S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 32–46 (2020) УДК 519.71

DOI 10.33048/semi.2020.17.003 MSC 08A99

О КЛАССАХ ЧАСТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ МАКСИМАЛЬНЫМИ ЧАСТИЧНЫМИ УЛЬТРАКЛОНАМИ

С.А. БАДМАЕВ, И.К. ШАРАНХАЕВ

Abstract. In this paper the problem of classification of partial functions with respect to belonging to the maximal partial ultraclones of rank 2 is considered. A description of the equivalence classes of partial functions by this relation is obtained.

Keywords: partial function, multifunction, many-valued logic, superposition, partial ultraclone.

1. Введение

В теории дискретных функций активно исследуются мультифункции – функции, заданные на конечном множестве A и принимающие в качестве значений подмножества множества A. При определении суперпозиции для мультифункций на A, где $|A| = k$, мы по сути имеем дело с подмножеством множества всех функций 2^k-значной логики. Заметим, что обычная суперпозиция, которая рассматривается для функций k-значной логики, в данном случае не подойдет. К настоящему времени известны два вида суперпозиции для мультфункций [1, 2].

Пусть $A = \{0, 1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$P_{2,n}^{\overline{*}} = \{f | f : A^n \to F\}, P_2^{\overline{*}} = \bigcup_n P_{2,n}^{\overline{*}}$,

$P_{2,n}^{*} = \{f | f \in P_{2,n}^{\overline{*}}$ и $|f(\tilde{\alpha})| \le 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2^{*} = \bigcup_n P_{2,n}^{*}$,

$P_{2,n}^{-} = \{f | f \in P_{2,n}^{\overline{*}}$ и $1 \le |f(\tilde{\alpha})| \le 2$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2^{-} = \bigcup_n P_{2,n}^{-}$,

---

Badmaev, S.A., Sharankhaev, I.K., On the classes of partial functions generated by maximal partial ultraclones.

Работа первого автора поддержана РФФИ (грант 18-31-00020).

Поступила 1 мая 2019 г., опубликована 24 января 2020 г.

$P_{2,n} = \{f | f \in P_{2,n}^{\overline{*}}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2 = \bigcup_n P_{2,n}$.

Функции из P_2 называют функциями алгебры логики, из P_2^* – частичными функциями на A, из $P_2^{\overline{*}}$ – мультифункциями на A.

Задача о принадлежности функций максимальным (предполным) классам является достаточно известной в теории дискретных функций, например, для функций алгебры логики она решена в [4]. Используя разбиение множества всех функций на классы эквивалентности по отношению принадлежности максимальным классам, можно оценить мощности всевозможных базисов, описать все типы базисов, исследовать решетку замкнутых классов.

В [5] описаны все максимальные частичные ультраклоны мультифункций на A. В статье рассматривается вопрос о принадлежности мультифункций максимальным частичным ультраклонам, исследован класс частичных функций на A, который является подмножеством множества всех мультифункций на A. Получено описание всех классов эквивалентности частичных функций по отношению принадлежности максимальным частичным ультраклонам.

2. Основные понятия и определения

Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)),$$

где $f, f_1, \ldots, f_n \in P_2^{\overline{*}}$, определяла мультифункцию $g(x_1, \ldots, x_m)$, следуя [2, 3], определим значения мультифункции f на наборах из подмножеств множества A следующим образом: если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in A^m$, то

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пересечение или объединение берется по всевозможным наборам $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ таким, что $\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$. На наборах, содержащих $\varnothing$, мультифункция принимает значение $\varnothing$.

Это определение позволяет вычислить значение $f(x_1, \ldots, x_n)$ на любом наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in F^n$.

Под замкнутым классом мультифункций понимается множество мультифункций, замкнутое относительно рассматриваемой суперпозиции. Множество мультифункций, замкнутое относительно суперпозиции и содержащее все проекции, называется частичным ультраклоном.

Отметим, что в настоящей работе мы будем придерживаться терминологии, принятой в [2, 3], что позволит нам здесь не вводить дополнительных определений.

Мощность множества A называется рангом частичного ультраклона. Для упрощения записи договоримся использовать следующую кодировку: $\varnothing \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0,1\} \leftrightarrow -$. Мультифункцию, которая на всех наборах принимает значение $*$, будем обозначать просто $*$.

Из [5] известно, что в полном частичном ультраклоне ранга 2 максимальными частичными ультраклонами являются следующие 12 множеств:

1) K_1 – множество, состоящее из всех мультифункций f, принимающих на нулевом наборе либо значение 0, либо значение $*$;

2) K_2 – множество, состоящее из всех мультифункций f, принимающих на единичном наборе либо значение 1, либо значение $*$;

3) K_3 – множество, состоящее из всех мультифункций f, для которых выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{0}) = *$ или $f(\tilde{1}) = *$;
- $f(\tilde{0}) = 0$ и $f(\tilde{1}) = 1$.

