S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, стр. 9–26 (2021) УДК 519.21
DOI 10.33048/semi.2021.18.002 MSC 60F17

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ВЫХОДА ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗА НЕВОЗРАСТАЮЩУЮ ГРАНИЦУ

А.И. САХАНЕНКО, В.И. ВАХТЕЛЬ, Е.И. ПРОКОПЕНКО, А.Д. ШЕЛЕПОВА

Abstract. We consider a compound renewal process, which is also known as a cumulative renewal process, or a continuous time random walk. We suppose that the jump size has zero mean and finite variance, whereas the renewal-time has a moment of order greater than 3/2. We investigate the asymptotic behaviour of the probability that this process is staying above a moving non-increasing boundary up to time T which tends to infinity. Our main result is a generalization of a similar one for ordinary random walks obtained earlier by Denisov D., Sakhanenko A. and Wachtel V. in Ann. Probab., 2018.

Keywords: compound renewal process, continuous time random walk, boundary crossing problems, moving boundaries, exit times.

1. Введение

1.1. Пусть $(X_1, v_1), (X_2, v_2), \ldots$ — бесконечная последовательность независимых и одинаково распределенных пар случайных величин таких, что

(1) $$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{E}{X_1}^2 = 1 = \mathbf{E}v_1 \quad \text{и} \quad v_1 > 0 \quad \text{п.н.}$$

Положим $S_0 = V_0 = 0$ и

$$S_k = X_1 + \ldots + X_k, \quad V_k = v_1 + \ldots + v_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

Sakhanenko, A.I., Wachtel, V.I., Prokopenko, E.I., Shelepova, A.D., On the asymptotics of the distribution of the exit time beyond a non-increasing boundary for a compound renewal process.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта №20-51-12007. Работа первого и третьего авторов по разделам 2 и 3 статьи проводилось также при частичной поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.3., проект № 0314-2019-0008.

Поступила 20 ноября 2020 г., опубликована 12 января 2021 г.

а при $t \geq 0$ введем в рассмотрение случайный процесс

$$S(t) = S_{N(t)}, \quad \text{где} \quad N(t) = \max\{k \geq 0 \ : V_k \leq t\}.$$

Поскольку $N(t)$ — это функция восстановления, построенная по случайным величинам $v_1, v_2, \ldots$, то процесс $S(t)$ обычно называют обобщенным процессом восстановления (см., например, [1]), хотя в иностранной (особенно физической) литературе его зовут также случайным блужданием с непрерывным временем (см., например, [2]).

Пусть теперь $g(t)$ — некоторая функция, определенная при $t \geq 0$. Введем в рассмотрение случайную величину

$$\tau := \inf\{t > 0 : S(t) \leq g(t)\} = \inf\{t > 0 : Z(t) := S(t) - g(t) \leq 0\}, \tag{2}$$

равную первому моменту пересечения сверху вниз уровня $g(t)$ нашим непрерывным случайным блужданием. Основная цель настоящей работы — изучить асимптотику для вероятности

$$\mathbf{P}(\tau > T) = \mathbf{P}\Big(\underline{Z}(T) := \inf_{0<t\leq T} (S(t) - g(t)) \leq 0\Big) \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{3}$$

в случае когда

$$g(t) = o(\sqrt{t}) \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{4}$$

и, дополнительно,

$$\mathbf{P}(\tau > T) > 0 \quad \text{при всех} \quad T > 0. \tag{5}$$

1.2. В частном случае, когда все $v_i \equiv 1$ не случайны, наш процесс $S(t) = S_{\lfloor t \rfloor} = X_1 + \ldots + X_{\lfloor t \rfloor}$ превращается в обычное случайное блуждание. (Всюду в работе $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x.) А если $g(t) = g(\lfloor t \rfloor)$ кусочно-постоянна, то $\tau = \tilde{\tau}$ при

$$\tilde{\tau} = \inf\{k \geq 1 : S_k \leq g(k)\},$$

где инфимум берется по натуральным числам. Как следует из работы [3] в этом случае

$$\sqrt{n}\mathbf{P}(\tilde{\tau} > n) \sim \sqrt{2/\pi}\,\widetilde{U}(n) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{6}$$

где

$$\widetilde{U}(t) = \mathbf{E}\,[S(\lfloor t \rfloor) - g(\lfloor t \rfloor); \tilde{\tau} > t]$$

является медленно меняющейся функцией при $t \to \infty$.

В еще более частном случае, когда $g(\lfloor t \rfloor)$ является постоянной, асимптотика (6) была получена ранее (см., например, [4]), используя факторизационные тождества. Однако для непостоянных функций $g(t)$ метод факторизационных тождеств не применим. В работе [3] был представлен другой, более вероятностный метод, который оказался применим для непостоянных функций с условием (4), а также для неодинаково распредленных величин $\{X_k\}$, которые удовлетворяют условию Линдеберга.

В данной статье мы ходим получить асимтотику $\mathbf{P}(\tau > t)$, используя некоторые модификации метода из работы [3].

1.3. Сформулируем наши основные результаты.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1), (4), (5) *и*

$$\mathbf{E}v_1{}^{\gamma_1} < \infty \quad \text{при некотором} \quad \gamma_1 > 3/2. \tag{7}$$

Тогда для независимых и одинаково распределенных пар случайных величин $\{(X_i, v_i) : i = 1, 2, \ldots\}$ *справедливо неравенство:*

$$\sqrt{T}\,\mathbf{P}(\tau > T) \le U_+(T) \quad \text{при всех} \quad T > 0, \tag{8}$$

где функция $U_+(T)$ *медленно меняется при* $T \to \infty$.

Положим

$$U_n := \mathbf{E}\left[S_n - g(V_n); \tau > V_n\right], \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия Теоремы 1. Тогда для любой монотонно невозрастающей функции* $g(\cdot)$ *имеет место следующая асимптотика*

$$\sqrt{T}\,\mathbf{P}(\tau > T) \sim \sqrt{2/\pi}\,U(T) \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{10}$$

где

$$U(T) := U_{\lfloor T \rfloor} \ge U_1 > 0 \quad \text{при} \quad T \ge 1$$

является монотонно неубывающей функцией, которая медленно меняется при $T \to \infty$.

Таким образом, в частном случае, когда все $v_i \equiv 1$, а невозрастающая функция $g(t) = g(\lfloor t \rfloor)$ кусочно-постоянна, из теоремы 2 вытекает утверждение (4), полученное ранее в работе [3].

Отметим, что теорема 2 вытекает из следующего полезного утверждения.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия Теоремы 2. Тогда имеет место следующая асимптотика*

$$\sqrt{n}\,\mathbf{P}(\tau > V_n) \sim \sqrt{2/\pi}\,U_n \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Отметим еще, что

$$\mathbf{P}(\tau > V_n) > 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad U_n > 0.$$
$$\mathbf{P}(\tau > T) > 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad U(T) > 0.$$

Остальная часть работы посвящена доказательствам теорем 1 – 3. Условимся, что ниже мы предполагаем выполненными все условия теоремы 1 даже в случаях, когда это не оговорено. А вот выполнение дополнительных условий из теоремы 2 мы всегда будем тщательно оговаривать.

2. Вспомогательные леммы

Условимся, что всюду далее в работе мы используем неслучайные действительные числа

$$T, t, u, x, y, h > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{и} \quad i, j, l, m, n = 1, 2, \ldots.$$

Отметим, что из условия (4) вытекает, что

$$G(T) := \sup_{0 \le t \le T} |g(t)| = o(\sqrt{T}) \quad \text{и} \quad \varkappa(T) := \sup_{t \ge T} \frac{G(t)}{\sqrt{t}} \downarrow 0 \tag{12}$$

при $T \uparrow \infty$.

