b, c) $\mathfrak{IK}$*-группоида и писать* $s = dna(a, b, c)$*.Если такое число не определено, будем говорить, что степень неассоциативности тройки бесконечна и тройка является вполне неассоциативной.*

По определению, $[\mathfrak{S}^s(a, b, c)] = d$. Степень неассоциативности любой тройки элементов из W равна 0.

Определение 5. *Степенью неассоциативности* $\mathfrak{IK}$*-группоида* $(G, \oplus)$ *будем называть символ*

$$DNA(G) = \sup_{a,b,c \in \mathfrak{G}} dna(a, b, c).$$

В случае $DNA(G) = \infty$ *будем говорить, что группоид вполне неассоциативен.*

Понятие степени неассоциативности обладает свойством монотонности: для любого подгруппоида $kH \subseteq G$ верно $DNA(H) \leqslant DNA(G)$. В силу монотонности представляет интерес вычисление DNA для группоидов малого порядка.

Тривиальный группоид и единственный с точностью до изоморфизма $\mathfrak{IK}$-группоид порядка 2 являются полугруппами, т.е. удовлетворяет закону $\mathfrak{A}$.

Существует семь с точностью до изоморфизма $\mathfrak{IK}$-группоидов порядка 3

E_1	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

E_2	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

E_3	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	b	c	c

E_4	a	b	c
a	a	b	b
b	b	b	c
c	b	c	c

E_5	a	b	c
a	a	b	b
b	b	b	a
c	b	a	c

E_6	a	b	c
a	a	b	a
b	b	b	c
c	a	c	c

E_7	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

Прямые вычисления показывают, что

$DNA(E_1) = DNA(E_2) = 0$,

$DNA(E_3) = DNA(E_4) = DNA(E_5) = 1$,

$DNA(E_6) = DNA(E_7) = \infty$

В группоиде E_5, например,

$$\mathfrak{S}(a, b, c) = (a, a, b), \quad \mathfrak{S}(a, a, b) = (b, b, b).$$

В группоиде E_3: $[a, a, c] = b$, но $[a, c, a] = a$, т.е. тройка (a, a, c) не является симметрично-ассоциативной, но один шаг симметризации приводит к тройке (a, a, a).

Равенство $DNA(G) = 0$ означает, что $\mathfrak{IK}$-группоид является полугруппой, верно и обратное.

Для $\mathfrak{IK}$-группоида $(G, \oplus)$ конечной степени неассоциативности s зададим тернарную операцию

$$\widehat{\oplus}(a, b, c) = [\mathfrak{S}^s(a, b, c)].$$

Исходя из построения, эта операция является симметричной, идемпотентной и на множестве всех симметрично-ассоциативных троек относительно бинарной операции $\oplus$ совпадает с их суммой. Будем называть $\widehat{\oplus}$ *продолжением* $\oplus$.

Из всех $\mathfrak{IK}$-группоидов порядка три только шесть имеют идемпотентные, симметричные тернарные продолжения. Опишем их явно в виде сводной таблицы значений на всех комбинациях аргументов (кроме тривиальных)

$\widehat{\oplus}$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
aab	a	a	a	b	b
aac	a	a	a	b	b
bba	a	a	a	b	b
bbc	a	b	c	c	b
cca	a	a	c	c	b
ccb	a	b	c	c	b
abc	a	a	b	c	b

Исходя из полученных результатов, мы видим, что тернарные операции на E_1 и E_5 могут быть получены друг из друга переименованием элементов $a \leftrightarrow b$. Таким образом, существует только четыре с точностью до изоморфизма идемпотентные, симметричные тернарные операции на множестве из трех элементов, являющихся продолжениями. При этом, одна тернарная операция может быть продолжением двух различных бинарных операций, задающих неизоморфные группоиды.

В терминологии [9] построенная тернарная операция является *бинарно разложимой*. Например, при $DNA(G, [\,]) = 1$

$$\widehat{\oplus}(a,b,c) = (((a \oplus b) \oplus c) \oplus ((b \oplus c) \oplus a)) \oplus ((c \oplus a) \oplus b).$$

Определение 6. *n-арная операция $[\,]$ называется ассоциативной, если для любого набора элементов $(a_1, \dots, a_{2n-1})$ выполнена цепочка равенств*

$$[[a_1, \dots, a_n], a_{n+1}, \dots, a_{2n-1}] = \\ = [a_1, [a_2, \dots, a_{n+1}], a_{n+2}, \dots, a_{2n-1}] = \dots \\ \dots = [a_1, \dots, [a_n, \dots, a_{2n-1}]].$$

Построенное продолжение, вообще говоря, не является ассоциативной операцией. Например, по результатам вычисления $\widehat{\oplus}$ в группоиде E_3:

$$\widehat{\oplus}(\widehat{\oplus}(a,b,c),c,a) = \widehat{\oplus}(b,c,a) = b,$$

но

$$\widehat{\oplus}(a, \widehat{\oplus}(b,c,c), a) = a.$$

Если $DNA(G, \oplus) = 0$, то ассоциативность продолжения следует из ассоциативности бинарной операции.