4) K_4 – множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из трех условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = -$;
- $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$.

5) K_5 – множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = *$ или $f(\bar{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$.

6) $K_6 = P_2^- \cup \{*\}$;

7) $K_7 = P_2^*$;

8) K_8 – множество всех мультифункций f, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

- если $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\gamma}) \in \{0, 1\}$, то
$$f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\},$$
где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что $(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000), (001), (010), (111)\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- если существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde{\beta}$ верно $f(\tilde{\beta}) \neq 1$;
- пусть двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда, если $f(\tilde{\alpha}) = *$, то $f(\tilde{\beta}) = *$.

9) K_9 – множество всех мультифункций f, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

- если $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\gamma}) \in \{0, 1\}$, то
$$f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\},$$
где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что $(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000), (011), (101), (111)\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- если существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde{\beta}$ верно $f(\tilde{\beta}) \neq 0$;
- пусть двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда, если $f(\tilde{\beta}) = *$, то $f(\tilde{\alpha}) = *$.

10) K_{10} – множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат:

$$R_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & \delta \end{pmatrix},$$ где $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^t$ – всевозможные столбцы, в которых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1, -, *\}$ одновременно удовлетворяют двум условиям:

- в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$ среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ как минимум два принимают значение $*$;
- в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$, если среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ встречается 0 или 1, то все они неравны $-$.

11) K_{11} – множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат

$$R_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & 0 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & 0 & 0 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}.$$

12) K_{12} – множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\tilde{\alpha}^0$ и $\tilde{\alpha}^1$ уточнения набора $\tilde{\alpha}$, в которых все значения $-$ заменили на 0 и 1 соответственно.

Для каждой мультифункции f однозначно определяется вектор принадлежности $\tau(f) = (\tau_1, \ldots, \tau_{12})$ классам $K_1 - K_{12}$, в котором для каждого $i \in \{1, \ldots, 12\}$

$$\tau_i = \begin{cases} 0, \text{если } f \in K_i; \\ 1, \text{если } f \notin K_i. \end{cases}$$

Отношение принадлежности множествам $K_1 - K_{12}$ является отношением эквивалентности и порождает разбиение $P_2^{\bar{*}}$ на классы эквивалентности, у мультифункций из одного класса векторы принадлежности множествам $K_1 - K_{12}$ совпадают.

Заметим, что мультифункция $*$ и проекции принадлежат всем множествам $K_1 - K_{12}$.

3. Вспомогательные результаты

В этом параграфе доказываются вспомогательные утверждения необходимые для получения основного результата.

Лемма 1. *Для любой функции $f \in P_2^* \setminus (P_2 \cup \{*\})$ справедливо, что:*
1) если $f \in K_1 \cap K_2$, то $f \in K_3$.
2) если $f \notin K_1 \cup K_2$, то $f \notin K_3$.

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 2. *Для любой функции $f \in P_2^* \setminus (P_2 \cup \{*\})$ справедливо, что:*
1) если $f \in K_4$, то $f \in K_1 \cap K_2$ или $f \notin K_1 \cup K_2$.
2) если $f \in K_4$, то $f \in K_5 \setminus (K_8 \cup K_9 \cup K_{11} \cup K_{12})$.

Доказательство. Справедливость пункта 1) очевидна. Докажем пункт 2). Очевидно, что если $f \in K_4$, то $f \in K_5$. Так как $f \in K_4$, то $f \notin K_8 \cup K_9$, иначе $f = *$, что невозможно.

Докажем от противного, что $f \notin K_{11}$. Пусть $f \in K_{11}$. Из $f \in K_4$ следует, что найдется набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = \beta$, $f(\overline{\tilde{\alpha}}) = \overline{\beta}$, где $\beta \in \{0,1\}$. Если $f(\tilde{0}) = *$, то

$$f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{\alpha} \\ \overline{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \beta \\ \overline{\beta} \end{pmatrix},$$

противоречие. Пусть $f(\tilde{0}) = \gamma$, где $\gamma \in \{0,1\}$. Очевидно, что найдется набор $\tilde{\delta}$ такой, что $f(\tilde{\delta}) = *$. Тогда

$$f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ * \end{pmatrix},$$

противоречие.

Доказательство того, что $f \notin K_{12}$ аналогично. □

Лемма 3. *Для любой функции $f \in P_2^* \setminus (P_2 \cup \{*\})$ справедливо, что:*

1) если $f \notin K_5$, то $f \notin K_4 \cup K_{11} \cup K_{12}$.

