S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, стр. 1–10 (2021) УДК 519.165

DOI 10.33048/semi.2021.18.xxx MSC 65H04

К ВОПРОСУ О НУЛЯХ МНОГОЧЛЕНОВ

В.И. РОДИОНОВ

Abstract. A small parameter, specially built into an arbitrary polynomial of one variable, generates a new polynomial of two variables. This procedure allows us to reduce the problem of finding of zeros of the original polynomial to finding such functions of a small parameter, the substitution of which in a new polynomial turns it into the identity zero. In this paper, algorithms for constructing the indicated functions of a small parameter are given in the case when all the coefficients of the original polynomial are real, and it itself has a priori real roots.

Keywords: zero of polynomial, small parameter.

1. Введение

Пусть $n \geqslant 1$ и

$$P(x) \doteq \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$$

— многочлен с вещественными коэффициентами, в котором все $a_k \neq 0$. Последнее условие не ограничивает общность, поскольку линейной заменой переменной x к такому виду приводится любой многочлен. При фиксированном $m \in \{1, \dots, n\}$ бесконечная система уравнений

$$(1) \qquad \begin{cases} A_r \doteq A_r^{(m)} \doteq \max\Big(0,\, m - \big[\,(\sqrt{1+8r}+1)/2\,\big]\Big), \\ B_r \doteq B_r^{(m)} \doteq \min\Big(n,\, m + \big[\,(\sqrt{1+8r}-1)/2\,\big]\Big), \\ \displaystyle\sum_{k=A_r}^{B_r} a_k \sum_{p_0+\ldots+p_k = r - \binom{m-k}{2}} \prod_{i=0}^{k} C_{p_i}^{(m)} = 0\,, \end{cases} \qquad r = 0, 1, \ldots,$$

Rodionov, V.I., On the question of zeros of polynomials.

Поступила 26 января 2021 г., опубликована 31 декабря 2021 г.

относительно элементов последовательности $\{ C_r^{(m)} \}_{r=0}^{\infty}$ имеет рекуррентный характер (в работе показано, что при выполнении дополнительного условия $C_0^{(m)} \neq 0$ неявно заданная рекурсия (1) однозначно разрешима). Здесь и далее через $[\,\xi\,]$ обозначена целая часть числа $\xi \in \mathbb{R}$, полагаем $\binom{\xi}{2} \doteq \xi\,(\xi-1)/2$, внутреннее суммирование в (1) ведется по всем упорядоченным наборам $(\,p_0, \ldots, p_k)$ неотрицательных целых чисел таких, что $p_0 + \ldots + p_k = q \doteq r - \binom{m-k}{2}$. В соответствии с [1, с. 20] число таких наборов равно $\binom{k+q}{k}$.

Последовательность $\{ C_r^{(m)} \}_{r=0}^{\infty}$ порождает последовательность частичных сумм $\{ x_s^{(m)} \}_{s=0}^{\infty}$, где

$$x_s^{(m)} \doteq \sum_{r=0}^{s} C_r^{(m)}. \tag{2}$$

Следует отметить, что при $n = 1$ имеем $x_s^{(1)} = -a_0/a_1$ для всех s, а при $n = 2$ и $|\,a_0 a_2 / a_1^2\,| < 1/4$ справедливы хорошо известные [2, с. 480] соотношения

$$x_s^{(1)} = -\frac{a_0}{a_1} \sum_{r=0}^{s} \frac{1}{r+1} \binom{2r}{r} \left(\frac{a_0 a_2}{a_1^2} \right)^r \underset{s}{\longrightarrow} \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2},$$

$$x_s^{(2)} = -\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_0}{a_1} \sum_{r=0}^{s} \frac{1}{r+1} \binom{2r}{r} \left(\frac{a_0 a_2}{a_1^2} \right)^r \underset{s}{\longrightarrow} \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

(эти результаты получаются непосредственным решением рекурсии (1)). Внимательный читатель заметит здесь числа Каталана [1, с. 139]. При бо́льших n вычисление явных выражений для величин $C_r^{(m)}$ представляет самостоятельный интерес. Приведенные примеры дают основание полагать, что частичная сумма $x_s^{(m)}$ является «s-м приближением к m-му корню» многочлена $P(x)$, и мы приступаем к детальному обсуждению этого вопроса.

