

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 21–31 (2020)

DOI 10.33048/semi.2020.17.002

УДК 519.615

MSC 65F15

СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ,
СОСТОЯЩЕЙ ИЗ МАТЕРИАЛА КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА И
ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В.В. ШУМИЛОВА

ABSTRACT. The spectrum of one-dimensional natural vibrations is described for a two-phase medium consisting of periodically alternating layers. It is supposed that the first phase is an isotropic Kelvin-Voigt material and the second one is a viscous incompressible fluid. The set of initial approximations to the points of the above spectrum is found. Numerical results illustrating the accuracy of the proposed approximations are presented.

Keywords: spectrum, two-phase medium, natural vibrations, viscous incompressible fluid, Kelvin-Voigt material.

1. ВВЕДЕНИЕ

При математическом моделировании динамического поведения микронеоднородных сред часто используется предположение о периодичности их внутренней структуры. Если в качестве ячейки периодичности таких сред принять куб со стороной, равной ε , то исследование спектров их собственных колебаний сведется к спектральному анализу краевых задач для однородных систем дифференциальных уравнений, коэффициенты которых — ε -периодические функции пространственных переменных. Последнее обстоятельство существенно затрудняет непосредственный численный расчет точек указанных спектров из-за трудности их локализации и выбора начальных приближений к ним. С другой стороны, как известно, динамические характеристики микронеоднородных

SHUMILOVA, V.V., SPECTRUM OF NATURAL VIBRATIONS OF A LAYERED MEDIUM CONSISTING OF A KELVIN-VOIGT MATERIAL AND A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID.

© 2020 Шумилова В.В.

Работа поддержана РФФ (проект 16-11-10343).

Поступила 11 июня 2019 г., опубликована 16 января 2020 г.

сред с ε -периодической структурой и соответствующих им усредненных (эффективных) сред должны быть близки друг к другу при достаточно малых ε . Во многих случаях усредненные среды являются однородными, а значит, поиск точек спектров их собственных колебаний можно свести к спектральному анализу краевых задач для однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Очевидно, что эта задача гораздо более легкая по сравнению с предыдущей. Это наводит на мысль о выборе точек спектров собственных колебаний усредненных сред в качестве начальных приближений к точкам спектров собственных колебаний микронеоднородных сред.

Согласно результатам, изложенным в [1], спектр S_ε собственных колебаний упругого композита с ε -периодической структурой сходится по Хаусдорфу при $\varepsilon \rightarrow 0$ к спектру S собственных колебаний соответствующего ему усредненного материала (более подробно о сходимости по Хаусдорфу спектров операторов при усреднении см. [2], [3]). Это означает, в частности, что при численном поиске точек спектра S_ε в качестве начальных приближений берутся точки спектра S .

В работе [4] было установлено, что спектр S_ε одномерных собственных колебаний, происходящих перпендикулярно ε -периодически чередующимся слоям упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта, сходится по Хаусдорфу при $\varepsilon \rightarrow 0$ к объединению спектра S одномерных собственных колебаний соответствующей усредненной среды и множества, состоящего из одной отрицательной вещественной точки $-\xi_1$. Таким образом, при численном поиске точек спектра S_ε в качестве начальных приближений берутся как точки спектра S , так и точка $-\xi_1$.

В работе [5] были описаны спектры одномерных собственных колебаний, происходящих перпендикулярно периодически чередующимся слоям упругого материала и вязкоупругого материала с памятью, а также усредненной среды, соответствующей такому двухфазному слоистому композиту. С помощью не вещественных точек усредненного спектра были вычислены собственные частоты колебаний и их коэффициенты затухания для трех образцов многослойного композита.

В данной работе исследуется спектр S_ε одномерных собственных колебаний, происходящих перпендикулярно ε -периодически чередующимся слоям вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта и вязкой несжимаемой жидкости. Доказывается, что предел спектра S_ε по Хаусдорфу совпадает со спектром одномерных собственных колебаний усредненной среды, который состоит из корней квадратных уравнений.

2. ИСХОДНАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Пусть $\Omega = (0, L) \times \mathbb{R}^2$ — полоса в пространстве \mathbb{R}^3 , заполненная периодически повторяющимися слоями изотропного вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта и вязкой несжимаемой жидкости. Предполагается, что слои параллельны плоскости Ox_2x_3 , а периодом слоистой среды в Ω является полоса $Y_\varepsilon = (0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^2$, содержащая два “вязкоупругих” слоя одинаковой толщины $\varepsilon(1-h)/2$ и один “жидкий” слой толщины εh , где $0 < \varepsilon \ll L$, $0 < h < 1$ (рис. 1). Для определенности мы будем считать, что число периодов $M = L/\varepsilon$ — целое. Это означает, в частности, что слоистая среда состоит из $M + 1$ вязкоупругих и M жидких слоев. Далее, обозначим через $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ объединение всех

вязкоупругих и жидких слоев соответственно, так что

$$\Omega_{s\varepsilon} = I_{s\varepsilon} \times \mathbb{R}^2, \quad s = 1, 2; \quad I_{1\varepsilon} = (0, L) \setminus \bar{I}_{2\varepsilon}, \quad I_{2\varepsilon} = \bigcup_{m=0}^{M-1} I_{2\varepsilon}^m,$$

$$I_{2\varepsilon}^m = (\varepsilon h_1 + \varepsilon m, \varepsilon h_2 + \varepsilon m), \quad h_1 = (1 - h)/2, \quad h_2 = (1 + h)/2.$$

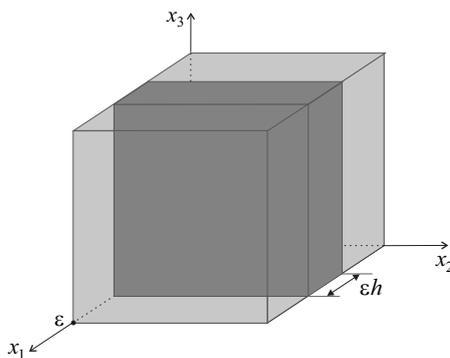


Рис. 1. Модель слоистой среды

Математическая модель, описывающая колебания двухфазной слоистой среды в полосе Ω , имеет вид [6]

$$(1) \quad \rho_s \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i(x, t), \quad x \in \Omega_{s\varepsilon}, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad s = 1, 2,$$

$$(2) \quad \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega_{2\varepsilon}; \quad [\mathbf{u}^\varepsilon]_{S_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma_{i1}^\varepsilon]_{S_\varepsilon} = 0,$$

$$(3) \quad \mathbf{u}^\varepsilon|_{x_1=0} = \mathbf{u}^\varepsilon|_{x_1=L} = 0, \quad \mathbf{u}^\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t}|_{t=0} = 0,$$

где $\rho_s = \text{const} > 0$ — плотность среды в $\Omega_{s\varepsilon}$, $\mathbf{u}^\varepsilon(x, t)$ — вектор перемещений, $f_i(x, t)$ — компоненты вектора объемной силы $\mathbf{f}(x, t)$, квадратные скобки $[\cdot]_{S_\varepsilon}$ обозначают скачок заключенной в них величины при переходе через границы слоев $S_\varepsilon = \partial\Omega_{1\varepsilon} \cap \partial\Omega_{2\varepsilon}$, σ^ε — тензор напряжений:

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \begin{cases} a_{ijkh} e_{kh}(\mathbf{u}^\varepsilon) + b_{ijkh} e_{kh} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right), & x \in \Omega_{1\varepsilon}, \\ -p^\varepsilon \delta_{ij} + 2\eta_2 \delta_{ik} \delta_{jh} e_{kh} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right), & x \in \Omega_{2\varepsilon}. \end{cases}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, $p^\varepsilon(x, t)$ — давление в жидкости, η_2 — коэффициент вязкости жидкости, $e(u^\varepsilon)$ — тензор малых деформаций,

$$e_{kh}(\mathbf{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h^\varepsilon}{\partial x_k} \right), \quad 1 \leq k, h \leq 3,$$

$$a_{ijkh} = \lambda_1 \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu_1 (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}),$$

$$b_{ijkh} = \zeta_1 \delta_{ij} \delta_{kh} + \eta_1 (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}),$$

где λ_1 и μ_1 — параметры Ламе, а ζ_1 и η_1 — коэффициенты вязкости материала Кельвина-Фойгта.