2) если $f \notin K_3$, то $f \notin K_8 \cup K_9$.

3) $f \notin K_8 \cap K_9$.

4) $f \notin K_{11} \cap K_{12}$.

Доказательство. Докажем пункт 1). Очевидно, что если $f \notin K_5$, то $f \notin K_4$ и найдутся наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $f(\tilde{\alpha}) = f(\overline{\tilde{\alpha}}) = \gamma$, где $\gamma \in \{0,1\}$, и $f(\tilde{\beta}) = *$. Если $f(\tilde{0}) = *$, то

$$f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{\alpha} \\ \overline{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix},$$

а значит $f \notin K_{11}$. Если $f(\tilde{0}) = \delta$, где $\delta \in \{0,1\}$, то

$$f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \\ * \end{pmatrix},$$

следовательно $f \notin K_{11}$. Доказательство того, что $f \notin K_{12}$ аналогично.

Докажем пункт 2). От противного. Если $f \in K_8$, то $f(\tilde{1}) = *$, что противоречит условию $f \notin K_3$. Если $f \in K_9$, то $f(\tilde{0}) = *$, что также противоречит условию $f \notin K_3$.

Справедливость пункта 3) очевидна, так как если $f \in K_8 \cap K_9$, то $f = *$, что невозможно.

Докажем пункт 4). Если $f(\tilde{0}) = *$, то найдется набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = \beta$, где $\beta \in \{0,1\}$, и

$$f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix},$$

следовательно $f \notin K_{12}$, а значит $f \notin K_{11} \cap K_{12}$.

Если $f(\tilde{0}) = \gamma \in \{0,1\}$, то найдется набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = *$ и

$$f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ * \end{pmatrix},$$

следовательно $f \notin K_{11}$, а значит $f \notin K_{11} \cap K_{12}$.

$\square$

Лемма 4. *Для любой функции $f \in P_2^* \setminus (P_2 \cup \{*\})$ справедливо, что:*
1) если $f \in K_8$, то $f \in (K_{10} \cap K_{12}) \setminus K_{11}$ или $f \notin K_{10} \cup K_{11} \cup K_{12}$.
2) если $f \in K_9$, то $f \in (K_{10} \cap K_{11}) \setminus K_{12}$ или $f \notin K_{10} \cup K_{11} \cup K_{12}$.

Доказательство. Докажем пункт 1). Вначале покажем, что если $f \in K_8$, то $f \notin K_{11}$. Действительно, так как $f(\tilde{1}) = *$ и $f(\tilde{0}) = \gamma$, где $\gamma \in \{0,1\}$, то

$$f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ * \end{pmatrix},$$

а значит $f \notin K_{11}$.

Предположим, что $f \in K_8 \bigcap K_{10}$, но $f \notin K_{12}$. Допустим, существуют наборы $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$, где $i \in \{1,2,3\}$, такие, что $(\alpha_j^1, \alpha_j^2, \alpha_j^3)^t \in R_{12}$ для любого j, но $f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^1 \\ \tilde{\alpha}^2 \\ \tilde{\alpha}^3 \end{pmatrix} \notin R_{12}$, т. е. $f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^1 \\ \tilde{\alpha}^2 \\ \tilde{\alpha}^3 \end{pmatrix}$ должен совпадать с одним из следующих столбцов: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 1 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ \eta \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ * \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ \mu \\ \eta \end{pmatrix}$, где $\mu, \eta \in \{0,1,-\}$.

Отметим, что наборы $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$, где $i \in \{1,2,3\}$, не содержат $*$, иначе набор $f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^1 \\ \tilde{\alpha}^2 \\ \tilde{\alpha}^3 \end{pmatrix} \in R_{12}$. Так как перестановка строк R_{12} не меняет его, достаточно рассмотреть случаи, когда $f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^1 \\ \tilde{\alpha}^2 \\ \tilde{\alpha}^3 \end{pmatrix}$ совпадает с одним из столбцов: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ - \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ \eta \\ * \end{pmatrix}$, где $\mu, \eta \in \{0,1,-\}$.

Рассмотрим все варианты, предварительно заметив, что если $f(\tilde{\alpha}^i) \in \{0,-\}$, то $f(\tilde{\alpha}^{i,0}) = 0$, иначе получим противоречие $f \in K_8$. Действительно, если $f(\tilde{\alpha}^{i,0}) = *$, то $f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{i,0} \\ \tilde{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$, а если же $f(\tilde{\alpha}^{i,0}) = 1$, то $f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{i,0} \\ \tilde{\delta} \\ \tilde{\alpha}^{i,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $\tilde{\delta}$ – уточнение набора $\tilde{\alpha}^i$, на котором функция f принимает значение 0. Аналогично доказывается, что если $f(\tilde{\alpha}^i) = 1$, то $f(\tilde{\alpha}^{i,0}) = 1$.