2. Нули многочленов

Пусть $Q(x) \doteq x\,P(x)$. Зафиксируем $\mu \in \mathbb{R}$ и определим многочлен

$$Q_\mu(x) \doteq \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}\, \mu^{\binom{k}{2}} x^k.$$

Теорема 1. *Пусть $m \in \{1, \ldots, n\}$. Если последовательность $\{ C_r^{(m)} \}_{r=0}^{\infty}$ удовлетворяет рекурсии* (1), *причем $C_0^{(m)} \neq 0$, и ряд*

$$y \doteq \sum_{r=0}^{\infty} C_r^{(m)} \mu^r$$

сходится при $|\,\mu\,| \leqslant \delta$ $(\delta > 0)$, то $Q_\mu\,(\mu^{-m} y) \equiv 0$ при $0 < |\,\mu\,| \leqslant \delta$. В частности, если ряд

$$x^{(m)} \doteq \sum_{r=0}^{\infty} C_r^{(m)}$$

сходится, то $P(x^{(m)}) = 0$.

Доказательство. Переобозначим $C_r^{(m)}$ через C_r. Сначала докажем, что рекурсия (1) однозначно разрешима. Действительно, при $r=0$ имеем $A_0=m-1$ и $B_0=m$, поэтому

$$0=\sum_{k=m-1}^{m} a_k \sum_{p_0+\ldots+p_k=0} \prod_{i=0}^{k} C_{p_i} = a_{m-1}C_0^m + a_m C_0^{m+1},$$

следовательно, $C_0=-a_{m-1}/a_m$. Зафиксируем $r>0$. Функция $q \doteq r-\binom{m-k}{2}$ целого аргумента k достигает максимума в двух точках: при $k=m-1$ и при $k=m$, причем $q_{\max}=r$. Для остальных $k\in\{A_r,\ldots,B_r\}$ справедливо $q<r$. Следовательно,

$$0=a_{m-1}\sum_{p_0+\ldots+p_{m-1}=r}\prod_{i=0}^{m-1} C_{p_i} + a_m \sum_{p_0+\ldots+p_m=r}\prod_{i=0}^{m} C_{p_i} + \sigma\,, \tag{3}$$

где через σ обозначена сумма всех слагаемых левой части уравнения (1) при $k\in\{A_r,\ldots,B_r\}$, $k\neq m-1$, $k\neq m$. Очевидно, величина σ зависит только от значений $C_0,C_1,\ldots,C_{r-1}$. Другими словами, коэффициент C_r встречается лишь в первых двух слагаемых уравнения (3) и не встречается в σ, поэтому

$$0=a_{m-1}C_rC_0^{m-1}m+a_mC_rC_0^m(m+1)+\Sigma,$$

где через Σ обозначена сумма всех тех слагаемых в (3), которые не зависят от C_r, а зависят только от переменных $C_0,C_1,\ldots,C_{r-1}$. Таким образом, если через $\Sigma\,(C_0,\ldots,C_r)$ обозначить левую часть уравнения (1), то есть

$$\Sigma\,(C_0,\ldots,C_r)\doteq\sum_{k=A_r}^{B_r} a_k \sum_{p_0+\ldots+p_k=r-\binom{m-k}{2}} \prod_{i=0}^{k} C_{p_i}\,, \tag{4}$$

то $\Sigma=\Sigma\,(C_0,\ldots,C_{r-1},0)$ и

$$0=a_{m-1}C_rC_0^{m-1}m+a_mC_rC_0^m(m+1)+\Sigma\,(C_0,\ldots,C_{r-1},0).$$

Коэффициент при C_r равен $C_0^{m-1}\big[\,ma_{m-1}+(m+1)\,a_mC_0\,\big]=-C_0^{m-1}a_{m-1}$, поэтому

$$C_r=\Sigma\,(C_0,\ldots,C_{r-1},0)\,/\,(C_0^{m-1}a_{m-1})\,, \tag{5}$$

то есть рекурсия (1) позволяет однозначно вычислять значения C_r через числа $C_0,\ldots,C_{r-1}$.