3. СПЕКТР ОДНОМЕРНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХФАЗНОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим одномерные колебания, распространяющиеся перпендикулярно слоям, т.е. вдоль оси Ox_1 . Для таких колебаний $\mathbf{f}(x, t) = (f(x_1, t), 0, 0)$, $\mathbf{u}^\varepsilon(x, t) = (u^\varepsilon(x_1, t), 0, 0)$, $p(x, t) = p(x_1, t)$ и задача (1)-(3) записывается в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} &= a_1 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1^2} + b_1 \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x_1^2 \partial t} + f(x_1, t), \quad x_1 \in I_{1\varepsilon}, \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} &= -\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_1} + f(x_1, t), \quad \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1 \partial t} = 0, \quad x_1 \in I_{2\varepsilon}, \\ \left(a_1 \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} + b_1 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1 \partial t} \right) \Big|_{x_1=\varepsilon(h_1+m)-0} &= -p^\varepsilon(\varepsilon(h_1+m) + 0, t), \\ \left(a_1 \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} + b_1 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1 \partial t} \right) \Big|_{x_1=\varepsilon(h_2+m)+0} &= -p^\varepsilon(\varepsilon(h_2+m) - 0, t), \\ [u^\varepsilon]_{x_1=\varepsilon(h_j+m)} &= 0, \quad j = 1, 2, \\ u^\varepsilon(0, t) = u^\varepsilon(L, t) = 0, \quad u^\varepsilon(x_1, 0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x_1, 0) = 0, \end{aligned}$$

где $a_1 = a_{1111} = \lambda_1 + 2\mu_1$, $b_1 = b_{1111} = \zeta_1 + 2\eta_1$.

Применим преобразование Лапласа $u^\varepsilon(x_1, t) \rightarrow u_\lambda^\varepsilon(x_1)$, $p^\varepsilon(x_1, t) \rightarrow p_\lambda^\varepsilon(x_1)$. Тогда последняя задача, записанная в изображениях Лапласа при $f(x_1, t) \equiv 0$, примет вид

$$(4) \quad \rho_1 \lambda^2 u_\lambda^\varepsilon = (a_1 + b_1 \lambda) \frac{\partial^2 u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1^2}, \quad x_1 \in I_{1\varepsilon},$$

$$(5) \quad \rho_2 \lambda^2 u_\lambda^\varepsilon = -\frac{\partial p_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 \in I_{2\varepsilon},$$

$$(6) \quad (a_1 + b_1 \lambda) \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\varepsilon(h_1+m)-0} = -p_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(h_1+m) + 0),$$

$$(7) \quad (a_1 + b_1 \lambda) \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\varepsilon(h_2+m)+0} = -p_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(h_2+m) - 0),$$

$$(8) \quad [u_\lambda^\varepsilon]_{x_1=\varepsilon(h_j+m)} = 0, \quad j = 1, 2, \quad m = 0, \dots, M-1; \quad u_\lambda^\varepsilon(0) = u_\lambda^\varepsilon(L) = 0.$$

В дальнейшем под спектром одномерных собственных колебаний слоистой среды вдоль оси Ox_1 понимается множество собственных значений задачи (4)-(8), т.е. множество S_ε всех значений $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых она имеет нетривиальные решения $u_\lambda^\varepsilon(x_1)$ и $p_\lambda^\varepsilon(x_1)$.

Для того, чтобы найти элементы множества S_ε , зафиксируем неотрицательное целое число $m < M$ и рассмотрим интервал $I_\varepsilon^m = (\varepsilon m, \varepsilon(m+1))$. Выпишем решения дифференциального уравнения (4) при $x_1 \in I_{1\varepsilon}^m = (\varepsilon m, \varepsilon h_1 + \varepsilon m) \subset I_\varepsilon^m$ и $x_1 \in I_{3\varepsilon}^m = (\varepsilon h_2 + \varepsilon m, \varepsilon(m+1)) \subset I_\varepsilon^m$. Имеем

$$\begin{aligned} u_\lambda^\varepsilon(x_1) &= \frac{e^{-A_\lambda(x_1 - \varepsilon m)}}{2A_\lambda} \left(A_\lambda u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon m + 0) - \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon m + 0) \right) + \\ &+ \frac{e^{A_\lambda(x_1 - \varepsilon m)}}{2A_\lambda} \left(A_\lambda u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon m + 0) + \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon m + 0) \right), \quad x_1 \in I_{1\varepsilon}^m, \end{aligned}$$

$$u_\lambda^\varepsilon(x_1) = \frac{e^{-A_\lambda(x_1 - \varepsilon h_2 - \varepsilon m)}}{2A_\lambda} \left(A_\lambda u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_2 + \varepsilon m + 0) - \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon h_2 + \varepsilon m + 0) \right) + \frac{e^{A_\lambda(x_1 - \varepsilon h_2 - \varepsilon m)}}{2A_\lambda} \left(A_\lambda u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_2 + \varepsilon m + 0) + \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon h_2 + \varepsilon m + 0) \right), \quad x_1 \in I_{3\varepsilon}^m,$$

где

$$A_\lambda = \lambda \sqrt{\frac{\rho_1}{B_\lambda}}, \quad B_\lambda = a_1 + b_1 \lambda.$$

