S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, стр. 27–42 (2021) УДК 519.17
DOI 10.33048/semi.2021.18.003 MSC 05C25

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ГРАФОВ: ГРАФЫ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

А.А. МАХНЕВ, И.Н. БЕЛОУСОВ, Д.В. ПАДУЧИХ

Abstract. Graph Γ_i for a distance-regular graph Γ of diameter 3 can be strongly regular for $i = 2$ or $i = 3$. Finding intersection array of graph Γ by the parameters of Γ_i is an inverse problem. Earlier direct and inverse problems have been solved by A.A. Makhnev, M.S. Nirova for $i = 3$ and by A.A. Makhnev and D.V. Paduchikh for $i = 2$. In this work it is consider the case when graph Γ_3 is strongly regular without triangles and $v \leq 100000$.

Keywords: distance regular graph, strongly regular graph without triangles.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Множество вершин графа Γ будем обозначать $V(\Gamma)$, а через $\bar{\Gamma}$ обозначим дополнение графа Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении

Makhnev, A.A., Belousov, I.N., Paduchikh, D.V., Inverse problems of graph theory: graphs without triangles.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 20-51-53013.

Поступила 2 марта 2020 г., опубликована 21 января 2021 г.

$\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным* с массивом пересечений $\{b_0,...,b_{d-1};c_1,...,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависит от выбора вершин u,w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i=k-b_i-c_i$ и $k_i=|\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x)\cap\Gamma_j(y)$ для вершин x,y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе Γ числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x,y, обозначаются p^l_{ij} и называются *числами пересечений* графа Γ (см. [1]). *Графом Тэйлора* называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k,\mu,1;1,\mu,k\}$. *Сильно регулярным* графом с параметрами (v,k,λ,μ) называется регулярный граф степени k на v вершинах, в котором для двух различных вершин a,b выполнено

$$|V([a]\cap[b])|=\begin{cases}\lambda, & \text{при } a\in[b],\\ \mu, & \text{при } a\notin[b].\end{cases}$$

Очевидно, что сильно регулярный граф с $\mu\neq 0$ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{k,k-\lambda-1;1,\mu\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i,j\in\{1,2,3,...,d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u,w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w)=i$. Граф $\Gamma_{i,j}$ определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u,w смежны в $\Gamma_{i,j}$ тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w)\in\{i,j\}$.

Алгеброй Бозе-Меснера M дистанционно регулярного графа Γ с собственными значениями $\theta_0>\theta_1>\dots>\theta_d$ называется вещественная матричная алгебра с базисом $\{A_i\,|\,i=0,\dots,D\}$, где A_i — матрица смежности графа Γ_i при $i\in\{1,\dots,10\}$ и A_0 — единичная матрица порядка $|V(\Gamma)|$. Алгебра M имеет и другой базис, состоящий из примитивных идемпотентов $\{E_0=\frac{1}{v}J,E_1,\dots,E_D\}$, где $v=|V(\Gamma)|$ и E_i — ортогональная проекция на собственное подпространство отвечающее собственному значению θ_i. Матрица перехода P от базиса $(A_0,A_1,\dots,A_D)$ к базису $(E_0,E_1,\dots,E_D\}$ называется *матрицей собственных значений* графа Γ. Дистанционно регулярный граф называется *формально самодуальным*, если для его матрицы собственных значений выполняется равенство $P^2=|V(\Gamma)|A_0$.

Относительно покомпонентного умножения $\circ$ выполняются равенства $E_i\circ E_j=\frac{1}{v}\sum_{i=0}^D q^k_{ij}E_k$. Числа q^k_{ij} называются *параметрами Крейна* и являются неотрицательными числами [1, теорема 2.3.2]. Граф Γ называется *Q-полиномиальным*, если существует упорядочение примитивных идемпотентов $E_0=\frac{1}{v}J,E_1,\dots,E_D$, такое, что $q^k_{ij}=0$ при $|j-k|>1$.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$).

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v=(s+1)(1+st/\alpha)$,

$k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1) + (\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$.

Прямой задачей в теории дистанционно регулярных графов является нахождение параметров симметричной структуры, отвечающей графу с данным массивом пересечений, по этому массиву. Обратной задачей является восстановление массива пересечений дистанционно регулярного графа по параметрам отвечающей ему симметричной структуры.

Например, в графе Тэйлора, содержащем треугольник, окрестность каждой вершины является сильно регулярным графом с $k = 2\mu$. Обратно, данному сильно регулярному графу Δ с параметрами (v,k,λ,μ) и $k = 2\mu$ отвечает граф Тэйлора с массивом пересечений $\{v, v-k-1, 1; 1, v-k-1, v\}$, в котором окрестность некоторой вершины изоморфна Δ. В этом случае прямая и обратная задачи имеют решение.

Обратная задача для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с сильно регулярным графом Γ_3 решалась в [3]. Заметим, что в этом случае Γ имеет собственное значение равное -1 [1, предложение 4.2.17]. В [3, лемма 3] показано, что в дистанционно регулярном графе Γ диаметра 3 с собственным значением -1 граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(b_0, b_1/c_2)$. Обратно для графа $\bar\Gamma_3$, являющегося псевдогеометрическим для $pG_\alpha(b_0,t)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{b_0, tc_2, b_0-\alpha+1; 1, c_2, \alpha\}$.

В настоящей работе обратная задача теории графов уточняется для графа Γ с сильно регулярным графом Γ_3, не имеющем треугольников.

Предложение 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и граф Γ_3 является сильно регулярным графом без треугольников. Тогда Γ_3 — граф с параметрами $(v,k,0,\mu)$, неглавными собственными значениями r, $-(\mu+r)$, причем $k = (r+1)\mu + r^2$, $r \neq 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2 r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$.*

Основной результат статьи

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников с параметрами $(v, (r+1)\mu+r^2, 0, \mu)$, $v \le 100000$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) если $\mu = 1$ или $\mu = 4$, то граф не существует;

(2) если $\mu = 2$, то Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$;

(3) если $\mu = 6$, то Γ имеет массив пересечений $\{143, 126, 12; 1, 21, 132\}$, $\{415, 390, 16; 1, 39, 400\}$, $\{1253, 1216, 22; 1, 76, 1232\}$, $\{1924, 1881, 25; 1, 99, 1900\}$, $\{3509, 3024, 30; 1, 126, 3480\}$, $\{3509, 3456, 30; 1, 144, 3480\}$.

(4) если $\mu \notin \{1,2,4,6\}$, то Γ имеет массив пересечений из таблицы 1.

В ходе доказательства теоремы 1 возникла идея описать графы, удовлетворяющие ее условиям и имеющие нецелое собственное значение.

Теорема 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с нецелым собственным значением и Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$ (спектр 111^1, $(1+2\sqrt{55})^{145}, -1^{407}, (1-2\sqrt{55})^{145}$), $\{230, 196, 21; 1, 28, 210\}$ (спектр 230^1,*

Таблица 1. Дистанционно регулярные графы Γ с сильно регулярным Γ_3 без треугольников с $\mu \notin \{1,2,4,6\}$ и числом вершин не большим 100000

(μ, r, c_2)	срг	дрг
$(15,6,27)$	$(1458,141,0,15)$	$\{188,162,21;1,27,168\}$
$(14,7,28)$	$(2002,161,0,14)$	$\{230,196,21;1,28,210\}$
$(28,8,44)$	$(3872,316,0,28)$	$\{395,352,36;1,44,360\}$
$(36,9,54)$	$(5832,441,0,36)$	$\{539,486,45;1,54,495\}$
$(45,10,65)$	$(8450,595,0,45)$	$\{714,650,55;1,65,660\}$
$(16,12,41)$	$(8075,352,0,16)$	$\{594,492,28;1,41,567\}$
$(66,12,90)$	$(16200,1002,0,66)$	$\{1169,1080,78;1,90,1092\}$
$(78,13,104)$	$(21632,1261,0,78)$	$\{1455,1352,91;1,104,1365\}$
$(91,14,119)$	$(28322,1561,0,91)$	$\{1784,1666,105;1,119,1680\}$
$(120,16,152)$	$(46208,2296,0,120)$	$\{2583,2432,136;1,152,2448\}$
$(34,17,68)$	$(24752,901,0,34)$	$\{1325,1156,51;1,68,1275\}$
$(136,17,170)$	$(57800,2737,0,136)$	$\{3059,2890,153;1,170,2907\}$
$(153,18,189)$	$(71442,3231,0,153)$	$\{3590,3402,171;1,189,3420\}$
$(90,21,134)$	$(67520,2421,0,90)$	$\{2959,2814,111;1,134,2849\}$
$(40,25,105)$	$(70930,1665,0,40)$	$\{2664,2625,65;1,105,2600\}$

$(5+7\sqrt{65})/2^{253}, -1^{1495}, (5-7\sqrt{65})/2^{253}$*)*, $\{335,297,21;1,33,315\}$ *(спектр* 335^1, $(2+3\sqrt{111})^{536}, -1^{2479}, (2-3\sqrt{111})^{536}$*) или* $\{2959,2814,111;1,134,2849\}$. *(спектр* $2959^1, (5+2\sqrt{4431})^{5380}, -1^{56759}, (5-2\sqrt{4431})^{5380}$*).*

Среди графов из заключения теоремы 1 выделены Q-полиномиальные графы.