При $0<|\,\mu\,|\leqslant\delta$ подставим выражение $\mu^{-m}y$ в многочлен Q_μ:

$$\begin{aligned}Q_\mu\big(\mu^{-m}y\big)&=\sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}\,\mu^{\binom{k}{2}}\,\mu^{-km}\Big(\sum_{r=0}^{\infty} C_r\mu^r\Big)^k\\&=\mu^{-\binom{m+1}{2}}\sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}\sum_{r=0}^{\infty}\varphi(r,k-1)\,\mu^{r+\binom{m+1-k}{2}},\end{aligned}$$

где

$$\varphi(r,k)\doteq\sum_{p_0+\ldots+p_k=r}\prod_{i=0}^{k} C_{p_i}.$$

(Значения $\varphi(r,k-1)$ получаются в результате возведения ряда y в степень k.) Заменив r на $q = r + \binom{m+1-k}{2}$, а k на $j = k-1$, имеем

$$\mu^{\binom{m+1}{2}}\, Q_\mu\big(\mu^{-m}y\big) = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{q=\binom{m-j}{2}}^{\infty} \varphi\left(q-\tbinom{m-j}{2}, j\right)\mu^q\,.$$

Возвращаясь к переменным k и r, получаем равенство

$$\mu^{\binom{m+1}{2}}\, Q_\mu\big(\mu^{-m}y\big) = \sum_{(k,\,r)\,\in\, D_{nm}} a_k\, \varphi\left(r-\tbinom{m-k}{2}, k\right)\mu^r\,,$$

где через D_{nm} обозначена двумерная целочисленная сетка, ограниченная прямыми $k = 0$, $k = n$ и параболой $r = \binom{m-k}{2}$. Переход от двойного суммирования к одновременному суммированию по сетке D_{nm} и, вообще, к перемене порядка суммирования (по переменным k и r) возможны, поскольку степенной ряд

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} C_r \mu^r$$

сходится при малых μ (по условию теоремы).

Выражение $r = \binom{m-k}{2}$, как функция целочисленного переменного k, достигает минимума в двух точках: при $k = m-1$ и при $k = m$, причем $r_{\min} = 0$. Следовательно, если зафиксировано $r \geqslant 0$, то для того, чтобы пара (k,r) принадлежала множеству D_{nm} необходимо, чтобы выполнялось неравенство $(m-k)^2 - (m-k) - 2r \leqslant 0$. Известно, что если $a \leqslant \xi \leqslant b$ и ξ — целое число, то $-[-a\,] \leqslant \xi \leqslant [\,b\,]$, поэтому

$$m - \left[\,(\sqrt{1+8r}+1)/2\,\right] \leqslant k \leqslant m + \left[\,(\sqrt{1+8r}-1)/2\,\right].$$

Кроме того, $0 \leqslant k \leqslant n$. Таким образом, включение $(k,r) \in D_{nm}$ имеет место тогда и только тогда, когда $r \geqslant 0$ и $A_r \leqslant k \leqslant B_r$, и мы окончательно получаем

$$\begin{aligned}\mu^{\binom{m+1}{2}}\, Q_\mu\big(\mu^{-m}y\big) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=A_r}^{B_r} a_k\, \varphi\left(r-\tbinom{m-k}{2}, k\right)\mu^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{k=A_r}^{B_r} a_k \sum_{p_0+\ldots+p_k = r-\binom{m-k}{2}} \prod_{i=0}^{k} C_{p_i}\right)\mu^r \equiv 0,\end{aligned}$$

что и требовалось. □

3. Базовый алгоритм

Для вычисления вещественных корней многочленов мы можем теперь использовать следующий алгоритм (называем его А-алгоритмом).