Отсюда следует, в частности, что

$$\begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_1 + \varepsilon m - 0) \\ B_\lambda \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon h_1 + \varepsilon m - 0) \end{pmatrix} = P_\lambda^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon m + 0) \\ B_\lambda \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon m + 0) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(m+1) - 0) \\ B_\lambda \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(m+1) - 0) \end{pmatrix} = P_\lambda^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_2 + \varepsilon m + 0) \\ B_\lambda \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon h_2 + \varepsilon m + 0) \end{pmatrix},$$

где P_λ^ε — квадратная матрица 2-го порядка, элементы которой имеют вид

$$(P_\lambda^\varepsilon)_{11} = (P_\lambda^\varepsilon)_{22} = \cosh(A_\lambda \varepsilon h_1),$$

$$(P_\lambda^\varepsilon)_{12} = \frac{\sinh(A_\lambda \varepsilon h_1)}{A_\lambda B_\lambda}, \quad (P_\lambda^\varepsilon)_{21} = A_\lambda B_\lambda \sinh(A_\lambda \varepsilon h_1).$$

Учитывая граничные условия (6) и (7), мы можем переписать последние два матричных равенства в следующем виде:

$$(9) \quad \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_1 + \varepsilon m + 0) \\ -p_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_1 + \varepsilon m + 0) \end{pmatrix} = P_\lambda^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon m + 0) \\ B_\lambda \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon m + 0) \end{pmatrix},$$

$$(10) \quad \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(m+1) - 0) \\ B_\lambda \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(m+1) - 0) \end{pmatrix} = P_\lambda^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_2 + \varepsilon m - 0) \\ -p_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_2 + \varepsilon m - 0) \end{pmatrix}.$$

Далее, найдем решения $u_\lambda^\varepsilon(x_1)$ и $p_\lambda^\varepsilon(x_1)$ уравнений (5) при $x_1 \in I_{2\varepsilon}^m \subset I_\varepsilon^m$. Легко видеть, что функция $u_\lambda^\varepsilon(x_1)$ не зависит от переменной x_1 , т.е. $u_\lambda^\varepsilon(x_1) = C_\lambda^\varepsilon$ при $x_1 \in I_{2\varepsilon}^m$. При этом функция $p_\lambda^\varepsilon(x_1)$ имеет вид

$$p_\lambda^\varepsilon(x_1) = -\rho_2 \lambda^2 C_\lambda^\varepsilon x_1 + p_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_1 + \varepsilon m + 0) + (\varepsilon h_1 + \varepsilon m + 0) \rho_2 \lambda^2 C_\lambda^\varepsilon.$$

Следовательно,

$$u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_2 + \varepsilon m - 0) = u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_1 + \varepsilon m + 0) = C_\lambda^\varepsilon,$$

$$p_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_2 + \varepsilon m - 0) = p_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_1 + \varepsilon m + 0) - \rho_2 \lambda^2 \varepsilon h C_\lambda^\varepsilon,$$

поэтому

$$(11) \quad \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_2 + \varepsilon m - 0) \\ -p_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_2 + \varepsilon m - 0) \end{pmatrix} = Q_\lambda^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_1 + \varepsilon m + 0) \\ -p_\lambda^\varepsilon(\varepsilon h_1 + \varepsilon m + 0) \end{pmatrix},$$

где

$$Q_\lambda^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho_2 \lambda^2 \varepsilon h & 1 \end{pmatrix}.$$

Из (10)-(11) заключаем, что

$$(12) \quad \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(m+1) - 0) \\ B_\lambda \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(m+1) - 0) \end{pmatrix} = W_\lambda^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon m + 0) \\ B_\lambda \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon m + 0) \end{pmatrix},$$

где $W_\lambda^\varepsilon = P_\lambda^\varepsilon Q_\lambda^\varepsilon P_\lambda^\varepsilon$. Вычисляя элементы матрицы W_λ^ε , находим

$$\begin{aligned} (W_\lambda^\varepsilon)_{11} &= (W_\lambda^\varepsilon)_{22} = \cosh(2A_\lambda \varepsilon h_1) + \frac{\rho_2 \lambda^2 \varepsilon h \sinh(2A_\lambda \varepsilon h_1)}{2A_\lambda B_\lambda}, \\ (W_\lambda^\varepsilon)_{12} &= \frac{\sinh(2A_\lambda \varepsilon h_1)}{A_\lambda B_\lambda} + \frac{\rho_2 \lambda^2 \varepsilon h (\cosh(2A_\lambda \varepsilon h_1) - 1)}{2A_\lambda^2 B_\lambda^2}, \\ (W_\lambda^\varepsilon)_{21} &= A_\lambda B_\lambda \sinh(2A_\lambda \varepsilon h_1) + \frac{1}{2} \rho_2 \lambda^2 \varepsilon h (\cosh(2A_\lambda \varepsilon h_1) + 1). \end{aligned}$$