2.1. Свойства величин U_n. Напомним, что величины $Z(\cdot)$, $\underline{Z}(\cdot)$ и $\tau > 0$ определены в (2) и (3). Положим

$$\beta := \inf\{n > 0 : \underline{Z}(V_n) \le 0\} = \inf\{n > 0 : \tau \le V_n\}, \quad Z_n := S_n - g(V_n) = Z(V_n),$$

и заметим, что ввиду (9)

$$U(V_n) = U_n = \mathbf{E}[Z_n^*] \quad \text{при} \quad Z_n^* := Z_n \mathbf{I}\{\beta > n\} = Z_n \mathbf{I}\{\tau > V_n\}.$$

Нетрудно понять, что последовательность троек

$$\mathcal{M} := \{(V_k, Z(V_k), \underline{Z}(V_k)) : k = 1, 2, \dots\} \tag{13}$$

образует цепь Маркова, а β — момент остановки этой цепи.

Лемма 1. *Пусть α — момент остановки цепи Маркова $\mathcal{M}$ такой, что $1 \le \alpha \le n$. Тогда при выполнении условий теоремы 1*

$$\mathbf{E}Z_\alpha^* - \mathbf{E}Z_n^* = \mathbf{E}[Z_\beta; \alpha < \beta \le n] + \mathbf{E}[g(V_{\beta\wedge n}) - g(V_\alpha); \alpha < \beta \wedge n]. \tag{14}$$

Кроме того,

$$\mathbf{E}Z_\alpha^* - \mathbf{E}Z_n^* \ge \mathbf{E}[X_\beta; \alpha < \beta \le n] - 2\mathbf{E}[G(V_{\beta\wedge n}); \alpha < \beta \wedge n]. \tag{15}$$

Доказательство. Повторяя вывод леммы 20 в [3, стр 3330] при $\nu := \alpha$ и $T_g := \beta$, мы получим следующее равенство

$$\mathbf{E}[Z_\alpha^*] = -\mathbf{E}[S_\beta; \beta \le \alpha] - \mathbf{E}[g(V_\alpha); \beta > \alpha]. \tag{16}$$

Введем события

$$A_1 := \{\alpha < \beta \le n\} \quad \text{и} \quad A_2 := \{\alpha < n < \beta\}.$$

Ясно, что

$$\{\alpha < \beta \wedge n\} = \{\alpha < \beta, \alpha < n\} = A_1 \cup A_2. \tag{17}$$

Из (16) мы получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Z_\alpha^* + \mathbf{E}[S_\beta; \beta \le \alpha] &= -\mathbf{E}[g(V_\alpha); \alpha < \beta] \\ &= -\mathbf{E}[g(V_\alpha); A_2] - \mathbf{E}[g(V_n); \alpha = n < \beta] - \mathbf{E}[g(V_\alpha); A_1]. \end{aligned} \tag{18}$$

А при $\alpha = n$ мы имеем из (18), что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Z_n^* + \mathbf{E}[S_\beta; \beta \le n] &= -\mathbf{E}[g(V_n); \beta > n] \\ &= -\mathbf{E}[g(V_n); A_2] - \mathbf{E}[g(V_n); \alpha = n < \beta]. \end{aligned} \tag{19}$$

Вычитая теперь (19) из (18) мы находим, что

$$\mathbf{E}Z_\alpha^* - \mathbf{E}Z_n^* = \mathbf{E}[S_\beta - g(V_\alpha); A_1] + \mathbf{E}[g(V_n) - g(V_\alpha); A_2]. \tag{20}$$

Ввиду (17), нетрудно заметить, что (20) можно переписать в виде (14).

Далее, по определению величины β

$$S_\beta = S_{\beta-1} + X_\beta > g(V_{\beta-1}) + X_\beta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_\beta - g(V_\alpha); A_1] &\ge \mathbf{E}[g(V_{\beta-1}) - g(V_\alpha) + X_\beta; A_1] \\ &\ge \mathbf{E}[X_\beta; A_1] - 2\mathbf{E}[G(V_n); A_1], \end{aligned}$$

где еще было использовано определение величины $G(\cdot)$ из (12). Аналогично,

$$\mathbf{E}[g(V_n) - g(V_\alpha); A_2] \ge -2\mathbf{E}[G(V_n); A_2].$$

Подставляя теперь две последние оценки в (20), мы получим (15). □

Лемма 2. *Пусть верны все условия теоремы 2. Тогда* $\mathbf{E}Z^*_\alpha \le \mathbf{E}Z^*_n$ *для любого момента остановки* α *цепи Маркова* $\mathcal{M}$ *такой, что* $1 \le \alpha \le n$. *Кроме того, в этом случае*

$$\forall n \ge m \ge 1 \quad U_n = \mathbf{E}Z^*_n \ge \mathbf{E}Z^*_m = U_m \ge U_1 > 0. \tag{21}$$

Доказательство. Для монотонно невозрастающих функций $g(\cdot)$ из (14) вытекает, что

$$\mathbf{E}Z^*_\alpha - \mathbf{E}Z^*_n \le \mathbf{E}[Z_\beta; \alpha < \beta \le n]$$
$$= \mathbf{E}[\min\{Z(t) : V_{\beta-1} < t \le V_\beta\}; \alpha < \beta \le n] \le \mathbf{E}[0; \alpha < \beta \le n] = 0.$$

Тем самым первое утверждение леммы доказано. А при $\alpha = m$ из него следует (21). □

2.2. Оценки для распределений величин V_n. Положим

$$\gamma_0 := \min\{\gamma_1, 2\} \in (3/2, 2] \quad \text{и} \quad \gamma := \gamma_0 - 3/2 \in (0, 1/2].$$

Лемма 3. *При всех* $u > 0$ *и* $n = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}(|V_n - n| > u) \le \frac{\mathbf{E}|V_n - n|^{\gamma_0}}{u^{\gamma_0}} \le \frac{C_1 n}{u^{\gamma_0}}, \quad \text{где} \quad C_1 := 2\mathbf{E}|v_1 - 1|^{\gamma_0} < \infty. \tag{22}$$

В частности, при $u = n$,

$$n\mathbf{P}(V_n > 2n) \le \mathbf{E}[|V_n - n|; |V_n - n| > n] \le \frac{C_1\sqrt{n}}{n^\gamma}. \tag{23}$$

Кроме того, для любого $\delta \in (0, 1)$

$$\sqrt{n}\mathbf{P}(|V_n - n| > n^{1-\delta\gamma/\gamma_0}) \le \frac{C_1}{n^{(1-\delta)\gamma}}. \tag{24}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что $V_k - k = \sum_{i=1}^k (v_i - 1)$ есть сумма независимых случаных величин $\{v_i - 1\}$ с нулевыми средними. Поскольку $\gamma_0 \in [1, 2]$, то по неравенству фон Бара – Эссеена [5]

$$\mathbf{E}|V_n - n|^{\gamma_0} \le 2n\mathbf{E}|v_1 - 1|^{\gamma_0} = C_1 n < \infty. \tag{25}$$

Здесь $C_1 < \infty$ ввиду условия (7). Используя идею Чебышева, из (25) мы получаем (22).