А1. Зафиксировать $m \in \{1,\ldots,n\}$, установить $r = 0$ и вычислить значение $C_0^{(m)} = -a_{m-1}/a_m$.

А2. Если вычислительный процесс расходится, завершить вычисления для данного m.

А3. Увеличить r на единицу и вычислить числа $A_r^{(m)}$ и $B_r^{(m)}$.

А4. По формуле (4) вычислить сумму $\Sigma\,(C_0^{(m)},\ldots,C_{r-1}^{(m)},0)$.

А5. По формуле (5) вычислить коэффициент $C_r^{(m)}$.

А6. По формуле (2) вычислить частичную сумму $x_r^{(m)}$.

А7. Если $|\,P(x_r^{(m)})\,| \geqslant \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ — заданная точность), то вернуться на шаг А2.

А8. Закончить вычисления для данного m.

Замечание 1. В общей ситуации (для любых n и m) у нас нет достаточных условий, обеспечивающих сходимость последовательности $\{\,x_r^{(m)}\}_{r=0}^{\infty}$, поэтому при тестировании алгоритма мы применяем прерывание на шаге А2, как только обнаруживаем расходимость вычислительного процесса. В результате тестирования замечена закономерность: если про многочлен $P(x)$ с положительными коэффициентами априори известно, что все его корни — вещественные (и, следовательно, отрицательные), то последовательности $\{\,x_r^{(m)}\}_{r=0}^{\infty}$ сходятся при всех m. Другими словами, если числа $0 < \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \cdots \leqslant \xi_n$ таковы, что многочлен представим в виде

$$P(x) \doteq a_n\,(x+\xi_1)(x+\xi_2)\,\ldots\,(x+\xi_n)\,, \tag{6}$$

то при всех $m = 1, \ldots, n$ справедливо равенство $x^{(m)} \doteq \lim\limits_{r\to\infty} x_r^{(m)} = -\xi_m$. Таким образом, если некий многочлен заведомо имеет лишь вещественные корни, то для их вычисления линейной заменой переменной мы превращаем исходный многочлен в многочлен с положительными коэффициентами, при каждом m применяем А-алгоритм (или его модификации, см. замечание 3) и возвращаемся к исходной переменной.

Пример 1. В приводимых ниже тестах вычисления осуществлялись с точностью $\varepsilon = 0.001$. Через r обозначено число итераций. Многочлен

$$P(x) \doteq (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) = x^5 + 15x^4 + 85x^3 + 225x^2 + 274x + 120$$

имеет приближенные корни:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= -1.000031, & r &= 43,\\ x^{(2)} &= -1.999905, & r &= 56,\\ x^{(3)} &= -2.999761, & r &= 129,\\ x^{(4)} &= -3.999835, & r &= 302,\\ x^{(5)} &= -5.000042, & r &= 378, \end{aligned}$$

а многочлен $P(x) \doteq (x+a)(x^2+x+2) = x^3 + (a{+}1)x^2 + (a{+}2)x + 2a$ имеет один вещественный корень:

$$\begin{array}{llll} 1) & \text{при}\quad a = 20 & x^{(3)} = -20.000001, & r = 8,\\ 2) & \text{при}\quad a = 5 & x^{(3)} = -\;5.000025, & r = 25. \end{array}$$

Вычислительные процессы для $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ расходятся. Расходимость процессов имеет место и для многочлена $P(x) \doteq x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, однако если в нем сделать замену переменной, например, положить $x = y + 3$, то получим многочлен $P(y+3) = y^2 + 7y + 6 = (y+1)(y+6)$, для которого вычислительные процессы уже сходятся. (В первом случае нарушено условие $|\,a_0a_2/a_1^2\,| < 1/4$.) *Особо следует отметить сходимость вычислительных процессов и в тех случаях, когда многочлен* (6) *имеет кратные корни.* Например, для многочлена $P(x) \doteq (x+1)^2(x+2)$ все три процесса сходятся, правда, достаточно медленно. Вообще, если у многочлена нет кратных корней, то алгоритм сходится быстро, а при наличии кратных корней (или близких между собой) — медленно. Замечено также, что к корню третьей кратности вычислительные процессы сходятся по-разному: один процесс приближается к корню слева, другой — справа, а третий — «методом пристрелки».