Так как соотношение (12) справедливо для любого фиксированного целого m ($0 \leq m \leq M-1$), а элементы матрицы W_λ^ε не зависят от m , то

$$\begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(M\varepsilon) \\ B_\lambda \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(M\varepsilon) \end{pmatrix} = (W_\lambda^\varepsilon)^M \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(0) \\ B_\lambda \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(0) \end{pmatrix},$$

откуда в силу граничных условий (8) получаем

$$(13) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ B_\lambda \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(L) \end{pmatrix} = (W_\lambda^\varepsilon)^M \begin{pmatrix} 0 \\ B_\lambda \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(0) \end{pmatrix}.$$

Из (13) мы видим, что точками множества S_ε являются те значения λ , при которых элемент $(W_\lambda^\varepsilon)_{12}^M$ матрицы $(W_\lambda^\varepsilon)^M$ равен нулю. Принимая во внимание, что $\det W_\lambda^\varepsilon = 1$, мы можем выразить $(W_\lambda^\varepsilon)_{12}^M$ через элементы матрицы W_λ^ε следующим образом:

$$(W_\lambda^\varepsilon)_{12}^M = (W_\lambda^\varepsilon)_{12} \sum_{j=1}^Q (-1)^{j-1} C_{M-j}^{j-1} (\operatorname{tr} W_\lambda^\varepsilon)^{M+1-2j},$$

где $Q = M/2$ при четном M и $Q = (M+1)/2$ при нечетном M , а C_{M-j}^{j-1} — биномиальные коэффициенты. Следовательно, множество S_ε состоит из корней уравнений

$$(W_\lambda^\varepsilon)_{12} = 0$$

и

$$\sum_{j=1}^Q (-1)^{j-1} C_{M-j}^{j-1} (\operatorname{tr} W_\lambda^\varepsilon)^{M+1-2j} = 0.$$

Используя результаты работы [4], можно показать, что второе из этих уравнений, в свою очередь, разбивается на $M-1$ уравнений

$$\operatorname{tr} W_\lambda^\varepsilon = 2 \cos \frac{\pi k}{M}, \quad k = 1, \dots, M-1.$$

После подстановки ранее выписанных формул для элементов матрицы W_λ^ε заключаем, что спектр S_ε состоит из всех корней следующих M трансцендентных уравнений:

$$(14) \quad \frac{1}{\lambda} \sinh(2A_\lambda h_1 \varepsilon) + \frac{\rho_2 h \varepsilon (\cosh(2A_\lambda h_1 \varepsilon) - 1)}{2\sqrt{\rho_1 B_\lambda}} = 0,$$

$$(15) \quad \cosh(2A_\lambda h_1 \varepsilon) + \frac{\rho_2 \lambda h \varepsilon \sinh(2A_\lambda h_1 \varepsilon)}{2\sqrt{\rho_1 B_\lambda}} = \cos \frac{\pi k}{M},$$

$$k = 1, \dots, M-1.$$

Таким образом, если слоистая среда в полосе $0 < x_1 < L$ состоит из M одинаковых частей (периодов), то для нахождения всех точек ее спектра S_ε одномерных собственных колебаний вдоль оси Ox_1 требуется решить M трансцендентных уравнений (14), (15).

4. НАЧАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ К ТОЧКАМ СПЕКТРА

Точки спектра S_ε , т.е. корни уравнений (14), (15) можно найти только численно, например, с помощью принципа аргумента, хорошо известного в теории функций комплексного переменного. Разумеется, для этого требуется выбрать достаточно хорошие начальные приближения. Следует отметить, что обычно начальные приближения определяются с помощью непосредственного анализа и локализации вещественных и мнимых частей корней искомых уравнений. Однако в данном случае это не представляется возможным, что приводит к необходимости поиска иного способа их выбора. Для многослойной среды, рассматриваемой в данной работе, наиболее естественными “кандидатами” на роль начальных приближений выглядят конечные пределы последовательностей корней уравнений (14), (15) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Проверим, удовлетворяют ли они для этого необходимым критериям.