Далее, при $u = n$ из (22) следует (23), а при $u = n^{1-\delta\gamma/\gamma_0}$ из (22) мы находим (24), поскольку в этом случае

$$u^{\gamma_0} = n^{(1-\delta\gamma/\gamma_0)\gamma_0} = n^{\gamma_0 - \delta\gamma} = n^{3/2+(1-\delta)\gamma}.$$

□

Лемма 4. *При выполнении условий леммы 1 для всех* $n > 0$

$$\widehat{E}_{\alpha,n} := 2\mathbf{E}[G(V_n); \beta > \alpha] \le 3\varkappa(2n)\sqrt{n}\mathbf{P}(\beta > \alpha) + \frac{3C_1\varkappa(2n)}{n^\gamma}. \tag{26}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что ввиду (23)

$$\mathbf{E}[V_n; V_n > 2n] = \mathbf{E}[n; V_n > 2n] + \mathbf{E}[V_n - n; V_n - n > n]$$
$$\le n\mathbf{P}(V_n > 2n) + \frac{C_1\sqrt{n}}{n^\gamma} \le \frac{2C_1\sqrt{n}}{n^\gamma}.$$

Отсюда с учетом (12) мы имеем:

$$(27)\quad \widehat{E}_n := \mathbf{E}[G(V_n); V_n > 2n] \le \varkappa(2n)\mathbf{E}[\sqrt{V_n}; V_n > 2n] \le \frac{\varkappa(2n)}{\sqrt{2n}}\mathbf{E}[V_n; V_n > 2n] \le \frac{\varkappa(2n)}{\sqrt{2n}}\frac{2C_1\sqrt{n}}{n^\gamma} = \frac{\sqrt{2}C_1\varkappa(2n)}{n^\gamma}.$$

Далее, из определения в (26)

$$\widehat{E}_{\alpha,n} = 2\mathbf{E}[G(V_n); \beta > \alpha] \le 2G(2n)\mathbf{P}(\beta > \alpha) + 2\widehat{E}_n.$$

Но из этого соотношения и (27) очевидно следует (26), поскольку в силу (12)

$$2G(2n) \le 2\varkappa(2n)\sqrt{2n} \quad \text{и} \quad 2\sqrt{2} < 3.$$

□

2.3. Оценки в одной граничной задаче. Положим

$$(28)\qquad \varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \qquad \text{и} \qquad \Psi(x) := 2\int_0^{x^+}\varphi(y)dy.$$

Напомним, что

$$(29)\qquad \Psi(x) = \mathbf{P}(x + \min_{0\le t\le 1} W(t) > 0),$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. При $0 \le k < n$ введем обозначения

$$(30)\qquad \mu_{k,n} := \min_{k<j\le n}\sum_{i=k+1}^{j} X_i, \quad q_{k,n}(x) := \mathbf{P}(x + \mu_{k,n} > 0).$$

Лемма 5. *Для независимых и одинаково распределенных $X_1, X_2, \dots,$ удовлетворяющих условию* (1)

$$(31)\qquad \pi_n := \sup_x |q_{0,n}(x) - \Psi(x/\sqrt{n})| \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В частности, при всех $n > k \ge 0$ и всех x

$$(32)\qquad |q_{k,n}(x) - \Psi(\frac{x}{\sqrt{n-k}})| \le \pi_{n-k}.$$

Это утверждение впервые было получено Эрдешем и Кацем в [6]). В настоящее время его можно доказать большим числом способов, используя идеи из функциональной ЦПТ (см.,например, доказательсво леммы 18 в [3]). А из [7], [8], [9] можно извлечь оценки для величины π_n в терминах срезанных моментов третьего порядка случайной величины X_1.

При всех $n > k \ge 0$ и всех x введем обозначение

$$(33)\qquad Q_{k,n}(t,x) := \mathbf{P}\left(\tau > V_n, V_n \le 2n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x\right).$$

Лемма 6. *Для любых $n > k \ge 0$ и всех $x \ge 0$*

$$(34)\qquad Q_{k,n}(t,x) \le C_0\frac{x}{\sqrt{n-k}} + \rho_{k,n},$$

где

$$(35)\qquad C_0 := 2\varphi(0) = \sqrt{2/\pi} \quad \text{и} \quad \rho_{k,n} := \pi_{n-k} + \frac{2G(2n)}{\sqrt{n-k}}.$$

Лемма 7. *В условиях леммы 6*

$$Q_{k,n}(t,x) \ge \Psi(x/\sqrt{n}) - \rho_{n-k} - p_{k,n}(t,x), \tag{36}$$

где

$$p_{k,n}(t,x) := \mathbf{P}\left(V_n > 2n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x\right).$$

2.4. Доказательства лемм 6 и 7. Введем обозначение

$$M_{k,n} := \min\{Z(t) : V_k \le t \le V_n\}.$$

Лемма 8. *При любых $n > m \ge k > 0$*

$$|M_{k,n} - Z_k - \mu_{k,n}| \le 2G(V_n). \tag{37}$$

Доказательство. Пусть $V_k \le t \le V_n$. В этом случае

$$Z(t) - Z_k = Z(t) - Z(V_k) = S_{N(t)} - S_k - g(t) + g(V_k),$$

а потому

$$|Z(t) - Z_k - \sum_{i=k+1}^{N(t)} X_i| \le 2G(V_n) \quad \text{при} \quad V_k \le t \le V_n. \tag{38}$$

Нетрудно понять, что из (38) вытекает (37). □

Легко видеть, что (33) можно переписать в следующем эквивалентом виде

$$Q_{k,n}(t,x) = \mathbf{P}\left(M_{k,n} > 0, V_n \le 2n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x\right).$$

Отсюда с учётом (37) имеем:

$$\begin{aligned} Q_{k,n}(t,x) &\le \mathbf{P}\left(Z_k + \mu_{k,n} + 2G(V_n) > 0, V_n \le 2n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x\right) \\ &\le \mathbf{P}\left(x + \mu_{k,n} + 2G(2n) > 0 | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x\right) = q_{k,n}(x + 2G(2n)). \end{aligned} \tag{39}$$

Аналогично, хотя и чуть сложнее, получается неравенство в другую сторону

$$\begin{aligned} Q_{k,n}(t,x) &\ge \mathbf{P}\left(Z_k + \mu_{k,n} - 2G(V_n) > 0, V_n \le 2n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x\right) \\ &\ge \mathbf{P}\left(x + \mu_{k,n} - 2G(2n) > 0, V_n \le 2n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x\right) \\ &\ge q_{k,n}(x - 2G(2n)) - p_{k,n}(t,x). \end{aligned} \tag{40}$$

Далее из (32) получаем:

$$\left| q_{k,n}(x \pm 2G(2n)) - \Psi\left(\frac{x \pm 2G(2n)}{\sqrt{n-k}}\right) \right| \le \pi_{n-k}. \tag{41}$$

А из явного вида (28) функции Ψ находим, что

$$\left| \Psi\left(\frac{x \pm 2G(2n)}{\sqrt{n-k}}\right) - \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{n-k}}\right) \right| \le \frac{2G(2n)}{\sqrt{n-k}}, \tag{42}$$

$$\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \le \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{n-k}}\right) \le \frac{2\varphi(0)x}{\sqrt{n-k}} = C_0 \frac{x}{\sqrt{n-k}}. \tag{43}$$

Подставляя теперь (42) и (43) в (41) и учитывая определение (35) величин $\rho_{k,n}$, мы имеем:

$$\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \rho_{k,n} \le q_{k,n}(x - 2G(2n)) < q_{k,n}(x + 2G(2n)) < C_0 \frac{x}{\sqrt{n-k}} + \rho_{k,n}. \tag{44}$$

Из (39) и (44) немедленно вытекает утверждение (34) леммы 6. А неравенство (36) следует из (40) и (44).