Замечание 2. Перебор всех упорядоченных наборов $(p_0,\ldots,p_k)$ на шаге A4 осуществляется в лексикографическом порядке, начиная с вектора $(0,\ldots,0,q)$ и кончая вектором $(q,0,\ldots,0)$, где $q \doteq r-\binom{m-k}{2}$. Число таких наборов равно $\binom{k+q}{k}$, что весьма существенно замедляет вычисления с ростом r (здесь мы имеем полиномиальную по r сложность вычислений).

4. Модифицированный алгоритм

За счет введения дополнительной памяти для хранения величин $\varphi(r,k)$ можно значительно ускорить вычислительный процесс, — приводимый ниже модифицированный алгоритм M имеет линейную по r вычислительную сложность.

Лемма 1. *Если $k,m\in\mathbb{N}$ и $r\geqslant 0$, то*

$$\varphi(r,k+m-1)=\sum_{q=0}^{r}\varphi(q,k-1)\,\varphi(r-q,m-1)$$

и, в частности,

$$\varphi(r,k)=\sum_{q=0}^{r}\varphi(q,k-1)\,\varphi(r-q,0).$$

Доказательство. Если $y\doteq\sum\limits_{r=0}^{\infty}C_r\,\mu^r$, то

$$y^k=\sum_{r=0}^{\infty}\varphi(r,k-1)\,\mu^r,$$

и нам остается лишь сравнить коэффициенты у рядов, стоящих в левой и правой части равенства $y^{k+m}=y^k y^m$. □

Таким образом, вычислительный процесс можно свести к последовательному заполнению таблицы $\varphi(r,k)$, где $k=0,1,\ldots,n$; $r=0,1,\ldots$. (В соответствии с определением чисел $\varphi(r,k)$ справедливо равенство $\varphi(r,0)=C_r$, следовательно, элементы нулевого столбца — это искомые числа C_r). Заполнение таблицы происходит послойно по r. При $r=0$ имеем $\varphi(0,k)=C_0^{k+1}$, а затем из уравнения (1), имеющего вид

$$\sum_{k=A_r}^{B_r}a_k\,\varphi\left(r-\binom{m-k}{2},k\right)=0,$$

находим $\varphi(1,0)$ (более подробно процесс вычисления величин $\varphi(r,0)$ описан ниже). Вторая рекурсия из леммы 1 позволяет вычислить остальные величины $\varphi(1,k)$ последовательно по $k=1,\ldots,n$. Аналогичным образом вычисляются значения $\varphi(r,k)$ на каждом последующем слое при $r\geqslant 2$.

Процедура вычисления величин $\varphi(r,0)$ состоит в следующем. При $r\in\mathbb{N}$ и $k\geqslant 0$ введем в рассмотрение вспомогательные величины

$$\psi(r,k)\doteq\sum_{\substack{p_0+\ldots+p_k=r\\ C_r\,=\,0}}\ \prod_{i=0}^{k}C_{p_i}.$$

Лемма 2. *При* $r \in \mathbb{N}$ *и* $k \geqslant 0$ *справедливы равенства* $\psi(r,0)=0$,

$$\varphi(r,k) = \psi(r,k) + (k+1)\, C_r\, C_0^k\,, \tag{7}$$

$$\psi(r,k) = \varphi(0,0)\,\psi(r,k-1) + \sum_{q=1}^{r-1} \varphi(r-q,0)\,\varphi(q,k-1)\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,. \tag{8}$$

Доказательство. Первые две формулы носят очевидный характер. Во вторую формулу из леммы 1, имеющую вид

$$\varphi(r,k) = \varphi(0,0)\,\varphi(r,k-1) + \varphi(r,0)\,\varphi(0,k-1) + \sum_{q=1}^{r-1} \varphi(r-q,0)\,\varphi(q,k-1)\,,$$

