S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. xxx–xxx (2020) УДК 510.5
DOI 10.33048/semi.2020.xx.xxx MSC 03D25

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ПОЗИТИВНЫХ ПРЕДПОРЯДКОВ

С.А. БАДАЕВ, Б.С. КАЛМУРЗАЕВ, Н.К. МУКАШ, А.А. ХАМИТОВА

Abstract. We study positive preorders relative to computable reducibility. It is suggested an approach to lift well-known notions from the theory of ceers to positive preorders. It is shown that each class of positive preoders of a special type (precomplete, e-complete, weakly precomplete, effectively finite precomplete, and effectively inseparable ones) contains infinitely many incomparable elements and has an universal object. We construct a pair of incomparable dark positive preorders that possess an infimum. It is shown that, for every non-universal positive preorder P, there are infinitely many pairwise incomparable minimal weakly precomplete positive preorders that are incomparable with P.

Keywords: positive preorder, ceer, computable reducibility, precomplete, weakly precomplete, minimal preorder.

Введение

Работа посвящена изучению позитивных предпорядков, заданных на множестве натуральных чисел ω. Под позитивным предпорядком мы понимаем вычислимо перечислимое рефлексивное и транзитивное бинарное отношение. Частный случай позитивных предпорядков – позитивные эквивалентности – изучены достаточно хорошо. Классическими работами в этой области можно считать работы Ю.Л. Ершова [1], К. Бернарди и А. Сорби [2], А. Лахлана [3], С.А. Бадаева [4], С. Гао и П. Гердеса [5]. Современное состояние исследований позитивных эквивалентностей отражено в обзоре [6], статьях [7]–[10] и работах других авторов.

Badaev, S.A., Kalmurzayev, B.S, Mukash, N.K., Khamitova, A.A. Specail classes of positive preorders.

Работа поддержана Комитетом науки МОН РК (грант AP08856493).

Поступила 1 января 2020 г., опубликована 31 декабря 2020 г.

Если E – позитивная эквивалентность, то на фактор-множестве ω/E можно задавать функции и отношения и получать интересные структуры с относительно вычислимыми свойствами. Мотивацией такого подхода послужила для нас работа Ф. Монтаньи и А. Сорби [11], в которой в качестве E берется отношение доказуемой эквивалентности предложений арифметики Пеано, а операции на ω/E естественно порождаются логическими связками. Некоторые современные исследования в области позитивных эквивалентностей идут в противоположном направлении, решая, например, вопросы о представимости линейных порядков [9] или булевых алгебр [10] в виде фактор-структуры ω/E для подходящей позитивной эквивалентности E. В настоящей работе для каждого позитивного предпорядка P мы вводим так называемый *носитель* E предпорядка P, т.е. максимальную позитивную эквивалентность, содержащуюся в предпорядке P, и фактически работаем с частично упорядоченным множеством ω/E. На основе понятия носителя мы обобщаем некоторые известные понятия и результаты теории позитивных эквивалентностей на позитивные предпорядки.

Если R и S – это предпорядки на ω, то говорят, что R *вычислимо сводится* к S (обозначается через $R \leq_c S$), если существует вычислимая функция f, такая что $xRy \Leftrightarrow f(x)Sf(y)$ для любых $x, y \in \omega$. Предпорядки R и S называют *эквивалентными* (обозначается через $R \equiv_c S$), если $R \leq_c S$ и $S \leq_c R$. Предпорядки R и S называются *вычислимо изоморфными*, если существует вычислимая перестановка множества ω, сводящая R к S. Позитивный предпорядок называется *универсальным*, если любой позитивный предпорядок вычислимо сводится к нему. Известное понятие *универсальной позитивной эквивалентности* было введено схожим образом, как максимальной среди всех позитивных эквивалентностей относительно вычислимой сводимости.

В разделе 1 данной работы мы приводим определения предполноты, слабой предполноты, e-полноты, равномерно конечной предполноты и эффективной неотделимости позитивных предпорядков и доказываем существование универсальных позитивных предпорядков указанных выше типов. В разделе 2 мы исследуем вопросы существования точных верхних и нижних граней несравнимых позитивных предпорядков. А в разделе 3 для произвольного не универсального позитивного предпорядка P мы показываем существование бесконечного числа попарно не сравнимых слабо предполных минимальных позитивных Предпорядков, не сравнимых с P.

1. Специальные классы позитивных предпорядков

Напомним некоторые понятия, оказавшиеся плодотворными при исследовании универсальных позитивных эквивалентностей. Понятие предполной эквивалентности было введено А.И. Мальцевым в работе [12]. Оно сыграло значительную роль в различных областях теории вычислимости, в том числе в теории позитивных эквивалентностей. Эквивалентность E называется *предполной*, если она содержит хотя бы два класса эквивалентности и для любой частично вычислимой функции φ найдется вычислимая функция f такая, что $\varphi(x)Ef(x)$ для всех $x \in \mathrm{dom}(\varphi)$.