Перейдем к вариантам.

а) $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\alpha}^2\\ \tilde{\alpha}^3\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\-\\1\end{pmatrix}\right\}$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, где набор $\tilde{\beta}$ такой, что $(\beta_i\alpha_i^{1,0}\alpha_i^{2,0}\alpha_i^{3,0})^t \in R_{10}$ для всех $i \in \{1,\dots,n\}$.

Если $\lambda \in \{0,*\}$, то $f \notin K_{10}$. Если $\lambda = 1$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}^{1,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ и при этом $(\beta_i\beta_i\alpha_i^{1,0})^t \in \{(000)^t,(001)^t,(111)^t\}$, противоречие условию $f \in K_8$.

б) $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\alpha}^2\\ \tilde{\alpha}^3\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\\-\end{pmatrix}\right\}$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}\lambda\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda\\ *\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, где $\tilde{\delta}$ – уточнение набора $\tilde{\alpha}^3$, на котором значение f равно 1, $\tilde{\tau}$ – уточнение набора $\tilde{\alpha}^1$ такое, что $(\tau_j\alpha_j^{2,0}\delta_j)^t \in K_{12}$ для всех $j \in \{1,\dots,n\}$, а набор $\tilde{\beta}$ такой, что $(\beta_i\tau_i\alpha_i^{2,0}\delta_i)^t \in R_{10}$ для всех $i \in \{1,\dots,n\}$.

Если $\lambda = 0$, то $f \notin K_{10}$. Если $\lambda = 1$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ и при этом $(\beta_i\beta_i\alpha_i^{2,0})^t \in \{(000)^t,(001)^t,(111)^t\}$, противоречие $f \in K_8$. Если $\lambda = *$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix}$, противоречие $f \in K_8$.

в) $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\alpha}^2\\ \tilde{\alpha}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu\\ \eta\\ *\end{pmatrix}$, где $\mu,\eta \in \{0,1,-\}$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \varepsilon\\ \theta\\ *\end{pmatrix}$, где $\varepsilon,\theta \in \{0,1\}$, а набор $\tilde{\beta}$ такой, что $(\beta_i\alpha_i^{1,0}\alpha_i^{2,0}\alpha_i^{3,0})^t \in R_{10}$ для всех $i \in \{1,\dots,n\}$.

Если $\lambda \neq *$, то $f \notin K_{10}$. Если $\lambda = *$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}^{1,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\ \varepsilon\end{pmatrix}$, противоречие $f \in K_8$.

Все случаи рассмотрены. Следовательно, если $f \in K_8 \bigcap K_{10}$, то $f \in K_{12}$.

Далее покажем, что ситуация, когда $f \in K_8 \bigcap K_{12}$ и $f \notin K_{10}$ невозможна, что доказывает наше утверждение. От противного. Предположим, что найдется функция f такая, что $f \in K_8 \bigcap K_{12}$, но $f \notin K_{10}$. Покажем, что функции, обладающей такими свойствами, в классах K_8 и K_{12} не существует, иначе из нее с помощью суперпозиции с функциями из этих классов (с константами 0, 1, – и проекциями) можно получить функцию, непринадлежащую этим классам, что противоречит их замкнутости.

Так как f не сохраняет R_{10}, то найдутся наборы $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i,\dots,\alpha_n^i)$, где $i \in \{1,2,3,4\}$, такие, что $(\alpha_j^1\alpha_j^2\alpha_j^3\alpha_j^4)^t \in R_{10}$ для любого j, но значение функции f на этих наборах представляет набор, который не принадлежит R_{10}.

Обозначим через M матрицу, состоящую из столбцов $(\alpha_j^1\alpha_j^2\alpha_j^3\alpha_j^4)^t$, где $j \in \{1,\dots,n\}$. Если в матрице M нет некоторых столбцов, то вставим их в M, добавив на соответствующие позиции в функцию f фиктивные переменные. Если в M встречаются столбцы со $*$ на позициях i_1, i_2, то заменим их на столбцы из M, в которых на позициях i_1, i_2 не встречается $*$, а на других позициях те же значения, что и в заменяемом столбце. Далее, если в матрице M встречаются одинаковые столбцы, то в функции f отождествим соответствующие этим столбцам переменные. В результате получим функцию $f'(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$, которая не сохраняет предикат R_{10}, т. е. $f'(M) \notin R_{10}$, где матрица M состоит из столбцов $(0000)^t$, $(0011)^t$, $(0101)^t$, $(1010)^t$, $(1100)^t$, $(1111)^t$, $(0110)^t$, $(1001)^t$, $(----)^t$. Ниже представлен пример одного из вариантов расположения столбцов матрицы M после таких преобразований