Определение 7. *Элемент e n-группоида $(G, [\,])$ называется единицей* ([8]), *если для любого $x \in G$ выполнено*

$$[xe \dots e] = [exe \dots e] = \dots = [e \dots ex] = x.$$

Единица e n-группоида $(G, [\,])$ задает *проекцию*, т.е. бинарную операцию $x * y = [xe \dots ey]$, для которой она также является единицей. Если операция $[\,]$ была коммутативной и идемпотентной, то операция $*$ является коммутативной, но вообще говоря, не идемпотентной.

Определение 8. *Элемент o n-группоида $(G, [\,])$ с идемпотентной симметричной n-арной операцией назовем проективным, если проекция $*$ является коммутативной и идемпотентной.*

Среди описанных нами тернарных продолжений только у трех есть (единственный) проективный элемент (E_2, c), (E_3, b), (E_4, a). В этих 3-группоидах сужения порождают ровно те бинарные операции, чьими продолжениями являются тернарные суммы. Это мотивирует следующие определения.

Множество G с набором Ω операций некоторых арностей называется Ω-*алгеброй* (*универсальной алгеброй*), набор операций — *сигнатурой*, G — *носитель* ([2]).

Определение 9. *Ω-Алгебра $(G, \oplus_2, \oplus_3)$ будет называться естественной, если*

1. операция $\oplus_2$ является идемпотентной и коммутативной;
2. операция $\oplus_3$ является идемпотентной и симметричной;
3. $DNA(G, \oplus_2) < \infty$ и для любых $a, b \in G$ выполнено $\widehat{\oplus}_2(a,b,c) = \oplus_3(a,b,c)$;
4. тернарная операция $\oplus_3$ имеет проективный элемент o такой, что для любых $a, b \in G$ выполнено $\oplus_3(o,a,b) = \oplus_2(a,b)$.

Следуя этому определению, три описанные выше Ω-алгебры E_i, $i = 2, 3, 4$, являются естественными.

2. Основные результаты

Зафиксируем натуральное число n и рассмотрим множество $\mathfrak{G}_n$ упорядоченных разбиений отрезка натурального ряда $[1, \ldots, n]$. Количество элементов этого множества называется числом Фубини или упорядоченным числом Белла [3]. Существуют различные интерпретации данного множества как алгебраические, так и геометрические (см. ссылки в [4]).

Для каждого упорядоченного разбиения сопоставим последовательность длины n по следующему правилу: на первом месте стоит номер группы по порядку, в которую входит 1, на втором номер группы, содержащей 2, и т.д. Такое сопоставление является взаимно однозначным.

Множество $\mathfrak{G}_n$ естественным образом разбивается на подмножества $\mathfrak{G}_{n,k}$ по количеству $k, k = 1, \ldots, n$, групп разбиений исходного отрезка. Каждая группа в нашей нумерации состоит всех из последовательностей длины n, в котором участвуют лишь числа $1, \ldots, k$ и каждое не менее одного раза.

В приложениях, в которых элементы множества $\mathfrak{G}_2$ интерпретируются как ранжированный список предпочтений, рассматривается действие, сопоставляющее нескольким ранжированным спискам так называемый агрегированный список. Описываемая ниже методика получения агрегированного списка была предложена французским математиком Жан-Шарлем де Борда́ ([5]).

Определение 10. *Агрегированной суммой $\uplus_s$ последовательностей из $\mathfrak{G}_n$ называется последовательность полученная по следующему правилу: последовательности складываются векторно, каждому числу в полученной последовательности сумм присваивается его номер по порядку возрастания, причем одинаковым суммам присваивается одинаковый номер.*

Например,

$$(1,2,3,4) + (2,1,3,4) = (3,3,6,8);$$

$$(1,2,3,4) \uplus_2 (2,1,3,4) = (1,1,2,3).$$

Предложение 1. *Группоид $(\mathfrak{G}_n, \uplus_2)$ является $\mathfrak{I}\mathfrak{K}$-парагруппой. Для любого s операция $\uplus_s$ является симметричной и идемпотентной s-арной операцией.*

Доказательство. Прямо следует из определения. Нейтральным элементом является набор $\bar{1} = (1, \ldots, 1)$, обратным к набору $\gamma = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{G}_{n,k}$ является набор $\bar{\gamma} = (k - a_1 + 1, \ldots, k - a_n + 1)$. $\square$

Прямое вычисление показывает, что $DNA(\mathfrak{G}_2, \uplus_2) = 1$ и $\widehat{\uplus}_2 = \uplus_3$.