вместо величин $\varphi(r,k)$ и $\varphi(r,k-1)$ подставим правые части формул (7). После естественных сокращений получим требуемое соотношение (8). □

Таким образом, рекурсия (8) и начальное условие $\psi(r,0)=0$ позволяют вычислить все значения $\psi(r,k)$, $k=0,1,\ldots,n$, на r-ом слое. Очевидное равенство

$$\begin{aligned} \Sigma\,(C_0,\ldots,C_{r-1},0) \\ &= a_{m-1}\psi(r,m-1) + a_m\psi(r,m) + \sum_{\substack{k\,=\,A_r \\ k\neq m-1,\ k\neq m}}^{B_r} a_k\,\varphi\left(r-\tbinom{m-k}{2},k\right) \end{aligned} \tag{9}$$

позволяет по формуле (5) вычислить значение C_r, а затем по формуле (7) найти все значения $\varphi(r,k)$ на r-ом слое.

Замечание 3. В вычислительной процедуре нет надобности в использовании массива $\psi(r,k)$, поскольку вся необходимая информация «помещается» в массиве $\varphi(r,k)$. В частности, формулы (8) и (9) приобретают компактный вид

$$\varphi(r,k) = \sum_{q=1}^{r} \varphi(r-q,0)\,\varphi(q,k-1)\,, \tag{10}$$

$$\Sigma\,(C_0,\ldots,C_{r-1},0) = \sum_{k=A_r}^{B_r} a_k\,\varphi\left(r-\tbinom{m-k}{2},k\right), \tag{11}$$

что порождает следующий алгоритм (называем его M-алгоритмом).

M1. Использовать этапы A1–A3 алгоритма A.
M2. Установить $\varphi(r,0)=0$ и по рекурсии (10) вычислить $\varphi(r,k)$, $k=1,\ldots,n$.
M3. По формуле (11) вычислить сумму $\Sigma\,(C_0,\ldots,C_{r-1},0)$.
M4. По формуле (5) вычислить коэффициент C_r.
M5. По формуле (7) пересчитать элементы $\varphi(r,k) := \varphi(r,k) + (k+1)\, C_r\, C_0^k$.
M6. Использовать этапы A6–A8 алгоритма A.

5. Заключение

Итак, малый параметр μ, встроенный в многочлен

$$P(x) \doteq \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

порождает новый многочлен

$$P_\mu(x) \doteq \sum_{k=0}^{n} a_k \, \mu^{\binom{k}{2}} x^k$$

двух переменных, и данная процедура позволяет свести задачу нахождения нулей исходного многочлена к поиску таких функций $x = x(\mu)$ малого параметра, подстановка которых в новый многочлен превращает его в тождественный ноль (в области сходимости функции малого параметра).

Здесь уместно заметить, что отображение $x^k \to \mu^{\binom{k}{2}} x^k$ имеет канонический характер, и мы можем исследовать его с разных позиций. Например, имеется потенциальная возможность вычисления нулей аналитических функций. Аналитическую в нуле функцию f и ее степенной ряд в нуле отождествляем:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \quad x \in D_f$$

(D_f — интервал сходимости ряда). Для любого $\mu \in \mathbb{R}$, $|\,\mu\,| \leqslant 1$, определена функция

$$f_\mu(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, \mu^{\binom{k}{2}} x^k, \quad x \in D_f,$$

что позволяет свести задачу нахождения нулей функции f к поиску таких функций $x = x(\mu)$ малого параметра, подстановка которых в функцию f_μ превращает ее в тождественный ноль (при $0 < |\,\mu\,| \leqslant \delta$). (Другими словами, справедлив аналог теоремы 1).