3. Оценки сверху для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$

3.1. Применение леммы 6. Нетрудно понять, что

$$\overline{\pi}_n := \sup_{k\ge n/2} \pi_k \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{45}$$

Лемма 9. *Для произвольных* $n \ge 2m > 0$

$$q_n := \mathbf{P}(\tau > V_n) \le \frac{C_0 U_m}{\sqrt{n-m}} + (\overline{\pi}_n + 4\varkappa(2n))\mathbf{P}(\tau > V_m) + \frac{C_1}{n^{1/2+\gamma}}. \tag{46}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при всех $n > m > 0$

$$\begin{aligned} P_n := \mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \le 2n) &= \mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \le 2n, \tau > V_m) \\ &= \mathbf{E}[Q_{m,n}(V_m, Z_m); \tau > V_m]. \end{aligned} \tag{47}$$

Здесь мы использовали определение (33) и марковское свойство пар $\{(V_m, Z_m) : m = 1, 2, \ldots\}$. Подставляя теперь в (47) оценку (34) мы найдем, что при $k = m$

$$\begin{aligned} P_n &\le \frac{C_0}{\sqrt{n-m}}\mathbf{E}[Z_m; \tau > V_m] + \rho_{n,m}\mathbf{P}(\tau > V_m) \\ &= \frac{C_0}{\sqrt{n-m}} U_m + \rho_{n,m}\mathbf{P}(\tau > V_m). \end{aligned} \tag{48}$$

Далее, ввиду определения (45),

$$\forall n \ge 2m > 0 \quad \pi_{n-m} \le \overline{\pi}_n \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-m}} \le \sqrt{2}. \tag{49}$$

Подставляя (12) и (49) в (35), имеем

$$\rho_{m,n} = \pi_{n-m} + \frac{2G(2n)}{\sqrt{n-m}} \le \overline{\pi}_n + \frac{2\varkappa(2n)\sqrt{2n}}{\sqrt{n/2}} = \overline{\pi}_n + 4\varkappa(2n). \tag{50}$$

Наконец, ввиду (47) очевидно, что

$$\mathbf{P}(\tau > V_n) \le P_n + \mathbf{P}(V_n > 2n) \le P_n + \frac{C_1}{n^{1/2+\gamma}}. \tag{51}$$

При выводе последней оценки в (51) мы также использовали (23). Подставим теперь сначала в (48) оценку для $\rho_{m,n}$ из (50), а затем подставим (48) в (51). В итоге мы получим (46). □

3.2. Грубая оценка сверху для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$. Введем числа

$$T_0 := \min\{n \ge 2 : \overline{\rho}_n := \overline{\pi}_n + 4\varkappa(2n) \le 1/4\} < \infty, \tag{52}$$

$$C_2 := 3 + \frac{2C_1}{U_1} + \max_{n<T_0} \frac{\sqrt{n}\mathbf{P}(\tau > V_n)}{U_n} < \infty. \tag{53}$$

Лемма 10. *В условиях Теоремы 2*

$$Q_n := \sqrt{n}\mathbf{P}(\tau > V_n) \le C_2 U_n \qquad \forall n > 0. \tag{54}$$

Доказательство. При $n < T_0$ неравенсво (54) очевидно следует из определения (53) величины C_2.

Пусть теперь $n \geq T_0 \geq 2$ — это минимальное натуральное число, для которого неравенство (54) еще не доказано. Поскольку $m := \lfloor n/2 \rfloor \leq n/2 < n \leq 3m$, то при указанном $m < n$ неравенство (54) уже доказано:

$$q_m = \mathbf{P}(\tau > V_m) \leq \frac{C_2 U_m}{\sqrt{m}} \leq \frac{\sqrt{3} C_2 U_n}{\sqrt{n}}. \tag{55}$$

При выводе (55) было также использовано неравенство (21).

Подставляя теперь (55) в (46) и используя опять (21), мы получаем:

$$Q_n \leq C_0 \frac{\sqrt{n} U_m}{\sqrt{n-m}} + \sqrt{n}\overline{\rho}_n q_m + \frac{C_1}{n^\gamma} \leq \sqrt{2} C_0 U_n + \sqrt{3} C_2 U_n \overline{\rho}_n + \frac{C_1 U_n}{n^\gamma U_1}. \tag{56}$$

Но в силу (52) и (53)

$$\sqrt{2} C_0 + \frac{C_1}{U_1} \leq \frac{C_2}{2} \quad \text{и} \quad \sqrt{3}\overline{\rho}_n \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq T_0. \tag{57}$$

Из этих фактов и (56) имеем:

$$Q_n \leq \frac{C_2}{2} U_n + \frac{C_2}{2} U_n = C_2 U_n. \tag{58}$$

И тем самым мы доказали (54) при выбранном n.

Утверждение леммы теперь вытекает из принципа математической индукции. □

3.3. Асимптотическая оценка сверху для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$. При произвольном $\varepsilon \in (0, 1/2]$ положим

$$T_1(\varepsilon) := \min\left\{ n \geq \frac{2}{\varepsilon} : \frac{\sqrt{n}\overline{\rho}_n}{\sqrt{\lfloor \varepsilon n \rfloor}} C_2 + \frac{C_1}{U_1 n^\gamma} \leq C_0 \varepsilon \right\} < \infty. \tag{59}$$

Лемма 11. *В условиях теоремы 2 при любом* $\varepsilon \in (0, 1/2]$

$$\sqrt{1-\varepsilon}\sqrt{n}\mathbf{P}(\tau > V_n) \leq (1+\varepsilon) U_n \quad \forall n \geq T_1(\varepsilon). \tag{60}$$

Доказательство. При $m := \lfloor \varepsilon n \rfloor$ мы имеем право использовать оценку (46) при всех $n \geq 2$. Подставляя теперь неравенство (54) в (46) и применяя несколько раз соотношения из (21), имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\varepsilon}\sqrt{n}\mathbf{P}(\tau > V_n) &\leq \sqrt{n-m}\mathbf{P}(\tau > V_n) \\ &\leq C_0 U_m + \sqrt{n-m}\overline{\rho}_n \frac{C_2 U_m}{\sqrt{m}} + \frac{C_1 U_1}{U_1 n^\gamma} \\ &\leq U_n \left(C_0 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} C_2 \overline{\rho}_n + \frac{C_1}{U_1 n^\gamma} \right). \end{aligned} \tag{61}$$

Из (61) при $n \geq T_1(\varepsilon)$ следует (60) ввиду определения (59) числа $T_1(\varepsilon)$. □

4. Доказательство теоремы 3

4.1. Основная идея. Введем в рассмотрение вспомогательные целочисленные случайные величины $\nu(h)$ и ν_m:

$$\nu(h) := \inf\{k > 0 : Z_k \geq h\}, \quad \nu_m = \min\{\nu(h), m\}, \quad m, h > 0, \tag{62}$$

где целое $m = m(n) > 0$ и действительное $h = h(n) > 0$ будут выбраны позже. Напомним, что обозначения $Q_{k,n}(t, x)$ и P_n были введены ранее в (33) и (47).

Лемма 12. *При любых* $n > m > 0$

$$P_n = \mathbf{E}\left[Q_{\nu_m,n}(V_{\nu_m}, Z_{\nu_m}); \beta > \nu_m, V_{\nu_m} \le 2n\right]. \tag{63}$$

Доказательство. Из формулы полной вероятности имеем:

$$\mathbf{P}\left(\tau > V_n, V_n \le 2n\right) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\left(\nu_m = k, \tau > V_n, V_n \le 2n\right) \tag{64}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\left(\nu_m = k, \tau > V_n, V_n \le 2n, \tau > V_k, V_k \le 2n\right).$$

Здесь мы использовали тот факт, что всегда $V_k < V_n$. Далее, нетрудно понять, что ν_m — момент остановки введенной в (13) цепи Маркова $\mathcal{M}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\nu_m = k, \tau > V_n, V_n \le 2n\right) = \mathbf{P}\left(\nu_m = k, \tau > V_n, V_n \le 2n, \tau > V_k, V_k \le 2n\right)$$
$$= \mathbf{E}\left[Q_{k,n}(V_k, Z(V_k), T); \beta > k = \nu_m, V_k \le 2n\right],$$

поскольку события $\{\tau > V_k\}$ и $\{\beta > k\}$ совпадают.

Подставляя это равенство в (64), мы получим (63). □

Замечание 1. *Мы увидим далее, что идея ввести момент остановки вида* ν_m*, при специально подбираемых* m *и* h*, является очень продуктивной. Эта идея принадлежит В. Вахтелю и Д. Денисову (см.* [10], [11], [12]*).*

4.2. Применение леммы 7.