Согласно определению А. Лахлана [3], позитивная эквивалентность S называется *e-полной* (от *extension complete*), если для любой позитивной эквивалентности R и любой конечной функции f, являющейся вложением $\langle \mathrm{dom}(f), R \restriction$

$\mathrm{dom}(f)\rangle$ в $\langle \omega, S\rangle$, и для любого $i \in \omega \setminus \mathrm{dom}(f)$ можно по числу i, каноническому номеру функции f и вычислимо перечислимому индексу отношения R эффективно найти число j такое, что $f \cup \{\langle i, j\rangle\}$ является вложением $\langle \mathrm{dom}(f) \cup \{i\}, R\rangle$ в $\langle \omega, S\rangle$. В [3] установлено, что e-полные позитивные эквивалентности и предполные позитивные эквивалентности являются универсальными и образуют два различных типа вычислимого изоморфизма.

Определение 1. *Пусть P – произвольный предпорядок. Отношение эквивалентности $E = \{(x, y) :\ xPy\ \&\ yPx\}$ назовем носителем предпорядка P и обозначим эквивалентность E через* $\mathrm{supp}(P)$.

Очевидно, что носитель $\mathrm{supp}(P)$ позитивного предпорядка P является позитивной эквивалентностью. Однако, обратное не верно. Действительно, если X – не вычислимо перечислимое множество, то предпорядок $Q = \{(2x, 2x+1) :\ x \in X\}$ не является позитивным, но его носитель является тождественным отношением эквивалентности Id.

Замечание 1. *Для любых предпорядков P_1, P_2, если $P_1 \leq_c P_2$, то* $\mathrm{supp}(P_1) \leq_c \mathrm{supp}(P_2)$.

Обратное утверждение не верно. Например, $\mathrm{supp}(Q) \leq_c \mathrm{supp}(\mathrm{Id})$ но $Q \not\leq_c \mathrm{Id}$.

Определение 2. *Предпорядок P назовём предполным (слабо предполным, e-полным, равномерно конечно предполным, или эффективно неотделимым), если носитель предпорядка* $\mathrm{supp}(P)$ *является предполной (соответственно, слабо предполной, e-полной, равномерно конечно предполной, или эффективно неотделимой) эквивалентностью.*

Теорема 1. *Для любого позитивного предпорядка P существует предполный позитивный предпорядок Q такой, что $P \leq_c Q$.*

Доказательство. Пусть P – произвольный позитивный предпорядок, а E – универсальная предполная эквивалентность. Тогда $\mathrm{supp}(P) \leq_c E$ посредством некоторой вычислимой фуркции f. Определим позитивный предпорядок Q следующим образом: для любых $x, y \in \omega$

$$xQy \Leftrightarrow xEy \vee (\exists u)(\exists v)[xEf(u)\ \&\ yEf(v)\ \&\ uPv]$$

Не сложно заметить, что $P \leq_c Q$ и $\mathrm{supp}(Q) = E$. В силу выбора E предпорядок Q является предполным. □

Следствие 1. *Универсальные предполные позитивные предпорядки существуют.*

Доказательство. В качестве P в доказательстве теоремы достаточно взять любой универсальный позитивный предпорядок, [13]. □

Предполные позитивные эквивалентности являются универсальными, [2], и, следовательно, все они попарно эквивалентны. Более того, нетривиальные предполные позитивные эквивалентности образуют единственный тип вычислимого изоморфизма, [3]. Для предполных позитивных предпорядков картина совершенно иная, как это вытекает из следующего следствия. В частности, предполные позитивные эквивалентности могут быть и не универсальными.

Следствие 2. *Существует бесконечно много неэквивалентных предполных позитивных предпорядков.*

Доказательство. Рассмотрим вычислимую последовательность $\{P_k\}_{k\in\omega}$ позитивных предпорядков таких, что

- $\mathrm{supp}(P_k) = \mathrm{Id}_{k+1}$,
- $(\forall i \leq j \leq k)([i]_{\mathrm{Id}_{n+1}} P_k [j]_{\mathrm{Id}_{n+1}})$.