Приведем еще два примера. Согласно [3] комплексные степенные ряды

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^k f_k, \qquad g(t) \sim \sum_{m=0}^{\infty} t^m g_m,$$

сходящиеся в области D (такой, что $0 \in D \subseteq \mathbb{C}$) при $\mu \in \mathbb{C}$, $|\,\mu\,| \leqslant 1$, порождают абсолютно сходящийся в D ряд

$$h(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k+m=n} \mu^{km} f_k g_m,$$

который называется μ-произведением функций f и g. Линейное пространство L над полем $\mathbb{C}$, состоящее из однозначных аналитических в нуле функций комплексного переменного, наделенное операцией μ-умножения, образует над $\mathbb{C}$ коммутативную ассоциативную алгебру с единицей (обозначим ее через L_μ). Гомоморфизм алгебр $L_1 \to L_\mu$, переводящий функцию

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^k f_k$$

в функцию

$$f_\mu(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mu^{\binom{k}{2}} f_k,$$

во многих случаях позволяет свести процедуру решения системы дифференциальных уравнений $\dot{x}(t) = Ax(\mu t) + b(\mu t)$ с отклоняющимся аргументом к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [3]).

В частности, функция

$$x(t) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mu^{\binom{k}{2}} / \, k!$$

является единственным решением начальной задачи $\dot{x}(t) = x(\mu t)$, $x(0) = 1$.

Согласно [4] при $\mu = 1/2$ в алгебре L_1 справедливо равенство

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-\binom{k}{2}} t^k / \, k! \Big)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \, 2^{-\binom{k}{2}} t^k / \, k!,$$

где через A_k обозначено число помеченных ациклических ориентированных графов с k вершинами. В книге [5, с. 209] производящие функции вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \, 2^{-\binom{k}{2}} t^k / \, k!$$

названы *хроматическими производящими функциями* для целочисленных последовательностей $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Возвращаясь к полиномам, уместно отметить, что описанный в работе метод допускает одновременное параллельное вычисление всех вещественных корней исходного многочлена, что весьма актуально при решении ряда прикладных задач. Это обстоятельство весьма существенно, например, при вычислении собственных значений положительно определенной матрицы или при вычислении нулей ортогональных многочленов (в обоих случаях корнями многочленов являются лишь вещественные числа).

Заметим еще, что рекурсия (1) однозначно разрешима и в том случае, когда коэффициенты a_k — суть комплексные числа (достаточно повторить выкладки теоремы 1). Следует также отметить, что требование о том, чтобы все коэффициенты исходного многочлена были ненулевые, не является жестким. Более слабое требование $a_{m-1} \neq 0$ и $a_m \neq 0$ также позволяет пользоваться рекурсией (1) для вычисления величин $C_r^{(m)}$. Например, непосредственным решением рекурсии легко установить, что при $n \geqslant 2$ и $|\,\mu\,| < (n-1)^{n-1}/n^n$ один из корней уравнения $\mu x^n - x + 1 = 0$ имеет вид

$$x^{(1)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{1+(n-1)\,r} \binom{nr}{r} \mu^r,$$

что согласуется с хорошо известным результатом [2, с. 689].

References

[1] V.N. Sachkov, *Introduction to combinatorial methods of discrete mathematics*, Nauka, Moscow, 1982. MR700691, Zbl 0629.05001

[2] D.E. Knuth, *The art of computer programming. Fundamental algorithms*, vol. 1, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1968. Zbl 0191.17903

[3] V.I. Rodionov, *Analytic solution of a linear functional-differential equation with linear deviation of the argument*, Differential Equations, **25**:4 (1989), 417–425. MR997792, Zbl 0701.34076
[4] V.I. Rodionov, *On the number of labeled acyclic digraphs*, Discrete Mathematics, **105**: 1–3 (1992), 319–321. MR669569, Zbl 0761.05050
[5] R.P. Stanley, *Enumeration combinatorics*, Mir, Moscow, 1990. MR1090542, Zbl 0733.05001

Vitalii Ivanovich Rodionov
Udmurt State University,
ul. Universitetskaya, 1,
426034, Izhevsk, Russia
E-mail address: rodionov@uni.udm.ru