Для того, чтобы найти конечные пределы последовательностей корней $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ уравнения (14), воспользуемся разложениями

$$(16) \quad \cosh(2A_\lambda h_1 \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2A_\lambda h_1 \varepsilon)^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh(2A_\lambda h_1 \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2A_\lambda h_1 \varepsilon)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

После подстановки (16) в (14) и последующего деления на ε получаем

$$\frac{2A_\lambda h_1}{\lambda} + \varepsilon^2 H_{1\lambda}^\varepsilon = 0,$$

где

$$H_{1\lambda}^\varepsilon = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n(A_\lambda h_1)^{2n-1}}{\lambda} + \frac{\rho_2 h \varepsilon^2 (A_\lambda h_1)^{2n}}{\sqrt{\rho_1 B_\lambda}} \right) \frac{2^{2n-1} \varepsilon^{2n-4}}{(2n)!}.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$2\sqrt{\frac{\rho_1}{B_\lambda}} + \varepsilon^2 H_{1\lambda}^\varepsilon = 0$$

и перейдем в нем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, считая, что последовательность $\lambda(\varepsilon)$ ограничена и $\lambda(\varepsilon) \rightarrow \lambda_1$. Тогда λ_1 есть корень уравнения

$$\sqrt{\frac{\rho_1}{a_1 + b_1 \lambda}} = 0,$$

что невозможно. Это означает, что не существует конечных пределов последовательностей корней уравнений (14).

Перейдем к нахождению конечных пределов последовательностей корней $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ уравнений (15). После подстановки

$$\cos \frac{\pi k}{M} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\varepsilon \pi k}{L} \right)^{2n}$$

и разложений (16) в уравнения (15), а затем последующего деления на ε^2 получаем

$$2A_\lambda^2 h_1^2 + \frac{\rho_2 \lambda A_\lambda h_1 h}{\sqrt{\rho_1 B_\lambda}} + \frac{\pi^2 k^2}{2L^2} + \varepsilon^2 H_{2\lambda}^\varepsilon = 0, \quad k = 1, \dots, M-1,$$

где

$$H_{2\lambda}^\varepsilon = \sum_{n=2}^{\infty} \left((2A_\lambda h_1)^{2n} + \frac{\rho_2 n \lambda h (2A_\lambda h_1)^{2n-1}}{\sqrt{\rho_1 B_\lambda}} + (-1)^{n-1} \left(\frac{\pi k}{L} \right)^{2n} \right) \frac{\varepsilon^{2n-4}}{(2n)!}.$$

Теперь при фиксированном k перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, считая, что последовательность корней $\lambda_k(\varepsilon)$ ограничена и $\lambda_k(\varepsilon) \rightarrow \lambda_k$. Тогда λ_k есть корень уравнения

$$2A_\lambda^2 h_1^2 + \frac{\rho_2 \lambda A_\lambda h_1 h}{\sqrt{\rho_1 B_\lambda}} + \frac{\pi^2 k^2}{2L^2} = 0,$$

которое после преобразований записывается в виде

$$\frac{\lambda^2(1-h)(\rho_1(1-h) + \rho_2 h)}{a_1 + b_1 \lambda} + \frac{\pi^2 k^2}{L^2} = 0.$$

Если обозначить

$$\rho_0 = \rho_1(1-h) + \rho_2 h,$$

то последнее уравнение равносильно квадратному уравнению

$$(17) \quad \lambda^2 + \frac{\pi^2 k^2 b_1}{\rho_0 L^2 (1-h)} \lambda + \frac{\pi^2 k^2 a_1}{\rho_0 L^2 (1-h)} = 0.$$

Таким образом, конечными пределами последовательностей корней k -го уравнения (15) являются

$$\lambda_{1k,2k} = \frac{\pi^2 k^2 b_1}{2\rho_0 L^2 (1-h)} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a_1 \rho_0 L^2 (1-h)}{\pi^2 k^2 b_1^2}} \right).$$

Заметим, что из теоремы Руше следует обратное утверждение: при любом фиксированном k найдутся последовательности $\lambda_{1k}(\varepsilon)$ и $\lambda_{2k}(\varepsilon)$ корней k -го уравнения (15) такие, что $\lambda_{1k}(\varepsilon) \rightarrow \lambda_{1k}$ и $\lambda_{2k}(\varepsilon) \rightarrow \lambda_{2k}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Интересно отметить, что объединение двух последовательностей $\{\lambda_{1k}\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_{2k}\}_{k=1}^\infty$ представляет собой не что иное, как спектр S одномерных собственных колебаний вдоль оси Ox_1 усредненной среды, соответствующей исходной слоистой среде [6]. Благодаря явным формулам для элементов этих последовательностей можно описать структуру “усредненного” спектра S : если обозначить

$$k_1 = \max \left\{ k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k < \frac{2L}{\pi b_1} \sqrt{a_1 \rho_0 (1-h)} \right\},$$