Следствие 1. *Если граф из заключения теоремы* 1 *является* Q*-полиномиальным, то он имеет массив пересечений* $\{35,27,6;1,9,30\}$, $\{188,162,21;1,27,168\}$, $\{395,352,$
$36;1,44,360\}$, $\{539,486,45;1,54,495\}$, $\{714,650,55;1,65,660\}$, $\{1169,1080,78;1,$ $90,1092\}$, $\{1455,1352,91;1,104,1365\}$, $\{1784,1666,105;1,119,1680\}$, $\{2583,2432,$ $136;1,152,2448\}$, $\{3059,2890,153;1,170,2907\}$, $\{3590,3402,171;1,189,3420\}$.

Интересно, что любй из перечисленных графов Γ является формально самодуальным, в частности, $q^3_{33}=0$, более того граф Γ_2 сильно регулярен. Следующий результат классифицирует формально самодуальные дистанционно регулярные графы Γ, для которых Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников

Следствие 2. *Дистанционно регулярный граф* Γ *с массивом пересечений* $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$, $k=r^2+\mu(r+1)$ *формально самодуален тогда и только тогда, когда* $\mu=r(r-1)/2$, $c_2=(r+3)r/2$ *и* Γ *имеет массив пересечений*

$$\{(r^2+2r-1)(r+2)/2, (r+3)r^2/2, (r+1)r/2; 1, (r+3)r/2, (r+2)(r+1)r/2\},$$

где r *не сравнимо с* 3 *по модулю* 4.

Графы с массивами пересечений $\{15,8,4;1,4,12\}$ и $\{20,10,6;1,5,15\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, но не существуют (в обоих случаях $q^1_{13}<0$).

В [7] было доказано, что дистанционно регулярный граф диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3, причем Γ_3 граф без треугольников с $\mu=6$ имеет массив пересечений $\{(r+5)((r+3)^2-3)/6, r(r+3)(r+8)/6, r+6; 1, (r+3)(r+8)/6, r(r+5)(r+6)/6\}$, $r=4,6,10,16,19,24,28,40,46,52,58,60,70,79$.

По [8] графы с массивами пересечений $\{69,56,10;1,14,60\}$ и $\{119,100,15;1,20,105\}$ не существуют.

1. Доказательство предложения 1

Всюду далее Γ — дистанционно регулярный диаметра с Γ_3 являющимся сильно регулярным графом без треугольников. По [3, лемма 3] $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф $pG_\alpha(b_0,t)$, при некоторых натуральных α, b_0, t, и Γ имеет массив пересечений $\{b_0, tc_2, b_0-\alpha+1; 1, c_2, \alpha\}$.

По [4, глава 8] граф Γ_3 является либо

(1) полным двудольным графом, либо

(2) графом с $0<\mu<k$, имеющим собственные значения r, $-(\mu+r)$ и $k=(r+1)\mu+r^2$, причем μ делит $r^2(r^2-1)$, $\mu+2r$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$.

Рассмотрим случай 1. Предположим, что Γ_3 — полный двудольный граф. Тогда $\bar{\Gamma}_3$ — объединение двух изолированных клик, противоречие с тем, что Γ_3 связный граф как псевдогеометрический для $pG_\alpha(b_0,t)$. Итак, случай 1 невозможен.

Рассмотрим случай 2. Пусть Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников с параметрами $(v,k,0,\mu)$ и собственными значениями $k=(r+1)\mu+r^2$, r, $-(\mu+r)$. Тогда $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(b_0,r)$. Число вершин во второй окрестности вершины графа Γ_3 с одной стороны равно $k(k-1)/\mu$, с другой, равно степени графа $\bar{\Gamma}_3$, т.е. $b_0(r+1)$. Значит, $b_0=k(\mu+r-1)/\mu$. Далее, из равенства $\mu(\bar{\Gamma}_3)=v-2k-\lambda$ (см., например [1, теорема 1.3.1]) имеем $\alpha(r+1)=k(k-1)/mu+k+1-2k$ и $\alpha=(\mu+r-1)(k/\mu-1)$. Из целочисленности α следует, что μ делит $r^2(r-1)$.

Осталось показать, что $r\neq 1$. При $r=1$ граф Γ имеет массив $\{2\mu+1, c_2, \mu+1; 1, c_2, \mu+1)$ и в силу [1, предложение 4.1.6(i)] получим $c_2=\mu+1$. С другой стороны, по [1, теорема 5.4.1] должно выполняться одно из неравенств: либо $\mu+1\geq 3c_2/2$, либо $\mu+1\geq c_2+b_2$, противоречие.

Предложение 1 доказано.

2. Доказательство теоремы 1, случаи $\mu\in\{1,2,4,6\}$

По предложению 1 $Gamma$ имеет массив пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$, Γ_3 — сильно регулярный граф с параметрами $(v,k,0,\mu)$, где $v=1+k+k(k-1)/\mu$, $k=(r+1)\mu+r^2$, μ делит $r^2(r-1)$, где $r>1$ — наибольшее неглавное собственное значение графа Γ_3.

Для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{b_0,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3\}$ через L_1 обозначим трехдиагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0\\ c_1 & a_1 & b_1 & 0\\ 0 & c_2 & a_2 & b_2\\ 0 & 0 & c_3 & a_3 \end{pmatrix},$$

и через $(u_0(\theta_j)=1, u_1(\theta_j)=\frac{\theta_j}{b_0}, u_2(\theta_j), u_3(\theta_j)^T$ — правый собственный вектор, отвечающий собственному значению θ_j матрицы L_1. Заметим, что по [1, 4.1B] собственные значения графа Γ совпадают с собственными значениями матрицы L_1. Из [1, теорема 4.1.4 (Биггс)] кратности собственных значений графа Γ вычисляются по формуле

$$m_j = \frac{v}{\sum_{i=0}^{3} k_i u_i(\theta_j)^2}, \tag{1}$$

где $k_i = k_{i-1}b_{i-1}/c_i$ — число вершин в i-ой окрестности вершины и $v = k_0 + k_1 + k_2 + k_3$ — число вершин графа.