Лемма 13. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при всех* $n \ge 2m > 0$ *для любых* $h > 0$

$$\sqrt{n}\mathbf{P}(\tau > V_n) \ge \sqrt{n}P_n \ge C_0\mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; A_{m,n}\right]\left(1 - \frac{h^2}{n} - \frac{\sqrt{n}\overline{\rho}_n}{C_0 h}\right) \tag{65}$$
$$-\sqrt{n}\overline{\rho}_n\mathbf{P}(\tau > V_m) - C_0E_{m,n} - \sqrt{n}\mathbf{P}(V_n > 2n),$$

где

$$A_{m,n} := \{\tau > V_{\nu_m}, V_{\nu_m} \le 2n\}, \quad E_{m,n} := \mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; Z^*_{\nu_m} > 2h, V_{\nu_m} \le 2n\right]. \tag{66}$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}(\beta > \nu_m) - \mathbf{P}(V_n > 2n) \le \mathbf{P}(A_{m,n}) \le \mathbf{P}(\tau > V_m) + \mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; A_{m,n}\right]/h. \tag{67}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу (50) и (52) неравенство (36) можно переписать в следующем виде

$$Q_{k,n}(t, x) \ge \Psi(x/\sqrt{n}) - \overline{\rho}_n - p_{k,n}(t, x). \tag{68}$$

Подставляя $t = V_{\nu_m}$ и $x = Z^*_{\nu_m}$ в (68) и используя (63), получаем:

$$P_n \ge \mathbf{E}\left[\Psi(Z^*_{\nu_m}/\sqrt{n}); A_{m,n}\right] - \overline{\rho}_n\mathbf{P}(A_{m,n}) - \mathbf{P}(V_n > 2n). \tag{69}$$

Далее,

$$\mathbf{P}(A_{m,n}, \tau \le V_m) = \mathbf{P}(Z^*_{\nu_m} > h, A_{m,n}) \le \mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; A_{m,n}\right]/h.$$

Но из этого факта немедленно вытекает, что

$$\mathbf{P}(A_{m,n}) \le \mathbf{P}(\tau > V_m) + \mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; A_{m,n}\right]/h. \tag{70}$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}(\beta > \nu_m) = \mathbf{P}(\tau > V_{\nu_m}) \le \mathbf{P}(A_{m,n}) + \mathbf{P}(V_{\nu_m} > 2n).$$

В частности, из последнего неравенства и (70) следует (67).

Заметим теперь (см. [3], стр 3328), что

$$C_0 y \geq \Psi(y) \geq C_0 y(1-\frac{y^2}{6}) \quad \text{для всех} \quad y \geq 0.$$

Следовательно,

$$\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \geq C_0\frac{x\mathbf{I}[x\leq 2h]}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{4h^2}{6n}\right) \geq C_0\frac{x}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{h^2}{n}\right) - C_0\frac{x\mathbf{I}[x>2h]}{\sqrt{n}}.$$

Полагая в последнем выражении $x = Z^*_{\nu_m}$ и беря математические ожидания, приходим к неравенству:

$$\mathbf{E}\left[\Psi\left(\frac{Z^*_{\nu_m}}{\sqrt{n}}\right); A_{m,n}\right] \geq \frac{C_0\mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; A_{m,n}\right]}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{h^2}{n}\right) - \frac{C_0 E_{m,n}}{\sqrt{n}}, \tag{71}$$

где величина $E_{m,n}$ была введена в (66).

Наконец, подставляя (70) и (71) в (69), мы получаем (65). □

4.3. Оценка сверху для U_n. Заметим, что при $n\to\infty$

$$\lambda_n^2 := \min\{\varepsilon>0 : \mathbf{E}[X_1^2; |X_1|>\varepsilon\sqrt{n}] \leq \varepsilon^2\} \to 0. \tag{72}$$

Лемма 14. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при всех* $n\geq m>0$

$$\begin{aligned} U_n \leq &\left(1+\frac{\sqrt{n}\delta_{1,n}}{h}\right)\mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; A_{m,n}\right] \\ &+\sqrt{n}\delta_{1,n}\mathbf{P}(\beta>m) + \left(2\delta_{1,n}+\frac{h}{\sqrt{n}}\right)\frac{C_1}{n^\gamma}, \end{aligned} \tag{73}$$

где

$$\delta_{1,n} := 2\lambda_n + 3\varkappa(2n) \to 0 \quad \textit{при} \quad n\to\infty. \tag{74}$$

Доказательство. Из (15) при $\alpha=\nu_m$ вытекает, что

$$\hat\Delta_{m,n} := \mathbf{E}Z^*_n - \mathbf{E}Z^*_{\nu_m} \leq \mathbf{E}[-X_\beta; \nu_m<\beta\leq n] + \hat E_{\nu_m,n}, \tag{75}$$

где величина $\hat E_{\nu_m,n}$ была введена и оценена в (26). Далее

$$U_n - \mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; A_{m,n}\right] = \mathbf{E}Z^*_n - \mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; A_{m,n}\right] = \hat\Delta_{m,n} + \Delta^*_{m,n}, \tag{76}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta^*_{m,n} := \mathbf{E}Z^*_{\nu_m} - \mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; A_{m,n}\right] &= \mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; \tau>V_{\nu_m}, V_{\nu_m}>2n\right] \\ &\leq h\mathbf{P}(V_{\nu_m}>2n) \leq h\mathbf{P}(V_n>2n) \leq \frac{C_1 h}{n^{1/2+\gamma}}. \end{aligned} \tag{77}$$

По определению величины ν_m (см. (62)), при любом $y>0$ для всех $2\leq j\leq n$ мы имеем:

$$\begin{aligned} \tilde E_{j,m}(y) &:= \mathbf{E}[-X_j; \beta>j-1\geq\nu_m, -X_j>y] \\ &= \mathbf{E}[-X_j; -X_j>y]\mathbf{P}(\beta>j-1\geq\nu_m), \end{aligned}$$

поскольку событие $\{\beta > j-1 \geq \nu_m\}$ порождается случайными величинами $X_1, \dots, X_{j-1}$, которые не зависят от X_j. Следовательно

$$\begin{aligned} E_{j,m}(y) &:= \mathbf{E}[-X_\beta; \beta = j > \nu_m, -X_\beta > y] \leq \tilde{E}_{j,m}(y) \\ &= \mathbf{E}[-X_1; -X_1 > y]\mathbf{P}(\beta > j-1 \geq \nu_m) \\ &\leq \frac{\mathbf{E}[X_1^2; |X_1| > y]}{y}\mathbf{P}(\beta > \nu_m). \end{aligned}$$

Значит, для любого $y > 0$,

$$\mathbf{E}[-X_\beta; n \geq \beta > \nu_m] \leq y\mathbf{P}(\beta > \nu_m) + \mathbf{E}[-X_\beta; -X_\beta > y, n \geq \beta > \nu_m]$$
$$= y\mathbf{P}(\beta > \nu_m) + \sum_{j=2}^{n} E_{j,m}(y) \leq y\mathbf{P}(\beta > \nu_m) + n\frac{\mathbf{E}[X_1^2; |X_1| > y]}{y}\mathbf{P}(\beta > \nu_m).$$

А полагая $y = \lambda_n\sqrt{n}$ и учитывая (72), мы получаем:

$$\mathbf{E}[-X_\beta; n \geq \beta > \nu_m] \leq 2\lambda_n\sqrt{n}\mathbf{P}(\beta > \nu_m). \tag{78}$$

Подставив теперь (78) и (26) в (75), имеем:

$$\hat{\Delta}_{m,n} \leq \sqrt{n}\delta_{1,n}\mathbf{P}(\beta > \nu_m) + 3C_1\varkappa(2n)/n^\gamma. \tag{79}$$

Далее, из (67) и (23) находим:

$$\mathbf{P}(\beta > \nu_m) \leq \mathbf{P}(\tau > V_m) + \mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; A_{m,n}\right]/h + C_1/n^\gamma. \tag{80}$$

Но (80) позволяет нам переписать (79) в следующем виде:

$$\hat{\Delta}_{m,n} \leq \sqrt{n}\delta_{1,n}\frac{\mathbf{E}\left[Z^*_{\nu_m}; A_{m,n}\right]}{h} + \sqrt{n}\delta_{1,n}\mathbf{P}(\beta > m) + 2C_1\frac{\delta_{1,n}}{n^\gamma}. \tag{81}$$

При выводе (81) мы использовали также тот факт, что $3\varkappa(2n) \leq \delta_{1,n}$ ввиду (74).