то он состоит из k_1 пар комплексно-сопряженных собственных значений и бесконечного числа вещественных собственных значений. В частности, если $k_1 = 0$, то спектр S — полностью вещественный. Кроме того, как легко проверить,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{1k} = -\frac{a_1}{b_1}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_{2k}}{k^2} = -\frac{\pi^2 b_1}{\rho_0 L^2 (1-h)}.$$

Согласно полученным результатам спектр S_ε сходится по Хаусдорфу к усредненному спектру S при $\varepsilon \rightarrow 0$. С практической точки зрения это означает, что при численном поиске точек спектра S_ε в качестве их начальных

приближений следует брать точки усредненного спектра S . Эти приближения тем точнее, чем меньше величина периода ε или, что то же самое, чем большее число слоев содержит среда, занимающая полосу $0 < x_1 < L$.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Перейдем к расчету точек спектра одномерных собственных колебаний для двух образцов слоистой среды, занимающих полосу $0 < x_1 < L$ при $L = 0.5$ м и отличающихся друг от друга только числом и толщиной слоев. Для первого образца принимаем $M = 5$, $\varepsilon = 0.1$ м, а для второго — $M = 10$, $\varepsilon = 0.05$ м. Остальные их числовые характеристики берем следующие: $h = 0.1$, $\rho_1 = 2000$ кг/м³, $\rho_2 = 1000$ кг/м³, $\lambda_1 = 2 \cdot 10^8$ Па, $\mu_1 = 1.4 \cdot 10^8$ Па, $\zeta_1 = 5 \cdot 10^4$ Па·с, $\eta_1 = 3 \cdot 10^4$ Па·с. Отметим, что здесь мы не привели вязкость μ_2 жидкости, поскольку она не входит в уравнения (14), (15) и, следовательно, не влияет на значения точек спектра S_ε .

Для нахождения начальных приближений к точкам спектра S_ε решаем квадратное уравнение (17) при $k = 1, 2, 3, 4$. Вычисления показывают, что при $k = 1, 2$ оно имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1k,2k} = -d_k \pm i\omega_k$, а при $k = 3, 4$ — отрицательные вещественные корни λ_{1k} и λ_{2k} (см. таблицу 1, в которой приведены результаты расчетов с точностью до 0.01 с⁻¹).

	$d_k, \text{с}^{-1}$	$\omega_k, \text{с}^{-1}$	$\lambda_{1(k+2)}, \text{с}^{-1}$	$\lambda_{2(k+2)}, \text{с}^{-1}$
$k = 1$	1269.77	3077.23	-16983.45	-5872.48
$k = 2$	5079.09	4304.58	-35660.72	-4972.04

ТАБЛИЦА 1. Результаты расчета корней $\lambda_{1k,2k} = -d_k \pm i\omega_k$ ($k = 1, 2$) и $\lambda_{1k,2k}$ ($k = 3, 4$) уравнений (17)

Для того, чтобы найти корни трансцендентных уравнений (15), опишем вокруг точек λ_{sk} комплексной плоскости эллипсы E_{sk} с центрами в этих точках. Используя принцип аргумента и численные расчеты, мы можем подобрать длины полуосей эллипсов E_{sk} таким образом, что внутри каждого из них функция

$$F_k^{(M)}(\lambda) = \cosh(2A_\lambda h_1 \varepsilon) + \frac{\rho_2 \lambda h \varepsilon \sinh(2A_\lambda h_1 \varepsilon)}{2\sqrt{\rho_1 B_\lambda}} - \cos \frac{\pi k}{M}$$

имеет в точности один корень $\lambda_{sk}^{(M)}$. С помощью такой начальной локализации нулей функции $F_k^{(M)}(\lambda)$, сдвига центров эллипсов и постепенного уменьшения длин их полуосей мы можем найти корни уравнений (15) с требуемой степенью точности (в нашем случае — с точностью до 0.01 с⁻¹).

В таблице 2 выписаны значения $d_k^{(M)}$ и $\omega_k^{(M)}$ корней $\lambda_{1k,2k}^{(M)} = -d_k^{(M)} \pm i\omega_k^{(M)}$ уравнения (15) при $k = 1, 2$, а в таблице 3 — взятые с противоположным знаком корни $\lambda_{1k,2k}$ этого же уравнения при $k = 3, 4$.