Используя формулу (1) получаем кратности неглавных собственных значений графа Γ:

$$m_{1,3} = \frac{2\left(\mu r + r^2 + 2\mu + r\right)\left(\mu r + r^2 + \mu - r\right)\left(\mu r + r^2 + \mu\right)(\mu + r - 1)\,r}{f_1 \pm \sqrt{z} f_2}, \tag{2}$$

$$m_2 = \frac{\left(\mu r + r^2 + 2\,\mu + r\right)\left(\mu r + r^2 + \mu\right)(\mu + r - 1)}{(\mu + 2\,r)\mu}, \tag{3}$$

где

$f_1 = c_2^2\mu^2r^3 - 2\,c_2\mu^3r^3 + \mu^4r^3 - 4\,c_2\mu^2r^4 + 4\,\mu^3r^4 - 2\,c_2\mu r^5 + 6\,\mu^2r^5 + 4\,\mu r^6 + r^7 + 3\,c_2^2\mu^2r^2 - 6\,c_2\mu^3r^2 + 3\,\mu^4r^2 - 8\,c_2\mu^2r^3 + 8\,\mu^3r^3 - 2\,c_2\mu r^4 + 6\,\mu^2r^4 - r^6 + 3\,c_2^2\mu^2r - 2\,c_2\mu^3r + 3\,\mu^4r + 4\,c_2\mu^2r^2 + 4\,\mu^3r^2 + 2\,c_2\mu r^3 - 2\,\mu^2r^3 - 4\,\mu r^4 - r^5 + c_2^2\mu^2 + 2\,c_2\mu^3 + \mu^4 + 8\,c_2\mu^2r + 2\,c_2\mu r^2 - 2\,\mu^2r^2 + r^4$,

$f_2 = c_2\mu r^2 - \mu^2r^2 - 2\mu r^3 - r^4 + 2\,c_2\mu r - 2\mu^2r - 2\mu r^2 + c_2\mu + \mu^2 + 4\,\mu r + r^2$,

$z = c_2^2\mu^2r^2 - 2c_2\mu^3r^2 + \mu^4r^2 - 4c_2\mu^2r^3 + 4\mu^3r^3 - 2c_2\mu r^4 + 6\mu^2r^4 + 4\mu r^5 + r^6 + 2c_2^2\mu^2r - 4c_2\mu^3r + 2\mu^4r - 4c_2\mu^2r^2 + 4\mu^3r^2 - 4\mu r^4 - 2r^5 + c_2^2\mu^2 + 2c_2\mu^3 + \mu^4 + 8c_2\mu^2r + 2c_2\mu r^2 - 2\mu^2r^2 + r^4$.

Лемма 2.1. *Параметр μ не равен 1.*

Доказательство. Пусть μ равно 1. Тогда $k = r^2 + r + 1$. С другой строны Γ_3 — граф Мура диаметра 2 и $k \in \{2, 3, 7, 57\}$ (см., например, [1, теорема 6.7.1]). Отсюда $r \in \{2, 7\}$.

Пусть $r = 2$. Тогда Γ_3 — граф Хофмана-Синглтона, $v = 50$ и $k = 7$. Отсюда $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_{12}(14, 2)$ и Γ имеет массив пересечений $\{14, 2c_2, 3; 1, c_2, 12\}$. Из целочисленности кратности m_1 следует, что $c_2 = 5$ и Γ имеет массив пересечений $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$. Противоречие с [1, теорема 4.1.5] для $i = j = 3$.

Если Γ — граф с параметрами (3250,57,0,1), то $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_{392}(399, 7)$ и Γ имеет массив пересечений $\{399, 7c_2, 8; 1, c_2, 392\}$. Противоречие с [1, лемма 4.3.1], а именно, $k_3a_3 = 57 \cdot 7$ — нечетное число. □

В леммах 2.2–2.4 предполагается, что число v вершин в графе Γ не превосходит 100000.

Лемма 2.2. *Если $\mu = 2$, то Γ имеет массив пересечений* $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$.

Доказательство. Если $\mu = 2$, то $k = (r + 1)^2 + 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{(r + 1)k/2, c_2r, 2 + r; 1, c_2, (r + 1)(k/2 - 1)\}$. Тогда неглавные собственные значения равны $\theta_1 = r^3/4 - (c_2 - 2)r/2 + 3r^2/4 - c_2/2 + z/4$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = r^3/4 - (c_2 - 2)r/2 + 3r^2/4 - c_2/2 - z/4$.

Используя формуры (2) и (3), находим кратности неглавных собственных значений:

$m_1 = 2(r^2+3r+4)(r^2+2r+2)(r^2+r+2)r/((r^6-4c_2r^4+6r^5+4c_2^2r^2-16c_2r^3+17r^4+8c_2^2r-28c_2r^2+32r^3+4c_2^2+40r^2+16c_2+32r+16)+(r^3-2c_2r+3r^2-2c_2+4r-4)\sqrt{z})$,

$m_2 = (r^2+3r+4)(r^2+2r+2)/4$,

$m_3 = 2(r^2+3r+4)(r^2+2r+2)(r^2+r+2)r/((r^6-4c_2r^4+6r^5+4c_2^2r^2-16c_2r^3+17r^4+8c_2^2r-28c_2r^2+32r^3+4c_2^2+40r^2+16c_2+32r+16)-(r^3-2c_2r+3r^2-2c_2+4r-4)\sqrt{z})$, где $z = r^6-4c_2r^4+6r^5+4c_2^2r^2-16c_2r^3+17r^4+8c_2^2r-28c_2r^2+32r^3+4c_2^2+40r^2+16c_2+32r+16$.

Если $m_1 = m_3$, то $r^3-2c_2r+3r^2-2c_2+4r-4=0$ и $2c_2(r+1) = r^3+3r^2+4r-4$. В этом случае $r+1$ делит 6 и $r = 1,2$ или 5, соответственно $c_2 = 1,2$ или 18. Теперь Γ_3 имеет параметры $(16,5,0,2)$, $(56,10,0,2)$ или $(704,37,0,2)$ и Γ имеет массив пересечений $\{5,1,3;1,1,4\}$, $\{15,4,4;1,2,12\}$ или $\{111,90,7;1,18,105\}$. В первом случае получим противоречие с [1, лемма 4.1.6(i)], а во втором с [1, предложение 5.4.4.].

Пусть число z является квадратом и $z = u^2 = (2(r+1)c_2-(r^3+3r^2+4r-4))^2+16r(r^2+3r+4)$.

Имеются следующие решения $u = (4r(r^2+3r+4)/t+t)$ и $c_2 = [u-2t+(r^3+3r^2+4r-4)]/(2(r+1))$ При подстановке этих выражений в формулы для кратностей m_1 и m_3 получим $m_1 = (r^2+3r+4)(r^2+2r+2)(r^2+r+2)r/(4r^3+12r^2+t^2+16r)$ и $m_3 = (r^2+2r+2)(r^2+r+2)t^2/(4(4r^3+12r^2+t^2+16r))$.

Первый массив, который удовлетворяет условиям целочисленности m_1, m_3 и c_2, равен $\{578865, 571584, 106; 1, 5496, 578760\}$ ($r = 104, c_2 = 5496, t = 4576$).

Итак, Γ имеет массив пересечений $\{111,90,7;1,18,105\}$. Лемма доказана. □

Лемма 2.3. *Параметр μ не равен* 4.

Доказательство. Если $\mu = 4$, то Γ имеет массив пересечений $\{(r+3)k/4, c_2r, 4+r; 1, c_2, (r+3)(k/4-1)\}$. Положим $r = 2w$ и $z^2 = 4w^6-8c_2w^4+28w^5+4c_2^2w^2-32c_2w^3+81w^4+4c_2^2w-46c_2w^2+128w^3+c_2^2-16c_2w+120w^2+8c_2+64w+16$. Тогда собственные значения равны $k = \theta_0 = 2w^3+7w^2+8w+3$, $\theta_1 = w^3-(c_2-4)w+7/2w^2-1/2c_2+1/2z+1$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = w^3-(c_2-4)w+7/2w^2-1/2c_2-1/2z+1$.

Далее, кратности неглавных собственных значений равны $m_1 = 4(2w^2+5w+4)(2w^2+3w+2)(2w+3)(w+1)^2w/(8w^7-16c_2w^5+60w^6+8c_2^2w^3-72c_2w^4+190w^5+4zw^4+12c_2^2w^2-124c_2w^3+337w^4-4zc_2w^2+16zw^3+6c_2^2w-78c_2w^2+368w^3-4zc_2w+23zw^2+c_2^2+248w^2-zc_2+8zw+8c_2+96w-4z+16)$,

$m_2 = 1/2(2w^2+5w+4)(2w+3)(w+1)$,

$m_3 = 4(2w^2+5w+4)(2w^2+3w+2)(2w+3)(w+1)^2w/(8w^7-16c_2w^5+60w^6+8c_2^2w^3-72c_2w^4+190w^5-4zw^4+12c_2^2w^2-124c_2w^3+337w^4+4zc_2w^2-16zw^3+6c_2^2w-78c_2w^2+368w^3+4zc_2w-23zw^2+c_2^2+248w^2+zc_2-8zw+8c_2+96w+4z+16)$.