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & - \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & - \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & - \end{pmatrix}.$$

Далее покажем, что наборы $(0110)^t, (1001)^t$, которые могут встречаться в M, можно заменить на другие наборы из M без $*$ и при этом функция f' всё равно будет давать набор не из предиката R_{10}. Возможны четыре варианта: когда $f'(M)$ равно одному из наборов $(0001)^t$, $(0111)^t$, $(\mu\eta\theta*)^t$, где либо $\mu, \eta, \theta \in \{0, 1\}$, либо $\mu = \eta = \theta = -$, а также вариант $(f'(\tilde{\alpha}^s)f'(\tilde{\alpha}^l))^t = (\alpha-)^t$, где $\alpha \in \{0, 1\}$ и $s, l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Рассмотрим только случай $(0110)^t$, случай $(1001)^t$ аналогичен.

Пусть $f'(M) = (0001)^t$. Заменим в M столбец $(0110)^t$ на столбец $(1111)^t$, получим $f'(M) = (\sigma_1 00 \sigma_2)^t$. Если либо ровно одно из значений σ_1, σ_2 равно $*$, либо хотя бы одно из σ_1, σ_2 равно $-$, либо одно из σ_1, σ_2 равно 0, а второе равно 1, то оставим замену без изменений. В остальных случаях вместо столбца $(0110)^t$ подставим столбец $(----)^t$, и в результате получим либо $(0001)^t$, либо столбец, в котором встречаются ω и $-$, где $\omega \in \{0, 1\}$.

Пусть $f'(M) = (0111)^t$. Заменим в M столбец $(0110)^t$ на столбец $(1111)^t$, получим $f'(M) = (\sigma_1 11 \sigma_2)^t$. Если либо ровно одно из значений σ_1, σ_2 равно $*$, либо хотя бы одно из σ_1, σ_2 равно $-$, либо одно из σ_1, σ_2 равно 0, а второе равно 1, то оставим замену без изменений. В остальных случаях вместо столбца $(0110)^t$ подставим столбец $(----)^t$, и в результате получим либо $(0111)^t$, либо столбец, в котором встречаются ω и $-$, где $\omega \in \{0, 1\}$.

Пусть $f'(M) = (\mu\eta\theta*)^t$, где либо $\mu, \eta, \theta \in \{0, 1\}$, либо $\mu = \eta = \theta = -$. Заменим в M столбец $(0110)^t$ на $(1111)^t$, получим $f'(M) = (\sigma_1 \eta\theta \sigma_2)^t$, где $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1, -, *\}$. Если среди σ_1, σ_2 встречается одна $*$ или две $*$, то в первом случае замену $(0110)^t$ на $(1111)^t$ оставим без изменений, а во втором случае заменим $(0110)^t$ на $(----)^t$. В результате получим столбец, в котором встречается только одно значение $*$. Если среди σ_1, σ_2 нет $*$, то вместо столбца $(0110)^t$ подставим столбец $(1100)^t$ и получим $f'(M) = (\sigma_1 \eta\tau *)^t$. Если $\tau \neq *$, то замену оставим без изменений. Если $\tau = *$, то столбец $(0110)^t$ заменим на столбец $(0101)^t$. В результате получим столбец, в котором встречается только одно значение $*$.

Пусть значение функции f' на строке i матрицы M равно $-$, а на строке j равно $\alpha \in \{0, 1\}$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда заменим столбец $(0110)^t$ на один из столбцов $(0000)^t$, $(1111)^t$, $(0011)^t$, $(0101)^t$, $(1100)^t$, $(1010)^t$ так, чтобы в заменяющем столбце на позициях i и j стояли те же значения, что и в столбце $(0110)^t$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. В результате получим столбец, в котором встречаются ω и $-$, где $\omega \in \{0, 1\}$.

Далее заменим столбцы $(0110)^t$,$(1001)^t$ на другие столбцы из M без $*$, затем отождествим переменные и подставим константы 0, 1, $-$. Получим функцию $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ такую, что $g(M) \notin R_{10}$, где матрица M состоит из столбцов $(0011)^t$, $(0101)^t$, $(1010)^t$, $(1100)^t$.