Наконец, подставляя (81) и (77) в (76), мы получим требуемое неравенство (73). □

4.4. Оценка для перескока.

Лемма 15. *Пусть выполнены условия теоремы 2, а числа n и h удовлетворяют неравенствам*

$$h \geq 4G(2n) \quad \text{и} \quad h \geq 2\lambda_n\sqrt{n}. \tag{82}$$

Тогда при всех $n \geq m > 0$

$$E_{m,n} \leq C_3\lambda_n^2\sqrt{m}U_n/h \quad \text{при} \quad C_3 := 8/U_1 + 16C_2. \tag{83}$$

Доказательство. Поскольку $Z_{\nu_m - 1} < h$, то

$$\begin{aligned} Z_{\nu_m} &= Z_{\nu_m-1} + g_{\nu_m-1} - g_{\nu_m} + X_{\nu_m} \\ < h + 2G(V_{\nu_m}) + X_{\nu_m} &\leq h + 2h/4 + X_{\nu_m} = 3h/2 + X_{\nu_m}, \end{aligned}$$

в случае, когда $V_{\nu_m} \leq V_n \leq 2n$ и $G(2n) \leq h/4$ ввиду (82). Следовательно,

$$\begin{aligned} E_{m,n} &= \mathbf{E}[Z_{\nu_m}; \beta > \nu_m, Z_{\nu_m} > 2h, V_n \leq 2n] \\ &\leq \mathbf{E}\left[3h/2 + X_j; \beta > \nu_m, X_{\nu_m} > h/2\right] \\ &\leq \mathbf{E}[4X_{\nu_m}; \beta > \nu_m, X_{\nu_m} > h/2] \\ &\leq \mathbf{E}[8X^2_{\nu_m}/h; \beta > \nu_m, X_{\nu_m} > h/2]. \end{aligned} \tag{84}$$

Далее, при всех $1 \le j \le m$

$$\begin{aligned} E_j^* &:= \mathbf{E}[X_{\nu_m}^2; \beta > \nu_m = j, X_{\nu_m} > h/2] \le \mathbf{E}\left[X_j^2; \beta > j-1, X_j > h/2\right] \\ &= \mathbf{E}[X_j^2; X_j > h/2]\mathbf{P}(\beta > j-1) \le \lambda_n^2 \mathbf{P}(\beta > j-1). \end{aligned} \tag{85}$$

Равенство в (85) вытекает из того факта, что событие $\{\beta > j-1\}$ порождается случайными величинами $X_1, \dots, X_{j-1}$, которые не зависят от X_j. А последнее неравенство в (85) следует из (72), поскольку $h/2 \ge \lambda_n \sqrt{n}$ в силу предположения (82). Напомним еще, что ввиду (54) и (21) справедлива оценка

$$\mathbf{P}(\beta > j-1) = \mathbf{P}(\tau > V_{j-1}) \le \frac{C_2 U_j}{\sqrt{j-1}} \le \frac{C_2 U_n}{\sqrt{j-1}}, \qquad j = 2, \dots n. \tag{86}$$

Из этого факта, (84) и (85) находим:

$$E_{m,n} \le \frac{8}{h} \sum_{j=1}^{m} E_j^* \le \frac{8\lambda_n^2}{h} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}(\beta > j-1) \le \frac{8\lambda_n^2}{h}\Big(1 + \sum_{j=2}^{m} \frac{C_2 U_n}{\sqrt{j-1}}\Big). \tag{87}$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{j-1}} < \frac{2}{\sqrt{j-1} + \sqrt{j-2}} = 2(\sqrt{j-1} - \sqrt{j-2}),$$

то

$$\sum_{j=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{j-1}} < \sum_{j=2}^{m} 2(\sqrt{j-1} - \sqrt{j-2}) = 2\sqrt{m-1} < 2\sqrt{m}.$$

Подставляя этот результат в (87), получаем:

$$E_{m,n} \le \frac{8}{h} \sum_{j=1}^{m} E_j^* \le \frac{8\lambda_n^2}{h}\left(1 + 2C_2 U_n \sqrt{m}\right). \tag{88}$$

А учитывая, что $1 = U_1/U_1 \le U_n/U_1 \le U_n\sqrt{m}/U_1$, мы из (88) легко извлекаем (83). $\square$

4.5. Выбор уровня h. При $n > 1$ положим

$$\delta_n := \sqrt[3]{\bar{\rho}_n/C_0 + \delta_{1,n} + \lambda_n^2} \quad \text{и} \quad h = h_n := \sqrt{n}\delta_n. \tag{89}$$

Лемма 16. *Пусть выполнены все условия леммы 14. Тогда при $h = h_n$ из (89) справедливы следующие соотношения*

$$\begin{aligned} U_n \ge U_m = \mathbf{E}Z_m^* \ge \mathbf{E}Z_{\nu_m}^* &\ge \mathbf{E}\left[Z_{\nu_m}^*; A_{m,n}\right] \\ &\ge U_n\left(1 - \delta_{2,n} - C_2\delta_{1,n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right), \end{aligned} \tag{90}$$

где

$$0 \le \delta_{2,n} \le \delta_{1,n}^{2/3} + (2\delta_{1,n} + \delta_n)\frac{C_1}{U_1 n^\gamma} \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{91}$$

В частности, функция $U(T) = U_{\lfloor T \rfloor}$ является медленно меняющейся при $T \to \infty$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что в (90) нам нужно доказать только последнее неравенство, поскольку остальные соотношения в (90) немедленно вытекуют из утверждений леммы 2. Далее, $1/(1+\delta) \geq 1-\delta$ при всех $\delta > 0$. Поэтому неравенство (73) при $h = h_n^*$ можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{E}\left[Z_{\nu_m}^*; A_{m,n}\right] \geq U_n\left(1 - \frac{\sqrt{n}\delta_{1,n}}{h_n}\right) - \sqrt{n}\delta_{1,n}\mathbf{P}(\beta > m) - \left(2\delta_{1,n} + \frac{h_n}{\sqrt{n}}\right)\frac{C_1}{n^\gamma}.$$

Но из этого неравенства и (86) при $j = m+1$ немедленно следует последнее неравенство в (90) при

$$\delta_{2,n} := \frac{\sqrt{n}\delta_{1,n}}{h_n} + \left(2\delta_{1,n} + \frac{h_n}{\sqrt{n}}\right)\frac{C_1}{U_n n^\gamma} = \frac{\delta_{1,n}}{\delta_n} + (2\delta_{1,n} + \delta_n)\frac{C_1}{U_n n^\gamma}. \tag{92}$$

Замечая теперь, что $\delta_n^* > \delta_{1,n}^{1/3}$ в виду (89), и что $U_n \geq U_1 > 0$ в силу (21), мы из (92) получаем оценку (91).