Если $m_1 = m_3$, то $4zw^4-4zc_2w^2+16zw^3-4zc_2w+23zw^2-zc_2+8zw-4z=0$, поэтому $c_2(2w+1)^2 = 4w^4+16w^3+23w^2+8w-4$ и $2w+1$ делит $16w^2+8w-4$, противоречие. Значит, число $4w^6-8c_2w^4+28w^5+4c_2^2w^2-32c_2w^3+81w^4+4c_2^2w-46c_2w^2+128w^3+c_2^2-16c_2w+120w^2+8c_2+64w+16$ является квадратом. Тогда имеются следующие решения вида $(w,c_2),[m_1,m_2,m_3]$:

$(1,2),[\frac{77}{17},55,\frac{280}{17}]$, $\underline{(1,5),[10,55,11]}$, $(1,9)[\frac{154}{9},55,\frac{35}{9}]$, $(2,6),[\frac{264}{19},231,\frac{2016}{19}]$, $(2,10),[\frac{504}{13},231,\frac{1056}{13}]$, $(2,13),[\frac{1848}{25},231,\frac{1152}{25}]$, $(3,12),[\frac{2146}{67},666,\frac{25056}{67}]$,

$(3,17),[\frac{696}{7},666,\frac{2146}{7}]$, $(4,20),[\frac{805}{13},1540,\frac{12650}{13}]$, $(4,26),[\frac{6325}{31},1540,\frac{25760}{31}]$, $(4,27),[\frac{14720}{57},1540,\frac{44275}{57}]$, $(4,32),[\frac{8855}{13},1540,\frac{4600}{13}]$, $(5,30),[\frac{15879}{149},3081,\frac{313560}{149}]$, $(5,37),[\frac{15678}{43},3081,\frac{79395}{43}]$, $(6,37),[\frac{25760}{263},5565,\frac{1075158}{263}]$, $(6,42),[\frac{17066}{101},5565,\frac{405720}{101}]$, $(6,50),[\frac{11270}{19},5565,\frac{68264}{19}]$, $(6,59),[\frac{85330}{29},5565,\frac{36064}{29}]$, $(7,56),[\frac{66308}{263},9316,\frac{1843072}{263}]$, $(7,65),[\frac{65824}{73},9316,\frac{464156}{73}]$, $(8,72),[\frac{29799}{83},14706,\frac{948024}{83}]$, $(8,82),[\frac{16929}{13},14706,\frac{136224}{13}]$, $(8,94),[\frac{566181}{65},14706,\frac{199584}{65}]$, $(9,78),[\frac{128925}{629},22155,\frac{11284280}{629}]$, $(9,90),[\frac{201505}{409},22155,\frac{7219800}{409}]$, $(9,101),[\frac{66850}{37},22155,\frac{604515}{37}]$, $(10,110),[\frac{162052}{247},32131,\frac{6456560}{247}]$, $(10,122),[\frac{322828}{133},32131,\frac{3241040}{133}]$, $(10,137),[\frac{3727196}{181},32131,\frac{1122880}{181}]$, $(11,103),[\frac{5817}{31},45150,\frac{1179189}{31}]$, $(11,132)[\frac{500262}{587},45150,\frac{21938400}{587}]$, $(11,141),[\frac{383922}{197},45150,\frac{7146600}{197}]$, $(11,145),[\frac{498600}{157},45150,\frac{5502882}{157}]$, $(11,153),[\frac{214398}{19},45150,\frac{511896}{19}]$.

Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{20,10,6;1,5,15\}$ и Γ_3 имеет параметры (77,16,0,4). Противоречие с тем, что для этого графа $q^1_{13}<0$. □

Лемма 2.4. *Если* $\mu=6$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{143,126,12;1,21,132\}$, $\{415,390,16;1,39,400\}$, $\{1253,1216,22;1,76,1232\}$, $\{1924,1881,25;1,99,1900\}$, $\{3509,3024,30;1,126,3480\}$, $\{3509,3456,30;1,144,3480\}$.

Доказательство. Если $\mu=6$, то $k=(r+3)^2-3$, $r-1$ не делится на 4 и Γ имеет массив пересечений $\{(r+5)k/6,c_2r,6+r;1,c_2,(r+5)(k/6-1)\}$. $z^2=(36c_2^2-12c_2k+k^2)r^2+36c_2^2-60(c_2-1)k+25k^2+2(36c_2^2-6(6c_2-1)k+5k^2+108c_2)r+792c_2+36$. Тогда неглавные собственные значения равны $\theta_1=-1/12(6c_2-k)r-1/2c_2+5/12k+1/12z-1/2$, $\theta_2=-1$, $\theta_3=-1/12(6c_2-k)r-1/2c_2+5/12k-1/12z-1/2$.

Далее, их кратности равны $m_1=2(kr+5k+6)(kr+k-6)k(r+5)r/((36c_2^2r^3-12c_2kr^3+k^2r^3+108c_2^2r^2-84c_2kr^2+11k^2r^2-6zc_2r^2+zkr^2+108c_2^2r-132c_2kr+35k^2r+216c_2r^2+12kr^2-12zc_2r+6zkr+36c_2^2-60c_2k+25k^2+1008c_2r+72kr-6zc_2+5zk-18zr+792c_2+60k+36r-66z+36)(k-6))$,

$m_2=(kr+k-6)k(r+6)(r+5)/(12(k-6)(r+3))$,

$m_3=2(kr+5k+6)(kr+k-6)k(r+5)r/((36c_2^2r^3-12c_2kr^3+k^2r^3+108c_2^2r^2-84c_2kr^2+11k^2r^2+6zc_2r^2-zkr^2+108c_2^2r-132c_2kr+35k^2r+216c_2r^2+12kr^2+12zc_2r-6zkr+36c_2^2-60c_2k+25k^2+1008c_2r+72kr+6zc_2-5zk+18zr+792c_2+60k+36r+66z+36)(k-6))$.

Если $m_1=m_3$, то $-6zc_2r^2+zkr^2-12zc_2r+6zkr-6zc_2+5zk-18zr-66z=0$, поэтому $6c_2(r+1)^2=kr^2+6kr+5k-18r-66$, $r+1$ делит 48 и 6 делит $k(r^2+5)$.

По [9, лемма 4.1] имеем $(a_1-c_2)(c_2+b_1)=2c_2a_3$, поэтому $((r+5)k/6-c_2(r+1)-1)(r+1)=2(r+5)$ и $(r+5)(k(r+1)/6-2)=c_2(r+1)^2+(r+1)$. Отсюда $r+1$ делит $2(r+5)$ и $(r+1)$ делит 8.

Если $r=3$, то $3k=4c_2+5$, Γ имеет массив пересечений $\{4(4c_2+5)/3,3c_2,9;1,c_2,4((4c_2+5)/3-2)\}$. В этом случае $k=(r+3)^2-3=33$, $8(33\cdot4/6-2)=16c_2+4$ и $c_2=(8\cdot20-4)/16$, противоречие

Если $r=7$, то $k=4c_2+2$, Γ имеет массив пересечений $\{8c_2+10,7c_2,13;1,c_2,8c_2-8\}$. В этом случае $k=(r+3)^2-3=97$, $12(97\cdot12/6-2)=64c_2+8$ и $c_2=(12\cdot192-8)/64$, противоречие

Пусть $(36c_2^2-12c_2k+k^2)r^2+36c_2^2-60(c_2-1)k+25k^2+2(36c_2^2-6(6c_2-1)k+5k^2+108c_2)r+792c_2+36$ является квадратом. Тогда имеются следующие решения вида $(r,c_2),[m_1,m_2,m_3]$:

$(1,6), [\frac{65}{14}, \frac{65}{2}, \frac{13}{7}]$, $(1,12), [\frac{65}{11}, \frac{65}{2}, \frac{13}{22}]$, $(2,5), [8,77,14]$ (число $(\mu+r-1)k/\mu = 7{\cdot}22/6$ не целое), $(2,7), [\frac{616}{53}, 77, \frac{550}{53}]$, $(3,6), [\frac{110}{9}, 154, \frac{385}{9}]$, $(3,7), [\frac{77}{5}, 154, \frac{198}{5}]$, $(3,11), [\frac{770}{23}, 154, \frac{495}{23}]$, $(4,6), [\frac{138}{11}, 276, \frac{1127}{11}]$, $(4,11), [\frac{1127}{29}, 276, \frac{2208}{29}]$, $(4,14), [69,276,46]$, $(5,12), [\frac{1281}{31}, \frac{915}{2}, \frac{10675}{62}]$, $(5,19), [\frac{1708}{11}, \frac{915}{2}, \frac{1281}{22}]$, $(6,15), [\frac{1040}{17}, 715, \frac{5148}{17}]$, $(6,17), [\frac{4212}{43}, 715, \frac{11440}{43}]$, $(6,21), [220,715,144]$, $(7,7), [\frac{679}{47}, 1067, \frac{26675}{47}]$, $(7,25), [\frac{1067}{3}, 1067, \frac{679}{3}]$, $(8,22), [118,1534,767]$ (число $(\mu+r-1)k/\mu = 13{\cdot}118/6$ не целое), $(9,24), [\frac{3619}{34}, \frac{4277}{2}, \frac{20163}{17}]$, $(9,26), [\frac{6721}{43}, \frac{4277}{2}, \frac{97713}{86}]$, $(9,34), [\frac{47047}{58}, \frac{4277}{2}, \frac{13959}{29}]$, $(10,24), [\frac{581}{8}, 2905, \frac{14027}{8}]$, $(10,33), [\frac{28054}{79}, 2905, \frac{116200}{79}]$, $(10,39), [1162,2905,664]$, $(11,35), [\frac{12545}{49}, 3860, \frac{110396}{49}]$, $(11,37), [\frac{110396}{289}, 3860, \frac{614705}{289}]$, $(12,40), [\frac{4144}{13}, 5032, \frac{39627}{13}]$, $(12,43), [\frac{58275}{101}, 5032, \frac{281792}{101}]$, $(12,49), [\frac{21312}{11}, 5032, \frac{15725}{11}]$, $(12,50), [\frac{4403}{2}, 5032, \frac{2331}{2}]$, $(13,50), [\frac{9867}{10}, \frac{12903}{2}, \frac{17204}{5}]$, $(13,56), [\frac{5865}{2}, \frac{12903}{2}, 1495]$, $(14,51), [\frac{13728}{29}, 8151, \frac{152152}{29}]$, $(15,43), [\frac{2675}{23}, 10165, \frac{164673}{23}]$, $(15,54), [\frac{1819}{5}, 10165, \frac{34561}{5}]$, $(15,57), [\frac{34561}{61}, 10165, \frac{409275}{61}]$, $(15,69), [\frac{34561}{7}, 10165, \frac{16371}{7}]$, $(16,54), [\frac{6265}{29}, 12530, \frac{258476}{29}]$, $(16,67), [\frac{64619}{51}, 12530, \frac{400960}{51}]$, $(16,76), [6265,12530,2864]$, $(17,70), [\frac{52801}{67}, \frac{30569}{2}, \frac{1410541}{134}]$, $(18,51), [\frac{24090}{239}, 18469, \frac{3290840}{239}]$, $(18,77)[\frac{6424}{7}, 18469, \frac{90666}{7}]$, $(18,81), [\frac{107310}{61}, 18469, \frac{738760}{61}]$, $(18,91)[\frac{184690}{19}, 18469, \frac{78840}{19}]$, $(19,99), [11914,22126,4921]$, $(20,92), [\frac{23144}{19}, 26300, \frac{361625}{19}]$, $(21,83), [\frac{39537}{134}, \frac{62075}{2}, \frac{1599052}{67}]$, $(21,89), [\frac{123004}{271}, \frac{62075}{2}, \frac{12849525}{542}]$, $(21,96), [\frac{57109}{66}, \frac{62075}{2}, \frac{768775}{33}]$, $(21,100), [\frac{109825}{79}, \frac{62075}{2}, \frac{3597867}{158}]$, $(21,108), [\frac{30751}{6}, \frac{62075}{2}, \frac{57109}{3}]$, $(21,112), [\frac{399763}{37}, \frac{62075}{2}, \frac{988425}{74}]$, $(21,116), [\frac{1427725}{82}, \frac{62075}{2}, \frac{276759}{41}]$, $(22,85), [\frac{13684}{57}, 36387, \frac{1617200}{57}]$, $(22,96), [\frac{36387}{76}, 36387, \frac{2138125}{76}]$, $(22,113), [\frac{777500}{251}, 36387, \frac{6404112}{251}]$, $(22,120), [\frac{44473}{4}, 36387, \frac{69975}{4}]$, $(22,125), [145548,254709,54736]$, $(23,117), [\frac{30285}{17}, 42399, \frac{541765}{17}]$, $(24,126), [2002,49126,37323]$, $(24,131), [\frac{1146717}{289}, 49126, \frac{10218208}{289}]$, $(24,144), [29029,49126,10296]$.

Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{69,56,10;1,14,60\}$, $\{(143,126,12;1,21,132\}$, $\{415,390,16;1,39,400\}$, $\{1253,1216,22;1,76,1232\}$, $\{1924,1881,25;1,99,1900\}$, $\{3509,3024,30;1,126,3480\}$, $\{3509,3456,30;1,144,3480\}$.

Но граф с массивом пересечений $\{69,56,10;1,14,60\}$ не существует по [8]. $\square$

3. Сильно регулярные графы с $\mu \notin \{1,2,4,6\}$

В этом разделе предполагается, что Γ_3 — граф с параметрами $(v,k,0,\mu)$ и собственными значениями r, $-(\mu+r)$, $k=(r+1)\mu+r^2$, причем $\mu \notin \{1,2,4,6\}$ и $v \le 100000$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2 r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$.

Лемма 3.1. *Если $v \le 266$, то графов нет.*

Доказательство. Если $v \le 266$, то ввиду [10] граф Γ_3 имеет параметры $(16,5,0,2)$, $(50,7,0,1)$, $(56,10,0,2)$, $(77,16,0,4)$, $(100,22,0,6)$, $(162,21,0,3)$, $(176,25,0,4)$, $(210,33,0,6)$ или $(266,45,0,9)$.

В случае $(162,21,0,3)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{35,27,6;1,9,30\}$, противоречие с тем, что число ka_1 нечетно.

В случае $(266, 45, 0, 9)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{55, 3c_2, 12; 1, c_2, 44\}$, поэтому c_2 четно и делит $r^2(r-1) = 18$. Противоречие с тем, что кратность некоторого собственного значения графа Γ не целая. $\square$

Лемма 3.2. *Если* $267 \leq v \leq 650$*, то графов нет.*

Доказательство. Если $267 \leq v \leq 650$, то ввиду [10] граф Γ_3 имеет параметры $(352, 26, 0, 2)$, $(352, 36, 0, 4)$, $(392, 46, 0, 6)$, $(552, 76, 0, 12)$, $(638, 49, 0, 4)$, $(650, 55, 0, 5)$.

В случае $(552, 76, 0, 12)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{95, 4c_2, 16; 1, c_2, 80\}$, противоречие.

В случае $(638, 49, 0, 4)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{98, 5c_2, 9; 1, c_2, 90\}$, противоречие.

В случае $(650, 55, 0, 5)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{99, 5c_2, 10; 1, c_2, 90\}$, противоречие. $\square$

Лемма 3.3. *Если* $651 \leq v \leq 1300$*, то* Γ *имеет массив пересечений* $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$.

Доказательство. Если $651 \leq v \leq 1300$, то ввиду [10] граф Γ_3 имеет параметры $(667, 96, 0, 16)$, $(704, 37, 0, 2)$, $(784, 116, 0, 20)$, $(800, 85, 0, 10)$, $(1073, 64, 0, 4)$, $(1080, 78, 0, 6)$, $(1178, 99, 0, 9)$, $(1190, 145, 0, 20)$, $(1276, 50, 0, 2)$.

В случае $(667, 96, 0, 16)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{114, 4c_2, 20; 1, c_2, 95\}$, противоречие.

В случае $(784, 116, 0, 20)$ имеем $r = 4$ и $\mu = 20$ не делит $r^2(r-1)$, противоречие.

В случае $(800, 85, 0, 10)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$.

В случае $(1178, 99, 0, 9)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{154, 6c_2, 15; 1, c_2, 140\}$, противоречие.

В случае $(1190, 145, 0, 20)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{174, 5c_2, 25; 1, c_2, 150\}$, противоречие. $\square$

По [8] граф с массивом пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ не существует.

Лемма 3.4. *Если* $v \leq 100000$*, то* Γ *имеет массив пересечений из таблицы 2.*

Доказательство. Заметим, что $v = (r\mu + r^2 + 2\mu + r)(r\mu + r^2 + \mu - r)/\mu$. Поэтому $1 \leq r \leq 36$.