Для представления о степени близости точек спектров слоистой и усредненной сред, т.е. корней уравнений (15) и (17), в таблицах 2 и 3 также приведены относительные погрешности

$$\Delta d_k^{(M)} = \frac{|d_k^{(M)} - d_k|}{d_k^{(M)}}, \quad \Delta \omega_k^{(M)} = \frac{|\omega_k^{(M)} - \omega_k|}{\omega_k^{(M)}}, \quad k = 1, 2,$$

$$\Delta\lambda_{sk}^{(M)} = \frac{|\lambda_{sk}^{(M)} - \lambda_{sk}|}{|\lambda_k^{(M)}|}, \quad s = 1, 2; \quad k = 3, 4$$

значений $d_{1,2}$, $\omega_{1,2}$, $\lambda_{13,23}$, $\lambda_{14,24}$, принимаемых в качестве приближенных значений $d_{1,2}^{(M)}$, $\omega_{1,2}^{(M)}$, $\lambda_{13,23}^{(M)}$, $\lambda_{14,24}^{(M)}$ соответственно.

	$d_k^{(M)} (c^{-1}), \Delta d_k^{(M)} (\%)$		$\omega_k^{(M)} (c^{-1}), \Delta\omega_k^{(M)} (\%)$	
	$M = 5$	$M = 10$	$M = 5$	$M = 10$
$k = 1$	1269.65, 0.009	1269.74, 0.002	3077.11, 0.004	3077.20, 0.001
$k = 2$	5077.00, 0.041	5078.62, 0.009	4304.93, 0.008	4304.66, 0.002

ТАБЛИЦА 2. Результаты расчета корней $\lambda_{1k,2k}^{(M)} = -d_k^{(M)} \pm i\omega_k^{(M)}$ уравнения (15) и погрешностей $\Delta d_k^{(M)}$, $\Delta\omega_k^{(M)}$ при $k = 1, 2$

	$-\lambda_{1k}^{(M)} (c^{-1}), \Delta\lambda_{1k}^{(M)} (\%)$		$-\lambda_{2k}^{(M)} (c^{-1}), \Delta\lambda_{2k}^{(M)} (\%)$	
	$M = 5$	$M = 10$	$M = 5$	$M = 10$
$k = 3$	16954.11, 0.173	16977.76, 0.034	5876.00, 0.060	5873.16, 0.012
$k = 4$	35530.12, 0.368	35643.65, 0.048	4974.59, 0.051	4972.37, 0.007

ТАБЛИЦА 3. Результаты расчета корней $\lambda_{1k,2k}^{(M)}$ уравнения (15) и погрешностей $\Delta\lambda_{1k,2k}^{(M)}$ при $k = 3, 4$

Проведенное численное исследование показало, что при фиксированном k точность приближенных значений $\lambda_{1k,2k}$ довольно быстро увеличивается с увеличением числа M или, что то же самое, с уменьшением величины периода ε . В то же время интересно отметить, что при $k = 1, 2, 3, 4$ она довольно высока даже для среды, состоящей всего из 5 периодов, т.е. из 6 вязкоупругих и 5 жидких слоев.

REFERENCES

- [1] O.A. Oleinik, A.S. Shamaev, G.A. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North-Holland, Amsterdam, 1992. Zbl 0768.73003
- [2] V.V. Zhikov, *On an extension of the method of two-scale convergence and its applications*, Sbornik:Mathematics, **191**:7 (2000), 973–1014. Zbl 0969.35048
- [3] V.V. Zhikov, *On spectrum gaps of some divergent elliptic operators with periodic coefficients*, St. Petersburg Math. J., **16**:5 (2004), 773–790. Zbl 1174.35458
- [4] A.S. Shamaev, V.V. Shumilova, *Asymptotic behavior of the spectrum of one-dimensional vibrations in a layered medium consisting of elastic and Kelvin-Voigt viscoelastic materials*, Proc. Steklov Inst. Math., **295** (2016), 202–212. Zbl 1383.74037
- [5] A.S. Shamaev, V.V. Shumilova, *Calculation of natural frequencies and damping coefficients of a multi-layered composite using homogenization theory*, IFAC PapersOnLine, **51**:2 (2018), 126–131.
- [6] V.V. Shumilova, *Spectrum of one-dimensional vibrations of a layered medium consisting of a Kelvin-Voigt material and a viscous incompressible fluid*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **6**:3 (2013), 349–356.

VLADLENA VALERIEVNA SHUMILOVA
ISHLINSKY INSTITUTE FOR PROBLEMS IN MECHANICS RAS,
101-1, VERNADSKOGO AVE.,
MOSCOW, 119526, RUSSIA
E-mail address: v.v.shumilova@mail.ru