Программными средствами установлено, что $DNA(\mathfrak{G}_3, \uplus_2) = 1$, т.е. агрегированная сумма продолжима. Однако, как мы докажем ниже, ни для какого $n \geqslant 3$ продолжение $\widehat{\uplus}_2$, если оно существует, не совпадает с тернарной агрегированной суммой $\uplus_3$.

Сразу заметим, что для любого n, $n \geqslant 2$, на множестве $\mathfrak{G}_n$ упорядоченных разбиений не существует ассоциативной бинарной операции, порождающей тернарную агрегированную сумму $\uplus_3$, так как последняя не ассоциативна. Чтобы убедиться в этом, запишем для $a \neq \bar{1}$

$$\uplus_3(\uplus_3(\bar{a}, \bar{a}, a), a, a) = \uplus_3(\bar{a}, a, a) = a;$$

$$\uplus_3(\bar{a}, \bar{a}, \uplus_3(a, a, a)) = \uplus_3(\bar{a}, \bar{a}, a) = \bar{a};$$

Теорема 1. *Для любого n, $n \geqslant 3$, на множестве $\mathfrak{S}_n$ упорядоченных разбиений не существует идемпотентной коммутативной бинарной операции с нейтральным элементом, порождающей тернарную агрегированную сумму $\uplus_3$.*

Доказательство разобъём на несколько шагов.

Лемма 1. *Если $\mathfrak{IK}$-группоид $(\mathfrak{S}_n, \oplus)$, $n \geqslant 1$, содержит нейтральный элемент o и тернарное продолжение $\widehat{\oplus}$ совпадает с тернарной операцией $\uplus_3$, то для любых $a, b \in \mathfrak{S}_n$ выполнено тождество $a \oplus b = \uplus_3(a, b, \bar{1})$.*

Доказательство. Осуществим шаг симметризации для тройки элементов группоида $(\bar{1}, \bar{1}, o)$
$$[\bar{1}, \bar{1}, o] = (\bar{1} \oplus \bar{1}) \oplus o = \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{1},$$
в силу нейтральности o, коммутативности и идемпотентности $\oplus$. Этот же элемент порождается и двумя другими циклическими перестановками тройки. Таким образом, рассматриваемая тройка является симметрично-ассоциативной и следовательно $\widehat{\oplus}(\bar{1}, \bar{1}, o) = \bar{1}$. По условию, этот элемент совпадает с агрегированной суммой $\uplus_3(\bar{1}, \bar{1}, o) = o$. Мы получили равенство двух элементов $o = \bar{1}$.

Далее, для любых $a, b \in \mathfrak{S}_n$ рассмотрим тройку (a, b, o) и осуществим шаг симметризации.

$$[a, b, o] = (a \oplus b) \oplus o = a \oplus b;$$
$$[b, o, a] = (b \oplus o) \oplus a = a \oplus b;$$
$$[o, a, b] = (o \oplus a) \oplus b = a \oplus b.$$

Таким образом,
$$\uplus_3(a, b, \bar{1}) = \widehat{\oplus}(a, b, o) = a \oplus b.$$
Что и требовалось доказать. □

Лемма 2. *Для любого n, $n \geqslant 3$, тернарная агрегированная сумма $\uplus_3$ не является продолжением бинарной агрегированной суммы $\uplus_2$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно предъявить тройку элементов, для которой значение тернарного продолжения $\widehat{\uplus}_2$ и тернарной агрегированной суммы $\uplus_3$ не совпадают. Рассмотрим тройку
$$a = b = (1, 2, 3, 4, \ldots, n); \quad c = (3, 1, 2, 4, \ldots, n).$$
При $n = 3$ рассматриваем только первые три цифры в наборах. Выполним шаг симметризации
$$(a \uplus_2 a) \uplus_2 c = a \uplus_2 c.$$
$$(1, 2, 3, \ldots) + (3, 1, 2, \ldots) = (4, 3, 5, \ldots);$$
$$(1, 2, 3, \ldots) \uplus_2 (3, 1, 2, \ldots) = (2, 1, 3, \ldots) =: d;$$
$$(a \uplus_2 c) \uplus_2 a = d \uplus_2 a.$$
$$(1, 2, 3, \ldots) + (2, 1, 3, \ldots) = (3, 3, 6, \ldots);$$
$$(1, 2, 3, \ldots) \uplus_2 (2, 1, 3, \ldots) = (1, 1, 2, \ldots) =: f;$$
Мы получили новую тройку
$$\mathfrak{S}(a, b, c) = (d, f, f).$$
Далее,
$$d \uplus_2 f = (2, 1, 3, \ldots) \uplus_2 (1, 1, 2, \ldots) = (2, 1, 3, \ldots) = d;$$