Так как перестановка строк в матрице M равносильна перестановке переменных в g, то достаточно рассмотреть случаи, когда $g(M)$ равно одному из наборов $(0001)^t$, $(0111)^t$, $(\mu\eta\theta*)^t$, где либо $\mu, \eta, \theta \in \{0, 1\}$, либо $\mu = \eta = \theta = -$, а также случай $(g(\tilde{\alpha}^s)g(\tilde{\alpha}^l))^t = (\alpha-)^t$, где $\alpha \in \{0, 1\}$ и $s, l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

1) $g\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. Тогда $g(1111) \in \{1, *\}$, иначе $g\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, что противоречит $g \in K_{12}$. Отсюда $g\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\*\end{pmatrix}\right\}$, противоречие $g \in K_{12}$.

2) $g\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. Тогда $g(0000) \in \{0, *\}$, иначе $g\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, противоречие условию $g \in K_8$. Отсюда имеем $g\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ и $g\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\1\end{pmatrix}$, противоречие $g \in K_8$.

3) Суперпозицией g и 0 можно легко получить функцию, которая принимает только значения 0 и $*$, поэтому можно считать, что

$$g\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\*\end{pmatrix}.$$

Тогда $g(1111) = *$, иначе $g\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\1\end{pmatrix}\right\}$, противоречие $g \in K_8$. Отсюда $g\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\*\end{pmatrix}$, что противоречит $g \in K_{12}$.

4) Не умаляя общности, можно считать, что $g\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\-\end{pmatrix}$, где $\lambda \in \{0, 1\}$. При $\lambda = 1$ имеем противоречие условию $g \in K_8$. Следовательно, $g\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\-\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\\*\end{pmatrix}\right\}$, что противоречит $g \in K_{12}$.

Пункт 2) доказывается аналогично пункту 1).

□

Лемма 5. *Для любой функции $f \in P_2^* \setminus (P_2 \cup \{*\})$ справедливо, что:*
1) если $f \notin K_1 \cup K_2$, то $f \notin K_8 \cup K_9 \cup K_{11} \cup K_{12}$.

2) если $f \notin K_1 \cup K_2 \cup K_4$, *то* $f \notin K_8 \cup K_9 \cup K_{10} \cup K_{11} \cup K_{12}$.

Доказательство. Докажем пункт 1). В силу $f \notin K_1 \cup K_2$ имеем $f(\tilde{0}) = 1$ и $f(\tilde{1}) = 0$. Так как существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = *$, то $f \notin K_8$ и $f \notin K_9$. Осталось заметить, что

$$f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ * \end{pmatrix},$$

следовательно $f \notin K_{11}$, и

$$f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{1} \\ \tilde{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно $f \notin K_{12}$.

Докажем пункт 2). В силу пункта 1) достаточно доказать, что $f \notin K_{10}$. Так как $f \notin K_4$, то найдется набор $\tilde{\alpha}$ такой, что либо $f(\tilde{\alpha}) = f(\overline{\tilde{\alpha}}) = \beta$, где $\beta \in \{0, 1\}$, либо $f(\tilde{\alpha}) = *$, $f(\overline{\tilde{\alpha}}) = \gamma$, где $\gamma \in \{0, 1\}$. В первом случае имеем

$$f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{1} \\ \tilde{\alpha} \\ \overline{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix},$$

следовательно $f \notin K_{10}$. Во втором случае также $f \notin K_{10}$, так как

$$f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{1} \\ \tilde{\alpha} \\ \overline{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ * \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

□

Лемма 6. *Для любой функции* $f \in P_2^* \setminus (P_2 \cup \{*\})$ *справедливо, что:*
1) Если $f \in (K_1 \cap K_3) \setminus (K_2 \cup K_5)$, *то* $f \notin K_8 \cup K_{10}$.
2) Если $f \in (K_2 \cap K_3) \setminus (K_1 \cup K_5)$, *то* $f \notin K_9 \cup K_{10}$.

Доказательство. Докажем пункт 1). Из условия леммы видно, что $f(\tilde{0}) = *$ и $f(\tilde{1}) = 0$. В силу $f \notin K_5$ найдется набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = f(\overline{\tilde{\alpha}}) = \beta$, где $\beta \in \{0, 1\}$. Тогда

$$f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{1} \\ \tilde{\alpha} \\ \overline{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix},$$

следовательно $f \notin K_{10}$. Если $f \in K_8$, то $f(\tilde{1}) = *$, что невозможно в силу $f \notin K_2$.

Пункт 2) доказывается аналогично пункту 1). □

Лемма 7. *Для любой функции* $f \in P_2^* \setminus (P_2 \cup \{*\})$ *справедливо, что:*
1) если $f \in (K_1 \cap K_5) \setminus K_2$, *то* $f \in K_3 \setminus (K_8 \cup K_{12})$.
2) если $f \in (K_1 \cap K_5) \setminus (K_2 \cup K_9)$, *то* $f \notin K_{11}$.
3) если $f \in (K_2 \cap K_5) \setminus K_1$, *то* $f \in K_3 \setminus (K_9 \cup K_{11})$.
4) если $f \in (K_2 \cap K_5) \setminus (K_1 \cup K_8)$, *то* $f \notin K_{12}$.