С помощью компьютерного перебора по $r \in \{2, 3, \ldots, 36\}$ и по μ, пробегающем все делители $r^2(r-1)$, $\mu \leq r(r+1)$ получаем таблицу 2. $\square$

Для графов с массивами пересечений $\{35, 27, 6; 1, 9, 30\}$, $\{279, 245, 28; 1, 35, 252\}$, $\{335, 297, 21; 1, 33, 315\}$, $\{377, 297, 27; 1, 33, 351\}$, $\{483, 363, 22; 1, 33, 462\}$, $\{923, 847, 66; 1, 77, 858\}$, $\{935, 885, 36; 1, 59, 900\}$, $\{2159, 2025, 120; 1, 135, 2040\}$, $\{4179, 3971, 190; 1, 209, 3990\}$, $\{1819, 1617, 35; 1, 77, 1785\}$ число ka_1 нечетно. Поэтому указанные графы не существуют.

Таблица 2. Дистанционно регулярные графы Γ с сильно регулярным Γ_3 без треугольников и числом вершин не большим 100000

(μ, r, c_2)	срг	дрг
$(1,2,5)$	$(50,7,0,1)$	$\{14,10,3;1,5,12\}$
$(3,3,9)$	$(162,21,0,3)$	$\{35,27,6;1,9,30\}$
$(6,4,14)$	$(392,46,0,6)$	$\{69,56,10;1,14,60\}$
$(2,5,18)$	$(704,37,0,2)$	$\{111,90,7;1,18,105\}$
$(10,5,20)$	$(800,85,0,10)$	$\{119,100,15;1,20,105\}$
$(6,6,21)$	$(1080,78,0,6)$	$\{143,126,12;1,21,132\}$
$(15,6,27)$	$(1458,141,0,15)$	$\{188,162,21;1,27,168\}$
$(14,7,28)$	$(2002,161,0,14)$	$\{230,196,21;1,28,210\}$
$(21,7,35)$	$(2450,217,0,21)$	$\{279,245,28;1,35,252\}$
$(28,8,44)$	$(3872,316,0,28)$	$\{395,352,36;1,44,360\}$
$(12,9,33)$	$(3552,201,0,12)$	$\{335,297,21;1,33,315\}$
$(18,9,33)$	$(4032,261,0,18)$	$\{377,297,27;1,33,351\}$
$(36,9,54)$	$(5832,441,0,36)$	$\{539,486,45;1,54,495\}$
$(6,10,39)$	$(4732,166,0,6)$	$\{415,390,16;1,39,400\}$
$(45,10,65)$	$(8450,595,0,45)$	$\{714,650,55;1,65,660\}$
$(11,11,33)$	$(6050,253,0,11)$	$\{483,363,22;1,33,462\}$
$(55,11,77)$	$(11858,781,0,55)$	$\{923,847,66;1,77,858\}$
$(16,12,41)$	$(8075,352,0,16)$	$\{594,492,28;1,41,567\}$
$(66,12,90)$	$(16200,1002,0,66)$	$\{1169,1080,78;1,90,1092\}$
$(78,13,104)$	$(21632,1261,0,78)$	$\{1455,1352,91;1,104,1365\}$
$(91,14,119)$	$(28322,1561,0,91)$	$\{1784,1666,105;1,119,1680\}$
$(21,15,59)$	$(15522,561,0,21)$	$\{935,885,36;1,59,900\}$
$(105,15,135)$	$(36450,1905,0,105)$	$\{2159,2025,120;1,135,2040\}$
$(6,16,76)$	$(21660,358,0,6)$	$\{1253,1216,22;1,76,1232\}$
$(120,16,152)$	$(46208,2296,0,120)$	$\{2583,2432,136;1,152,2448\}$
$(34,17,68)$	$(24752,901,0,34)$	$\{1325,1156,51;1,68,1275\}$
$(136,17,170)$	$(57800,2737,0,136)$	$\{3059,2890,153;1,170,2907\}$
$(153,18,189)$	$(71442,3231,0,153)$	$\{3590,3402,171;1,189,3420\}$
$(6,19,99)$	$(38962,481,0,6)$	$\{1924,1881,25;1,99,1900\}$
$(171,19,209)$	$(87362,3781,0,171)$	$\{4179,3971,190;1,209,3990\}$
$(14,21,77)$	$(40768,749,0,14)$	$\{1819,1617,35;1,77,1785\}$
$(90,21,134)$	$(67520,2421,0,90)$	$\{2959,2814,111;1,134,2849\}$
$(6,24,126)$	$(88452,726,0,6)$	$\{3509,3024,30;1,126,3480\}$
$(6,24,144)$	$(88452,726,0,6)$	$\{3509,3456,30;1,144,3480\}$
$(40,25,105)$	$(70930,1665,0,40)$	$\{2664,2625,65;1,105,2600\}$

4. Графы с нецелым собственным значением

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$ и одно из собственных значений Γ нецелое.

Лемма 4.1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $c_2 = \mu+(-2\mu+2r(r-1)\mu+2r(r-1)(r+1)\mu+r^2(r-1)(r+1))/((\mu(r+1)^2))$;

(2) $\mu(r+1)$ *делит* $-2\mu^2+2r(r-1)\mu$, $r+1$ *делит* $-2\mu+2r(r-1)$ *и* $r+1$ *делит* $2\mu-4$.

Доказательство. Кратность собственного значения θ_1 графа Γ равна
$m_1 = 2(\mu r+r^2+2\mu+r)(\mu r+r^2+\mu-r)(\mu r+r^2+\mu)(\mu+r-1)r/(c_2^2\mu^2r^3-2c_2\mu^3r^3+\mu^4r^3-4c_2\mu^2r^4+4\mu^3r^4-2c_2\mu r^5+6\mu^2r^5+4\mu r^6+r^7+3c_2^2\mu^2r^2-6c_2\mu^3r^2+3\mu^4r^2-8c_2\mu^2r^3+8\mu^3r^3-2c_2\mu r^4+6\mu^2r^4-r^6+3c_2^2\mu^2r-2c_2\mu^3r+3\mu^4r+4c_2\mu^2r^2+4\mu^3r^2+2c_2\mu r^3-2\mu^2r^3-4\mu r^4-r^5-zc_2\mu r^2+z\mu^2r^2+2z\mu r^3+zr^4+c_2^2\mu^2+2c_2\mu^3+\mu^4+8c_2\mu^2r+2c_2\mu r^2-2\mu^2r^2+r^4-2zc_2\mu r+2z\mu^2r+2z\mu r^2-zc_2\mu-z\mu^2-4z\mu r-zr^2)$, где $z=(2(2\mu-1)r^5+r^6-(2(c_2+2)\mu-6\mu^2-1)r^4+c_2^2\mu^2+2c_2\mu^3+\mu^4-4(c_2\mu^2-\mu^3)r^3-(2(c_2-2)\mu^3-\mu^4-(c_2^2-4c_2-2)\mu^2-2c_2\mu)r^2-2(2c_2\mu^3-\mu^4-(c_2^2+4c_2)\mu^2)r)^{1/2}$.

Поэтому одно из собственных значений Γ не целое, только в случае когда $-zc_2\mu r^2+z\mu^2r^2+2z\mu r^3+zr^4-2zc_2\mu r+2z\mu^2r+2z\mu r^2-zc_2\mu-z\mu^2-4z\mu r-zr^2=0$.

Отсюда, $c_2=(\mu^2r^2+2\mu r^3+r^4+2\mu^2r+2\mu r^2-\mu^2-4\mu r-r^2)/((\mu(r+1)^2))$, т.е. $c_2=\mu+(-2\mu+2r(r-1)\mu+2r(r-1)(r+1)\mu+r^2(r-1)(r+1))/((\mu(r+1)^2))$.

Поэтому $\mu(r+1)$ делит $-2\mu^2+2r(r-1)\mu$, $r+1$ делит $-2\mu+2r(r-1)$, а значит, $r+1$ делит $2\mu-4$. $\square$

Лемма 4.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $\mu=(y(r+1)+4)/2$ *для некоторого* $y\in\mathbb{N}$ *или* Γ *имеет массив пересечений* $\{111,90,7;1,18,105\}$*;*

(2) $r^2(r-1)=\mu x$ *для некоторого* $x\in\mathbb{N}$, $2r^2(r-1)=(y(r+1)+4)x$ *и* $c_2=\mu+2(r-1)+(x-y-2)/(r+1)$*;*

(3) $x\equiv-1 \pmod{(r+1)/(r+1,4)}$, $y\equiv-3 \pmod{(r+1)/(r+1,4)}$ *и* $2r^2(r-1)=((s(r+1)-3(r+1,4))(r+1)+4(r+1,4))(t(r+1)-(r+1,4))/(r+1,4)^2$.