Наконец, полагая в (90) натуральное $m = \lfloor cn \rfloor$ при любом $c \in (0,1)$, мы имеем:

$$1 \geq \frac{U_n}{U_{\lfloor cn \rfloor}} \geq 1 - \delta_{2,n} - C_2\delta_{1,n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{cn-1}} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

поскольку $\delta_{1,n} + \delta_{2,n} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, функция $U(T) = U_{\lfloor T \rfloor}$ является медленно меняющейся при $T \to \infty$. □

4.6. Асимптотическая оценка снизу для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$.

Лемма 17. *Пусть выполнены все условия Теоремы 2. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1/2]$ найдется число $T_2(\varepsilon)$ такое, что*

$$\sqrt{n}\mathbf{P}(\tau > V_n) = \sqrt{n}\mathbf{P}(\beta > n) \geq (1-\varepsilon)C_0 U_n \quad \forall\ n \geq T_2(\varepsilon). \tag{93}$$

Доказательство. При $n \geq 2m > 1$ и $h = h_n$ мы имеем право подставить в (65) последнее неравенство из (90). В итоге имеем:

$$\sqrt{n}P_n \geq C_0 U_n\left(1 - \frac{h_n^2}{n} - \frac{\sqrt{n}\overline{\rho}_n}{C_0 h_n}\right)\left(1 - \delta_{2,n} - C_2\delta_{1,n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right)$$
$$-\sqrt{n}\overline{\rho}_n\mathbf{P}(\tau > V_m) - C_0 E_{m,n} - \sqrt{n}\mathbf{P}(V_n > 2n).$$

Предположим теперь, что выполнены оба условия в (82). Используя в этом случае неравенства (23), (83) и (86) при $j = m+1$, находим:

$$\sqrt{n}P_n \geq C_0 U_n\left(1 - \frac{h_n^2}{n} - \frac{\sqrt{n}\overline{\rho}_n}{C_0 h_n} - \delta_{2,n} - C_2\delta_{1,n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right)$$
$$-\sqrt{n}\overline{\rho}_n\frac{C_2 U_n}{\sqrt{m}} - \frac{C_0 C_3 \lambda_n^2 \sqrt{m}\, U_n}{h_n} - \frac{C_1 h_n}{n^{1/2+\gamma}}.$$

Таким образом из определения (89) величины h_n мы получаем, что

$$\sqrt{n}\mathbf{P}(\tau > V_n) \geq \sqrt{n}P_n \geq C_0 U_n\left(1 - \delta_{3,n}\right), \tag{94}$$

где

$$\delta_{3,n} := \delta_n^2 + \frac{\overline{\rho}_n}{C_0\delta_n} + \delta_{2,n} + C_2\left(\delta_{1,n} + \frac{\overline{\rho}_n}{C_0}\right)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} + \frac{C_3\lambda_n^2\sqrt{m}}{\sqrt{n}\delta_n} + \frac{C_1\delta_n}{C_0 U_n n^\gamma}. \tag{95}$$

Положим теперь $m := \lfloor n/2 \rfloor \geq n/3$ при $n > 1$. Учитывая вид (89) величины δ_n, из (95) нетрудно извлечь, что

$$\delta_{3,n} \leq \delta_{4,n} := 2\delta_n^2 + \delta_{2,n} + C_2\delta_n^2 + C_3\delta_n^2 + \frac{C_1\delta_n}{C_0 U_1 n^\gamma} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{96}$$

При выводе (96) мы еще использовали (21).

Положим теперь

$$T_2(\varepsilon) := \inf\{n > 1 : \delta_{4,n} \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad \overline{\rho}_n + 2\lambda_n \leq \delta_n\}. \tag{97}$$

Из определений (89), (12) и (52), нетрудно убедиться что при $n \to \infty$

$$2\lambda_n/\delta_n < 2\sqrt{\delta_n} \to 0 \quad \text{и} \quad 4G(2n)/h_n \leq 4\varkappa(2n)/\delta_n \leq \overline{\rho}_n/\delta_n \leq C_0\delta_n^2 \to 0. \tag{98}$$

А поскольку еще $\delta_{4,n} \to 0$ при $n \to \infty$, то $T_2(\varepsilon) < \infty$ при всех $\varepsilon > 0$.

Далее, из второго условия в (97) с учетом второго неравенства в (98) немедленно вытекает, что при $n \geq T_2(\varepsilon)$ выполнены оба предположения из (82). Значит, при $n \geq T_2(\varepsilon)$ мы имеем право использовать неравенство (94) с оценкой (96) для $\delta_{3,n} \leq \delta_{4,n}$. Таким образом, требуемое неравенство (93) вытекает из (94) и (96) при $T_2(\varepsilon)$, введенном в (97) $\square$

Из лемм 11 и 17 очевидным образом вытекает утверждение (11) теоремы 3.

5. Доказательства теорем 1 и 2

5.1. Оценка сверху для $\mathbf{P}(\tau > T)$.

Лемма 18. *Пусть выполнены все условия Теоремы 2. Тогда для любого* $\varepsilon \in (0, 1/2]$

$$(1-\varepsilon)\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > T) \leq (1+2\varepsilon)C_0 U(T) \quad \textit{при всех} \quad T \geq T_3(\varepsilon), \tag{99}$$

где

$$T_3(\varepsilon) := \inf\{T \geq T_1(\varepsilon)/(1-\varepsilon) : \frac{4C_1}{U_1 T^\gamma} \leq C_0\varepsilon^3\}. \tag{100}$$

Кроме того,

$$\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > T) \leq C_4 U(T) \quad \textit{при всех} \quad T > 0, \tag{101}$$

где

$$C_4 := 2C_0 + \sup_{T < T_3(1/2)} \frac{\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > T)}{U(T)}. \tag{102}$$

Доказательство. При всех $T, n > 0$ очевидным образом имеем

$$\mathbf{P}(\tau > T) \leq \mathbf{P}(\tau > V_n) + \mathbf{P}(V_n > T). \tag{103}$$

Пусть теперь

$$T \geq T_3(\varepsilon) \quad \text{и} \quad n := \lfloor (1-\varepsilon)T \rfloor + 1.$$

В силу (100) и (59) в этом случае $T > (1-\varepsilon)T \geq T_1(\varepsilon) \geq 2/\varepsilon$, а потому

$$2/\varepsilon \leq T_1(\varepsilon) \leq (1-\varepsilon)T \leq n \leq (1-\varepsilon)T + 1 \leq (1-\varepsilon)T + \varepsilon T/2,$$
$$T - n \geq T - (1-\varepsilon)T - 1 = \varepsilon T - 1 \geq \varepsilon T - \varepsilon T/2.$$

Следовательно, при выбранном n

$$T_1(\varepsilon) \leq n \leq T \quad \text{и} \quad T - n \geq \varepsilon T/2. \tag{104}$$

Но при $n \geq T_1(\varepsilon)$ мы можем воспользоваться утверждением леммы 11. В итоге получим:

$$(1-\varepsilon)\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > V_n) \leq \sqrt{(1-\varepsilon)n}\mathbf{P}(\tau > V_n) \leq (1+\varepsilon)C_0U_n. \tag{105}$$

Далее, применим неравенство (22) при $u = \varepsilon T/2$ и $n \leq T$. Учитывая еще (104), имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(V_n > T) &\leq \mathbf{P}(V_n - n > \varepsilon T/2) \leq \mathbf{P}(|V_n - n| > \varepsilon T/2) \\ &\leq \frac{C_1 n}{(\varepsilon T/2)^{3/2+\gamma}} \leq \frac{4C_1}{\varepsilon^2 T^{1/2+\gamma}} \leq \frac{4C_1U_n}{U_1\varepsilon^2 T^{1/2+\gamma}} \leq \frac{C_0\varepsilon U_n}{\sqrt{T}}.\end{aligned} \tag{106}$$

При выводе двух последних неравенств в (106) мы еще использовали (21) и определение (100) числа $T_3(\varepsilon)$. Подставляя теперь (105) и (106) в (103), находим:

$$(1-\varepsilon)\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > V_n) \leq (1+\varepsilon)C_0U_n + \varepsilon C_0U_n \leq (1+2\varepsilon)C_0U(T), \tag{107}$$

поскольку еще $U_n = U(n) \leq U(T)$ при $n \leq T$.