Доказательство. Докажем пункт 1). Так как $f \notin K_2$, то $f(\tilde{1}) = 0$. Следовательно, $f(\tilde{0}) = *$, иначе получим противоречие условию $f \in K_1 \cap K_5$. Таким образом, $f \in K_3$.

Так как $f \notin K_2$, то $f(\tilde{1}) = 0$. Следовательно, $f \notin K_8$. Далее $f(\tilde{0}) = *$, иначе получим противоречие условию $f \in K_1 \cap K_5$. Отсюда имеем

$$f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{1} \\ \tilde{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно $f \notin K_{12}$.

Докажем пункт 2). Пусть $f(\tilde{0}) = 0$. Так как $f(\tilde{1}) = 0$, то имеем противоречие с $f \in K_5$. Таким образом, $f(\tilde{0}) = *$. Если найдется набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$, то

$$f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значит $f \notin K_{11}$.

Далее для любого набора $\tilde{\alpha}$ имеем $f(\tilde{\alpha}) \in \{*, 0\}$. Следовательно, для функции f первое условие в определении класса K_9 всегда верно, а это значит, что не выполняется третье условие. Поэтому найдутся наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, $f(\tilde{\alpha}) = 0$ и $f(\tilde{\beta}) = *$. Отсюда

$$f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $f \notin K_{11}$.

Пункты 3) и 4) доказываются аналогично. □

Лемма 8. *Для любой функции* $f \in P_2^* \setminus (P_2 \cup \{*\})$ *если* $f \in K_{10} \setminus (K_8 \cup K_9)$, *то* $f \notin K_{11} \cup K_{12}$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда для f не выполняется третье условие определений классов K_8 и K_9. Тогда из условия $f \notin K_8$ следует, что найдутся наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, $f(\tilde{\alpha}) = *$, $f(\tilde{\beta}) = \gamma$, где $\gamma \in \{0, 1\}$. Отсюда имеем, что

$$f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $f \notin K_{12}$.

Аналогично доказывается, что из $f \notin K_9$ следует $f \notin K_{11}$.

Далее заметим такой факт, что если найдутся наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, $f(\tilde{\alpha}) = 1$ и $f(\tilde{\beta}) = 0$, то $f \notin K_{11}$ в силу

$$f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а также $f \notin K_{12}$ в силу

$$f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда для f не выполняется первое условие определения класса K_8. Не умаляя общности, можно считать, что

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Случаи 1, 3 и 4 очевидны в силу вышеприведенного замечания.

Рассмотрим случай 2, когда

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Добавив четвертую строку, рассмотрим

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $f(0111) \in \{*, 1\}$, то $f \notin K_{10}$, что противоречит условию леммы. Имеем $f(0111) = 0$. Но тогда в силу упомянутого замечания получим $f \notin K_{11} \cup K_{12}$. Аналогично доказывается случай, когда для f не выполняется первое условие определения класса K_9. □

4. Описание классов частичных функций

Теорема 1. [6] *Существует ровно 15 классов эквивалентности функций алгебры логики по отношению принадлежности максимальным частичным ультраклонам ранга 2.*

Теорема 2. *Существует ровно 34 класса эквивалентности функций из $P_2^* \setminus (P_2 \cup \{*\})$ по отношению принадлежности максимальным частичным ультраклонам ранга 2.*

Доказательство. Подсчет числа классов можно провести следующим образом. Пусть для любой функции f вектор принадлежности максимальным частичным ультраклонам $K_1 - K_{12}$ имеет вид $(\tau_1, \ldots, \tau_{12})$. Из лемм 1 и 2 следует, что если $\tau_4 = \tau_5 = 0$, то возможны только два вида векторов $(000001011\tau_{10}11)$ и $(111001011\tau_{10}11)$. Таким образом, число классов, в которых функции принадлежат K_4 и K_5, не более 4.

Пусть $\tau_4 = \tau_5 = 1$. В силу пункта 1) леммы 3 имеем $\tau_{11} = \tau_{12} = 1$. Из леммы 1 следует, что набор $(\tau_1\tau_2\tau_3)$ может совпадать с одним из следующих наборов (000), (010), (011), (100), (101), (111). Рассмотрим все варианты.