Доказательство. По лемме 3.1 имеем $\mu=(y(r+1)+4)/2$ для некоторого $y\in\mathbb{Z}$. Далее, $y>-4/(r+1)$, а значит, $y\geq-1$. Но при $y=-1$ имеем $\mu=0$, противоречие, а при $y=0$ параметр μ равен 2 и по лемме 2.2 граф Γ имеет массив пересечений $\{111,90,7;1,18,105\}$. Далее будем считать, что $y\in\mathbb{N}$.

Напомним, что из целочисленности c_3 следует делимость $r^2(r-1)$ на μ. Поэтому $r^2(r-1)=\mu x$ для некоторого $x\in\mathbb{N}$ и $2r^2(r-1)=(y(r+1)+4)x$. Тогда $c_2=(\mu+(-y(r+1)-4+2r(r-1)+2r(r-1)(r+1)+x(r+1))/(r+1)^2$ и $c_2=\mu+2(r-1)+(x-y-2)/(r+1)$.

Из равенства $2r^2(r-1)=(y(r+1)+4)x$ следует, что $x\equiv-1 \pmod{(r+1)/(r+1,4)}$, $y\equiv-3 \pmod{(r+1)/(r+1,4)}$ и $2r^2(r-1)=((s(r+1)-3(r+1,4))(r+1)+4(r+1,4))(t(r+1)-(r+1,4))/(r+1,4)^2$. $\square$

Лемма 4.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *число* r *нечетно;*

(2) *если* $r=4m+1$, *то* Γ *имеет массив пересечений:* $\{111,90,7;1,18,105\}$, $\{335,297,21;1,33,315\}$ *или* $\{2959,2814,111;1,134,2849\}$.

Доказательство. Пусть $r=2m$. Тогда $8m^2(2m-1)=((s(2m+1)-3)(2m+1)+4)(t(2m+1)-1)$ и $(8st-16)m^3+(12st-12t-4s+8)m^2+(6st-4t-4s+6)m+st+t-s-1=0$

При $st\geq2$ левая часть уравнения положительна при $m>0$, поэтому $s=t=1$. Имеем
$-8m^3+4m^2+4m=0, -2m^2+m+1=0, m=1$. Отсюда $r=2, x=2, y=0, \mu=2$ и $c_2=4/3$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $r=4m+1$. Тогда $x=t(2m+1)-1$, $y=s(2m+1)-3$.

Далее, $4(4m+1)^2m = ((s(2m+1)-3)(2m+1)+2)(t(2m+1)-1)$, $(8st-64)m^3+(12st-12t-4s-32)m^2+(6st-8t-4s+2)m+st-s-t+1=0$ и $8(st-8)m^3+((12t-4)(s-1)-36)m^2+(2st+4(t-1)(s-2)-6)m+(t-1)(s-1)=0$.

При $st \geq 8$ и $s > 1$ левая часть равенства положительна при $m > 0$. Поэтому либо $s = 1$ либо $st < 8$.

Пусть $s = 1$. Тогда $4(t-8)m^2 - 18m - (t+1) = 0$, $t = 8 + 9/(2m-1)$ и $m \in \{1, 2, 5\}$.

При $m = 1$ имеем $r = 5, x = 50, y = 0, \mu = 2, c_2 = 18$ и Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$.

При $m = 2$ имеем $r = 9, t = 11, x = 54, y = 2, \mu = 12, c_2 = 33$ и Γ имеет массив пересечений $\{335, 297, 21; 1, 33, 315\}$.

При $m = 5$ имеем $r = 21, t = 9, x = 98, y = 8, \mu = 90, c_2 = 134$ и Γ имеет массив пересечений $\{2959, 2814, 111; 1, 134, 2849\}$.

Рассмотрим случай $st < 8$ и $s > 1$.

Тогда пара (s, t) принимает одно из следующих значений: $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1)$.

Уравнение $8(st-8)m^3+((12t-4)(s-1)-36)m^2+(2st+4(t-1)(s-2)-6)m+(t-1)(s-1)=0$ имеет положительные целые решения только в случаях $(s, t) = (3, 2)$ и $(7, 1)$.

В случае $(s, t) = (3, 2)$ имеем $m = 1$, $r = 3, x = 5, y = 6$ и $x - y - 2$ не делится на $(r + 1)$, противоречие.

В случае $(s, t) = (7, 1)$ имеем $m = 2$, $r = 9, x = 4, y = 32, \mu = 162, c_2 = 175$ и Γ имеет массив пересечений $\{1785, 1575, 171; 1, 175, 1615\}$, противоречие с тем, что $m_1 = 987/2$. □

Лемма 4.4. *Если $r = 4m - 1$, то выполняются следующие утверждения:*

(1) $x = tm - 1$, $y = sm - 3$ *и* $(x - y - 2)/(r + 1) = (t - s)/4$ *— целое число;*

(2) $(st - 32)m^2 + (32 - s - 3t)m + t - 7 = 0$.

(3) $t \geq 3$ *и если* $m \leq 2$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{230, 196, 21; 1, 28, 210\}$.

Доказательство. Пусть $r = 4m - 1$. Тогда $x = tm - 1$, $y = sm - 3$.

Из целочисленности c_2 следует, что $(x - y - 2)/(r + 1) = (tm - sm)/(4m) = (t - s)/4$ — целое число.

Из равенства $2r^2(r-1) = ((s(r+1) - 3(r+1, 4))(r+1) + 4(r+1, 4))(t(r+1) - (r+1, 4))/(r+1, 4)^2$ следует $2(4m-1)^2(4m-2) = ((sm-3)4m+4)(tm-1)$. Поэтому $(4st-128)m^3+(128-4s-12t)m^2+(4t-28)m = 0$ и $(st-32)m^2+(32-s-3t)m+t-7=0$.

Пусть $m = 1$. Тогда $st - 32 + 32 - s - 3t + t - 7 = 0$, $st - s - 2t - 7 = 0$, $s(t-1) - 2(t-1) - 9 = 0$, $(s-2)(t-1) = 9$. Поэтому $(s, t) \in \{(3, 10), (5, 4), (11, 2)\}$. Во всех случаях 4 не делит $t - s$.

Пусть $t = 1$. Тогда $(s-32)m^2+(29-s)m-6 = 0$, $sm(m-1)-32m^2+29(m-1)+23 = 0$, $(sm+29)(m-1) = 32m^2-23$, $m-1$ делит 9 и $(s, m) \in \{(38, 2), (115, 4)\}$. В любом случае 4 не делит $t - s$.

Пусть $t = 2$. Тогда $(2s-32)m^2+(26-s)m-5 = 0$, $sm(2m-1)-32m^2+13(2m-1)+8 = 0$, $(sm+13)(2m-1) = 8(4m^2-1)$, $sm+13 = 2m+1$, $m(s-2) = -12$ и $(s, m) = (1, 12)$. В этом случае 4 не делит $t - s$.

Пусть $m = 2$. Тогда $4st-32\cdot4+32\cdot2-2s-6t+t-7 = 0$, $2s(2t-1)-3(2t-1)+t-74 = 0$, $(2s-3)(2t-1) = 74-t$. Поэтому $(s, t) \in \{(38, 1), (3, 11), (2, 25)\}$. В первом и третьем случаях 4 не делит $t-s$. При $(s,t)=(3,11)$ имеем $r=7, x=21, y=3, \mu=14, c_2=28$ и Γ имеет массив пересечений $\{230,196,21;1,28,210\}$. $\square$

Завершим доказательство теоремы 2. Из равенства $m^2st-32m^2+32m-ms-3mt+t-32m^2+32m-7=0$ следует $ms(mt-1)-3(mt-1)+t-32m^2+32m-10=0$ и $(ms-3)(mt-1)=32m^2-32m+10-t$.

Если t четно, то левая часть равенства $(ms-3)(mt-1)=32m^2-32m+10-t$ нечетна, а правая четна, противоречие.