Таким образом, из (107) вытекает (99). Заметим наконец, что число C_4 в (102) выбрано таким образом, чтобы (101) следовало из (99) при $\varepsilon = 1/2$. □

5.2. Доказательство теоремы 2.

Лемма 19. *Пусть выполнены все условия Теоремы 2. Тогда для любого* $\varepsilon \in (0, 1/2]$

$$\mathbf{P}(\tau > T) \geq (1-3\varepsilon)C_0U(T) \quad \text{при всех} \quad T \geq T_4(\varepsilon), \tag{108}$$

где

$$T_4(\varepsilon) := \inf\{T \geq T_2(\varepsilon) : C_1 \leq C_0U_1T^\gamma\varepsilon^3\}. \tag{109}$$

Доказательство. Очевидно, что при всех $T, n > 0$

$$\mathbf{P}(\tau > V_n) \leq \mathbf{P}(\tau > T) + \mathbf{P}(V_n < T). \tag{110}$$

Пусть теперь

$$T \geq T_4(\varepsilon) \quad \text{и} \quad n := \lfloor (1+\varepsilon)T \rfloor + 1 \geq T + \varepsilon T.$$

В силу (100) и (59) в этом случае

$$n > T \geq T_4(\varepsilon) \geq T_2(\varepsilon) \geq T_1(\varepsilon) \geq 2/\varepsilon,$$

а потому

$$n \leq (1+\varepsilon)T + 1 \leq (1+\varepsilon)T + \varepsilon T/2 = 1 + 3\varepsilon/2 \quad \text{и}$$
$$\frac{T}{n} \geq \frac{1}{1+3\varepsilon/2} \geq 1 - 3\varepsilon/2 \geq (1-\varepsilon)^2 \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}.$$

Следовательно, при выбранных n и ε

$$\sqrt{T} \geq (1-\varepsilon)\sqrt{n} \quad \text{и} \quad 2T > n \geq T + \varepsilon T > T. \tag{111}$$

Но при $n \geq T_2(\varepsilon)$ мы можем воспользоваться утверждением леммы 17. В итоге получим:

$$\mathbf{P}(\tau > V_n) \geq \frac{(1-\varepsilon)C_0U_n}{\sqrt{n}} \geq \frac{(1-\varepsilon)C_0U_n(1-\varepsilon)}{\sqrt{T}} \geq \frac{(1-2\varepsilon)C_0U_n}{\sqrt{T}}. \tag{112}$$

Далее, учитывая (111), применим неравенство (22) при $u = \varepsilon T$:

$$\mathbf{P}(V_n < T) = \mathbf{P}(V_n - n < T - n) \leq \mathbf{P}(V_n - n < -\varepsilon T)$$
$$\leq \mathbf{P}(|V_n - n| > \varepsilon T) \leq \frac{C_1 n}{(\varepsilon T)^{3/2+\gamma}} \leq \frac{C_1}{\varepsilon^2 T^{1/2+\gamma}} \leq \frac{C_1 U_n}{U_1 \varepsilon^2 T^{1/2+\gamma}}.$$

А поскольку $U_n \geq U_1 > 0$ ввиду (21), то используя определение (109) числа $T_4(\varepsilon)$, имеем:

$$(1-\varepsilon)\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > V_n) \leq (1+\varepsilon)C_0 U_n + \varepsilon C_0 U_n \leq (1+2\varepsilon)C_0 U(T). \tag{113}$$

Подставляя теперь (112) и (113) в (110), находим:

$$\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > T) \geq (1-2\varepsilon)C_0 U_n - \varepsilon C_0 U_n \geq (1-3\varepsilon)C_0 U_n. \tag{114}$$

Таким образом, чтобы из (114) получить (108), нужно лишь заметить, что $n > T$, а потому $U_n = U(n) \geq U(T)$. □

Из лемм 18 и 19 очевидным образом вытекает утверждение (10) теоремы 2. Напомним еще, что в лемме 16 мы уже доказали, что функция $U(T) = U_{\lfloor T \rfloor}$ является медленно меняющейся при $T \to \infty$.

5.3. Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение величины

$$\tau_- = \inf\{t > 0 : S(t) \leq -G(t)\}, \quad U_-(T) := \mathbf{E}[S_{\lfloor T \rfloor} + G(V_{\lfloor T \rfloor}) : \tau_- > V_{\lfloor T \rfloor}].$$

Поскольку функция $-G(t)$ — монотонно невозрастает, то из Теоремы 2 при $g(t) = -G(t)$ немедленно вытекает, что $U_-(T)$ является монотонно неубывающей функцией, которая медленно меняется при $T \to \infty$. А из утверждения (101) леммы 18 следует, что

$$\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > T) \leq C_4 U_-(T) \quad \text{при всех} \quad T > 0.$$

То есть утверждение (8) Теоремы 1 верно при $U_+(T) := C_4 U_-(T)$.

References

[1] A.A. Borovkov, *Compound Renewal Processes*, Russ. Acad. Sci., Moscow, 2020, p. 455.

[2] R. Kutner, J. Masoliver, *The continuous time random walk, still trendy: fifty-year history, state of art and outlook*, Eur. Phys. J. B, **90**:50 (2017). DOI: 10.1140/epjb/e2016-70578-3

[3] D. Denisov, A. Sakhanenko, V. Wachtel, *First-passage times for random walks with nonidentically distributed increments*, Ann. Probab., **46**:6 (2018), 3313–3350. Zbl 1434.60126

[4] R.A. Doney, *Spitzer's condition and the ladder variables in random walks*, Probab. Theory Relat. Fields, **101**:4 (1995), 577–580. Zbl 0818.60060

[5] B. von Bahr, C.-G. Esseen, *Inequalities for the rth absolute moment of a sum of random variables,* $1 \leq r \leq 2$, Ann. Math. Stat., **36**:1 (1965), 299–303. Zbl 0134.36902

[6] P. Erdös, M. Kac, *On certain limit theorems of the theory of probability*, Bull. Am. Math. Soc., **52**:4 (1946), 292–302. Zbl 0063.01274

[7] A.I. Sakhanenko, *Estimates in the invariance principle in terms of truncated power moments*, Sib. Math. J., **47**:6 (2006), 1113–1127. Zbl 1150.60364

[8] A.I. Sakhanenko, *On Borovkov's estimate in the invariance principle*, Sib. Electron. Mat. Izv., **16** (2019), 1776–1784. Zbl 1427.60054

[9] Q. Zhou, A.I. Sakhanenko, J. Guo, *Prokhorov distance with rates of convergence under sublinear expectations*, Teor. Veroyatnost. i Primenen., **65**:4 (2020), 778–804.

[10] D. Denisov, V. Wachtel, *Conditional limit theorems for ordered random walks*, Electron. J. Probab., **15**:11 (2010), 292–322. Zbl 1201.60040

[11] D. Denisov, V. Wachtel, *Random walks in cones*, Ann. Probab., **43**:3 (2015), 992–1044. Zbl 1332.60066

[12] D. Denisov, V. Wachtel, *Exit times for integrated random walks*, Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Stat., **51**:1 (2015), 167–193. Zbl 1310.60049

Alexander Sakhanenko
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: aisakh@mail.ru

Vitali Wachtel
Universität Augsburg,
Institut für Mathematik,
Augsburg, 86135, Germany
Email address: vitali.wachtel@mathematik.uni-augsburg.de

Evgeny Prokopenko
Sobolev Institute of Mathematics,
Acad. Koptyug avenue, 4,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: evgenii.prokopenko@gmail.com

Anastasiya Shelepova
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: nastya.shelepova.99@mail.ru