Каждый P_k – это позитивный предпорядок, фактор которого по носителю является линейным порядком, изоморфным порядку $\{0 < 1 < 2 < \ldots < k\}$. Очевидно, что $P_j \nleq_c P_i$ для любых $i < j$. Обозначим через Q_k позитивный предпорядок, который можно построить как в доказательстве Теоремы 1, когда в качестве P выступает позитивный предпорядок P_k. Тогда $Q_j \nleq_c Q_i$ для любых $i < j$. □

Известно, что в каждом из следующих классов:

- позитивных слабо предполных эквивалентностей,
- позитивных e-полных эквивалентностей,
- позитивных равномерно конечно предполных эквивалентностей,
- позитивных эффективно неотделимых эквивалентностей,–

существуют универсальные эквивалентности, см. обзорную статью [6]. Применяя конструкцию доказательства Теоремы 1, получаем следующее

Следствие 3. *Для любого позитивного предпорядка P существует позитивный предпорядок Q из каждого из перечисленных выше классов такой, что $P \leq_c Q$.*

2. Точные верхние и нижние грани

Множество позитивных предпорядков относительно вычислимой сводимости $\leq_c$ является предпорядковой структурой, фактор структура которой по отношению эквивалентности $\equiv_c$ образует частично упорядоченное множество относительно упорядочения, индуцированного $\leq_c$. Допуская некоторую вольность речи, будем говорить, что позитивный предпорядок P состоит из классов эквивалентности (точнее, классов эквивалентности его носителя $\mathrm{supp}(P)$), связанных отношением P.

Одними из важных проблем при изучении любых упорядоченных структур являются вопросы существования наименьших верхних граней и наибольших нижних граней. В работе [7] исследовались вопросы существования супремумов и инфимумов степеней позитивных эквивалентностей относительно вычислимой сводимости. Результаты этой работы сведены в нижеследующие таблицы:

X	Y	$X \wedge Y$?
light	light	-иногда НЕТ -иногда ДА
dark	dark	НЕТ
light	dark	НЕТ

Таблица 1. *Существование инфимумов в структуре позитивных эквивалентностей*

X	Y	$X \vee Y$?
light	light	-иногда НЕТ -иногда ДА
dark	dark	НЕТ
light	dark	-иногда НЕТ -иногда ДА

Таблица 2. *Существование супремумов в структуре позитивных эквивалентностей*

Конечно же в этих таблицах рассматривались несравнимые позитивные эквивалентности X и Y.

Напомним (см., например, [6]), что через Id_n обозначается эквивалентность с n вычислимыми классами. Через Id обозначается тождественная эквивалентность. Эквивалентность E называется *тёмной (dark)*, если E не сравнима с Id. Эквивалентность E с бесконечно многими классами называется *светлой (light)*, если она не тёмная.

Используя естественный подход, намеченный в разделе 1, введем понятия тёмного, светлого и конечного предпорядков следующим образом.

Определение 3. *Позитивный предпорядок P называется тёмным (конечным, светлым), если носитель $\mathrm{supp}(P)$ является тёмной эквивалентностью (состоит из конечного числа классов; не является ни конечной, ни тёмной эквивалентностью).*

Отметим, что в работе [8] введено несколько иное понятие тёмного позитивного предпорядка P для случая, когда P индуцирует линейный порядок на $\mathrm{supp}(P)$.

Так как позитивные эквивалентности являются также позитивными предпорядками, то на вопросы существования супремумов и инфимумов в приведённых выше таблицах случаи с ответами "иногда ДА, иногда НЕТ" можно не рассматривать. В данной работе мы рассмотрим только случай, когда оба предпорядка являются тёмными.

Теорема 2. *Существуют несравнимые тёмные позитивные предпорядки, имеющие наибольшую нижнюю грань.*

Доказательство. Пусть S – простое множество. Тогда $R_S = \{(x,y) : x = y \vee \{x,y\} \subseteq S\}$ – тёмная позитивная эквивалентность. Определим предпорядки P и Q следующим образом:

$$P = R_S \oplus \mathrm{Id}_1;$$

$$Q = R_S \oplus \mathrm{Id}_1 \cup \{(2x, 2y+1) : x \in S\}.$$

Очевидно, что позитивные предпорядки P и Q являются тёмными. Покажем, что они не сравнимы, а R_S является их точной нижней гранью. Нетрудно заметить, что предпорядок P является позитивной эквивалентностью и что у позитивного предпорядка Q в точности два класса эквивалентности $2S$ и $2\omega + 1$ являются связанными, в частности, Q не является эквивалентностью. Ясно, что предпорядок, вычислимо сводимый к любой эквивалентности, сам является эквивалентностью. Отсюда сразу получаем, что $Q \not\leq_c P$.