Пусть t нечетно. Если m делится на 4, то из равенства $(ms-3)(mt-1)=32m^2-32m+10-t$ следует, что t сравнимо с 3 по модулю 4. Если же m сравнимо с 2 по модулю 4, то $t+2s-1$ делится на 4, поэтому снова t сравнимо с 3 по модулю 4. Теперь либо $t=3$, $s=11$ и $m^2+12m-4=0$, либо $t=3$, $s=7$ и $11m^2-16m+4=0$, либо $t=7$, $s=3$ и $11m^2-8m=0$, либо $t=7$, $s=7$ и $17m^2-4m=0$, либо $t=11$, $s=3$ и $m^2-4m+4=0$. В любом случае либо имеем противоречие, либо $m=2$ и по лемме 3.4 граф Γ имеет массив пересечений $\{230,196,21;1,28,210\}$.

Теорема 2 доказана.

5. Формально самодуальные графы

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников.

Лемма 5.1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с и целыми собственными значениями и массивом пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$, $k=r^2+\mu(r+1)$. Тогда*

$$c_2=-(\mu^2r+2\mu r^2+r^3+\mu^2-r^2-t)t/((\mu^2+2\mu r-rt-t)\mu) \tag{4}$$

для некоторого $t\in\mathbb{Z}/\{0\}$, делящегося на μ.

Доказательство. Одно из собственных значений графа Γ имеет вид

$$\theta=-1/2(c_2\mu r-\mu^2r-2\mu r^2-r^3+c_2\mu-\mu^2+r^2+2\mu-\sqrt{z})/\mu,$$

где $z=c_2^2\mu^2r^2-2c_2\mu^3r^2+\mu^4r^2-4c_2\mu^2r^3+4\mu^3r^3-2c_2\mu r^4+6\mu^2r^4+4\mu r^5+r^6+2c_2^2\mu^2r-4c_2\mu^3r+2\mu^4r-4c_2\mu^2r^2+4\mu^3r^2-4\mu r^4-2r^5+c_2^2\mu^2+2c_2\mu^3+\mu^4+8c_2\mu^2r+2c_2\mu r^2-2\mu^2r^2+r^4$.

Преобразуем данное выражение $\mu^2(r+1)^2c_2^2-2\mu(\mu^2r^2+2\mu r^3+r^4+2\mu^2r+2\mu r^2-\mu^2-4\mu r-r^2)c_2+(\mu r+r^2+\mu-r)^2(\mu+r)^2$.

Заметим, что $(\mu r+r^2+\mu-r)(\mu+r)(r+1)=\mu^2r^2+2\mu r^3+r^4+2\mu^2r+2\mu r^2+\mu^2-r^2$. Поэтому

$z=(\mu(r+1)c_2-(\mu r+r^2+\mu-r)(\mu+r))^2+4(\mu+2r)\mu^2c_2$.

По условия z является квадратом целого числа и, решая диофантово уравнение $x^2-y^2=4N$, имеем

$\mu(r+1)c_2-(\mu r+r^2+\mu-r)(\mu+r)=(\mu+2r)\mu^2c_2/t-t$ для некоторого $t\in\mathbb{Z}/\{0\}$.

Отсюда

$$c_2=(\mu^2r+2\mu r^2+r^3+\mu^2-r^2+t)t/((\mu^2+2\mu r+rt+t)\mu) \tag{5}$$

для некоторого $t\in\mathbb{Z}/\{0\}$.

Далее, $t^2 = u\mu$ для некоторого целого положительного числа u. Умножив числитель и знаменатель правой части равенства 5 на u получим $c_2 = (\mu t^2 r + 2t^2r^2 + ur^3 + \mu t^2 - ur^2 + tu)/((\mu^2 + 2\mu r + rt + t)t)$.

Напомним, что $r^2(r-1) = x\mu$ для некоторого целого положительного числа x. Поэтому $c_2 = (\mu tr + 2tr^2 + tx + \mu t + u)/(\mu^2 + 2\mu r + rt + t)$. Отсюда t делит u^2 и, с учетом равенства $t^2 = u\mu$, имеем $t = y\mu$ и $u = y^2\mu$ для некоторого натурального числа y.

□

Лемма 5.2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$, $k = r^2+\mu(r+1)$ *и целыми собственными значениями. Если* Γ *формально самодуален, то* $\mu = r(r-1)/2$, $c_2 = (r+3)r/2$ *и* Γ *имеет массив пересечений*

$$\{(r^2+2r-1)(r+2)/2, (r+3)r^2/2, (r+1)r/2; 1, (r+3)r/2, (r+2)(r+1)r/2\},$$

где r *не сравнимо с* 3 *по модулю* 4.

Доказательство. Заметим, что кратность собственного значения θ_2 графа Γ равна $m_2 = (\mu r + r^2 + 2\mu + r)(\mu r + r^2 + \mu)(\mu + r - 1)/((\mu + 2r)\mu)$, а $k_2 = (\mu r + r^2 + \mu)(\mu + r - 1)r/\mu$. Так как Γ формально самодуален, то $m_2 = k_2$ и $\mu = r(r-1)/2$.

В силу того, что $k_1 \neq k_3$ граф Γ имеет целые собственные значения и по лемме 5.1 $c_2 = -2(r^5 + 3r^4 - r^3 - 3r^2 - 4t)t/((r^4 + 2r^3 - 3r^2 - 4rt - 4t)(r-1)r)$.

Из равенства $k_1 = m_1$ имеем $t = -(r+3)(r-1)r^2/4$ или $(r+3)^2(r-1)r^2/(4(r+1))$.

В первом случае имеем $c_2 = (r+3)r/2$.

Во втором случае $c_2 = (r+3)^2(r-1)r/(2(r+1)^2)$, следовательно $(r+1)^2$ делит $4(r-1)$, противоречие.

Если r сравнимо с 3 по модулю 4, то число b_0a_1 нечетно, противоречие. Лемма доказана. □

Следствие 2 доказано.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag. Berlin etc., 1989. Zbl 0747.05073

[2] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, *Inverse problems in the theory of distance-regular graphs*, Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1, **307** (2019), S88–S98. Zbl 1441.05247

[3] A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *On distance-regular Shilla graphs*, Math. Notes, **103**:5 (2018), 780–792. Zbl 1394.05027

[4] P. Cameron, J.H. van Lint, *Designs, graphs, codes and their links*, London Math. Soc. Student Texts **22**, Cambr. Univ. Press., Cambridge etc., 1991. Zbl 0743.05004

[5] A. Neumaer, *Strongly regular graphs with smallest eigenvalue* $-m$, Arch. Math., **33** (1979), 392–400. Zbl 0407.05043

[6] A.J. Hoffman, R.R. Singleton, *On Moore graphs with diameters 2 and 3*, IBM J. Res. Dev., **4**, 1960, 497–504. Zbl 0096.38102

[7] M.S. Nirova, *On distance-regular graphs* Γ *with strongly regular graphs* Γ_2 *and* Γ_3, Sib. Electron. Math. Izv., **15** 2018, 175–185. Zbl 1430.05029

[8] A.A. Makhnev, M.M. Isakova, M.S. Nirova, *Distance-regular graphs with intersection arrays* $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$ *and* $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ *do not exist*, Sib. Electron. Math. Izv., **16** (2019), 1254–1259. Zbl 1425.05072

[9] S. Bang, J. Koolen, *Distance-regular graphs of diameter* 3 *having eigenvalue* -1, Linear Algebra Appl., **531** (2017), 38–53. Zbl 1370.05130

[10] A.E. Brouwer, *A table of parameters of strongly regular graphs*, homepage, https://www.win.tue.nl/ aeb/graphs/srg/srgtab.html

Alexandr Alexeevich Makhnev
Ural Federal University,
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics,
16, S. Kovalevskoy str.,
Ekaterinburg, 620990, Russia
Email address: makhnev@imm.uran.ru

Ivan Nikolaevich Belousov
Ural Federal University,
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics,
16, S. Kovalevskoy str.,
Ekaterinburg, 620990, Russia
Email address: i_belousov@mail.ru

Dmitrii Viktorovich Paduchikh
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics,
16, S. Kovalevskoy str.,
620990, Ekaterinburg, Russia
Email address: dpaduchikh@gmail.com