Следовательно, следующий шаг симметризации дает тривиальный набор (d, d, d), т.е.

$$\widehat{\uplus}_2(a, b, c) = d.$$

С другой стороны

$$(1, 2, 3, \dots) + (1, 2, 3, \dots) + (3, 1, 2, \dots) = (5, 5, 8, \dots);$$

$$\uplus_3(a, b, c) = f.$$

Доказательство завершено. $\square$

Замечание. Программными средствами осуществлен полный перебор троек для $n = 3$. В Ω-алгебре $(\mathfrak{G}_3, \uplus_2, \uplus_3)$ существует ровно четыре тройки элементов с точностью до перестановок цифр в наборах, на которых отличаются тернарные операции $\widehat{\uplus}_2$ и $\uplus_3$.

$$\{(1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 1, 1)\}; \{(1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 2, 1)\};$$

$$\{(1, 2, 3), (3, 1, 2), (1, 2, 3)\}; \{(1, 1, 2), (1, 1, 2), (3, 2, 1)\}.$$

Таким образом, отличие операций незначительно, так как порядок группоида равен 13.

Доказательство теоремы 1. В условиях теоремы из леммы 1 следует, что нейтральный элемент $\bar{1}$ является проективным для тернарной агрегированной суммы $\uplus_3$ и порождает данную бинарную операцию. С другой стороны, проекция тернарной агрегированной суммы является бинарной агрегированной суммой $\uplus_2$. По лемме 2, тернарная агрегированная сумма не является продолжением бинарной агрегированной суммы. Мы получили противоречие. $\square$

Следствие 1. *При любом $n, n \geqslant 3$, Ω-алгебра $(\mathfrak{G}_n, \uplus_2, \uplus_3)$ не является естественной.*

В силу того, что у тернарной агрегированной суммы существует единственный проективный элемент $\bar{1}$, проекция ее совпадает с бинарной агрегированной суммой и потому замена последней на любую другую бинарную операцию не породит естественной алгебры. Однако, вопрос о бинарной разложимости тернарной суммы остается открытым.

С другой стороны, для продолжения $\widehat{\uplus}_2$ элемент $\bar{1}$ также является проективным и порождает $\uplus_2$, т.е. Ω-алгебра $(\mathfrak{G}_n, \uplus_2, \widehat{\uplus}_2)$ является естественной.

References

[1] Zaitzev V.F. *Introduction to the contemporary group analysis. Part 2.* — StP: RGPU Press. — 1996. — 40 P.

[2] Cohn P.M., *Universal Algebra.* — D.Reidel Publishing. — 1981. — 404 P.

[3] Comtet L., *Advanced Combinatorics*, Reidel. — 1974. — 228 P.

[4] OEIS Foundation Inc. (2021), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://oeis.org/A000670.

[5] Beshelev S.D., Gurvich F.G. *Mathematics-Statistics methods of expert estimations.* — M.: Statistics. — 1980. — 264 P.

[6] Galmak A.M. *N-ary groups.* // Hypercomplex numbers in geometry and physics. — 2007. — V. 2 (8), issue 4. — P. 77–96.

[7] Dornte, W. Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dornte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

[8] Post E. L., *Polyadic groups* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1940. — Vol. 48, № 2. — P. 208–350.

[9] Prikhodovsky M.A. *On some classes of n-ary algebraic operations* // Vestn. Tomsk st. univ. Math. and Mech. — 2009. — V. 2 (6). — P. 48–54.

Vyacheslav Stepanovich Kalnitsky
Saint-Petersburg state university,
Universitetskaya emb., 7/9,
199034, Saint Petersburg, Russia
E-mail address: st006987@spbu.ru

Andrey Nikolayevich Petrov
Military Academy of Logistics,
Admiral Makarov emb., 8,
199034, Saint Petersburg, Russia
E-mail address: petrovap6139@mail.ru