Пусть $(\tau_1\tau_2\tau_3) = (000)$, т. е. $f \in K_1 \cap K_2 \cap K_3$. Из пункта 3) леммы 3 следует, что τ_8 и τ_9 не могут быть одновременно равны 0. Следовательно, в силу леммы 4 возможны следующие вектора: (000111001111), (000111010111), (000111011011), (000111011111).

Пусть $(\tau_1\tau_2\tau_3) = (010)$ (при $(\tau_1\tau_2\tau_3) = (100)$ ситуация аналогична). В силу леммы 3 пункт 1), леммы 4, леммы 6 пункт 1) возможны два вектора (010111010111) и (010111011111).

Пусть $(\tau_1\tau_2\tau_3) = (011)$ (при $(\tau_1\tau_2\tau_3) = (101)$ ситуация аналогична). Из пунктов 1) и 2) леммы 3 возможны два вектора (011111011011) и (011111011111).

Пусть $(\tau_1\tau_2\tau_3) = (111)$. В этом случае по лемме 5 пункт 2) возможен только вектор (111111011111).

Таким образом, число классов, в которых функции не принадлежат K_4 и K_5, не более 13.

Аналогичным образом разбирается ситуация, когда $\tau_4 = 1$, а $\tau_5 = 0$. С помощью лемм 3, 4, 5, 7, 8 получается, что число классов, в которых функции принадлежат K_5 и не принадлежат K_4, не более 17.

Отметим, что ситуация, когда f принадлежит K_4 и не принадлежит K_5, невозможна.

С помощью компьютерного эксперимента (полным перебором) было установлено, что для функций от трех переменных из $P_2^* \setminus (P_2 \cup \{*\})$ существует ровно 34 класса. Ниже в таблице приведены векторы принадлежности максимальным классам и соответствующие им функции. $\square$

№	$\tau(f)$	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	(000111001111)	(0000000*)
2	(011111011111)	(000000*0)
3	(000111011111)	(000000*1)
4	(000101001111)	(0000111*)
5	(000101011111)	(000011*1)
6	(000101001010)	(0000****)
7	(000001011111)	(000**111)
8	(011111011011)	(00****00)
9	(000101011011)	(0110****)
10	(000101011110)	(0111****)
11	(100111011111)	(1000000*)
12	(111111011111)	(100000*0)
13	(101111011111)	(100000*1)
14	(100101011111)	(1000111*)
15	(111101011111)	(100011*0)
16	(100101011011)	(1001****)
17	(111001011111)	(100**110)
18	(101111011011)	(10****01)
19	(111001011011)	(10****10)
20	(100111001111)	(1111111*)
21	(100101001010)	(1111****)
22	(100101001111)	(111*1***)
23	(010111010111)	(*0000000)
24	(010111011111)	(*0000010)
25	(010101011111)	(*0001110)
26	(000101010111)	(*0001111)
27	(010101011011)	(*00*0**0)
28	(000111011011)	(*00**00*)
29	(000111010111)	(*0111111)
30	(010101010001)	(*0*0*0*0)
31	(000101011101)	(*0*0*0*1)
32	(000101010001)	(*0*0*1*1)
33	(010101010111)	(***0*000)
34	(000001011011)	(00****11)

Теорема 3. *Существует ровно 49 классов эквивалентности частичных функций по отношению принадлежности максимальным частичным ультраклонам ранга 2.*

Доказательство. Следует из теорем 1 и 2. □

References

[1] N.A. Peryazev, I.K. Sharankhaev *Galois theory for clones and superclones*, Discrete Math. Appl., **26**:4 (2016), 227–238. Zbl 1346.08002

[2] V.I. Panteleyev, *On Two Maximal Multiclones and Partial Ultraclones*, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **5**:4 (2012), 46–53. Zbl 1304.08003

[3] S.A. Badmaev, I.K. Sharankhaev, *On Maximal Clones of Partial Ultrafunctions on a Two-element Set*, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **16** (2016), 3–18. Zbl 1350.08002

[4] S.V. Yablonskij, *On the Superpositions of Logic Functions*, Mat. Sbornik, **30**:2(72) (1952), 329–348. Zbl 0046.00601

[5] S.A. Badmaev, *A Completeness Criterion of Set of Multifunctions in Full Partial Ultraclone of Rank 2*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **15** (2018), 450–474. MR3814159

[6] S.A. Badmaev, *On the Classes of Boolean Functions Generated by Maximal Partial Ultraclones*, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **27** (2019), 3–14. Zbl 07105743

Sergey Alexandrovich Badmaev, Ivan Konstantinovich Sharankhaev
Buryat State University,
24a, Smolina str.,
Ulan-Ude, 670000, Russia
E-mail address: badmaevsa@mail.ru, goran5@mail.ru