Докажем, что и $P \nleq_c Q$. Допустим, что $P \leq_c Q$ посредством вычислимой функции f. В силу сводимости, образ функции f не может пересекать оба связанных Q-класса $2S$ и $2\omega+1$. Если $\mathrm{range}(f) \cap 2S = \emptyset$, то $2S$ является прообразом вычислимого множества, а это невозможно. Если же $\mathrm{range}(f) \cap 2S \neq \emptyset$, то функция $f([\frac{x}{2}])$ осуществляет не сюръективную сводимость $R_S \leq_c R_S$, что также невозможно. Таким образом, позитивные предпорядки P и Q не сравнимы.

Ясно, что R_S является нижней гранью P и Q. Пусть позитивный предпорядок T является нижней гранью предпорядков P и Q. Так как P является эквивалентностью и $T \leq_c P$, то предпорядок T также является эквивалентностью. Пусть $T \leq_c Q$ посредством вычислимой функции g. Как и выше, заметим, что $\mathrm{range}(g)$ не может пересекать оба связанных Q-класса $2S$ и $2\omega+1$ и рассмотрим два случая.

Случай 1. $\mathrm{range}(g) \cap 2S = \emptyset$. Так как все Q-классы эквивалентности, кроме класса $2S$ являются вычислимыми, то все классы эквивалентности T также являются вычислимыми. Докажем от противного, что количество классов эквивалентности в T конечно. Допустим, что T имеет бесконечно много классов эквивалентности. Тогда $\mathrm{range}(g)$ состоит из бесконечного числа Q-классов. Следовательно, вычислимо перечислимое множество $\mathrm{range}(g) \setminus (2\omega + 1 \cup 2S)$ является бесконечным, а это невозможно ввиду простоты множества S. Итак, T является разбиением ω на конечное число вычислимых множеств, и, следовательно, $T \leq_c R_S$.

Случай 2. $\mathrm{range}(g) \cap 2S \neq \emptyset$. Тогда $\mathrm{range}(g) \cap 2\omega + 1 = \emptyset$ и вычислимая функция $\frac{g(x)}{2}$ осуществляет сводимость эквивалентности T к R_S.

Следовательно, R_S является наибольшей нижней гранью позитивных предпорядков P и Q. $\square$

3. Слабо предполные минимальные позитивные предпорядки

Для позитивных эквивалентностей в работе [7] У.Андрюсом и А.Сорби был установлен следующий факт.

Теорема 3. *Пусть R - не универсальная позитивная эквивалентность. Тогда найдётся бесконечно много попарно не сравнимых позитивных эквивалентностей $\{E_l\}_{l\in\omega}$ таких, что для каждых l и позитивной эквивалентности X*

(1) $E_l \nleq R$
(2) $X \leq E_l \Rightarrow (\exists n)[X \leq \mathrm{Id}_n]$

Заметим, что в Теореме 3 нет необходимости строить бесконечную последовательность эквивалентностей $\{E_l\}_{l\in\omega}$, достаточно строить только одну. Кроме того, можно дополнительно потребовать, чтобы эта эквивалентность была слабо предполной. Используя идеи доказательства Теоремы 3, мы докажем её аналог для позитивных предпорядков.

Определение 4. *Предпорядок P назовем минимальным, если для любого предпорядка X сводимость $X \leq_c P$ влечёт сводимость $P \leq_c X$ или конечность числа классов эквивалентности носителя* $\mathrm{supp}(P)$.

Теорема 4. *Для любого не универсального позитивного предпорядка R найдется слабо предполный минимальный позитивный предпорядок P, не сводящийся к R.*

Доказательство. Пусть R – не универсальный позитивный предпорядок. Построим позитивный предпорядок P, удовлетворяя следующие требования для любых $i, j, k, e \in \omega$:

$P_{i,j}$: Если множество W_i пересекает бесконечно много классов эквивалентности $\mathrm{supp}(P)$, то оно пересекает класс $[j]_{\mathrm{supp}(P)}$.

T_k : φ_k не является сводящей функцией P к R.

WP_e : Если φ_e всюду определена, то $\exists x_e((x_e, \varphi_e(x_e)) \in \mathrm{supp}(P))$.

Основной операцией в нашем построении является операция рефлексивного и транзитивного замыкания, обозначаемая символом $*$: для произвольного бинарного отношения X через X^* обозначается наименьший предпорядок, содержащий X. Каждый раз, когда в строящийся предпорядок добавляется одна или несколько пар чисел, для полученного бинарного отношения немедленно выполняется операция $*$.

Через $(R^s)_{s\in\omega}$ обозначим равномерно вычислимую последовательность позитивных предпорядков со свойствами: $R^0 = \mathrm{Id}, \bigcup_{s\in\omega} R^s = R$, для каждого s имеет место следующее соотношение: $R^{s+1} = (R^s \cup \{(x_s, y_s)\})^*$ для некоторой пары чисел (x_s, y_s).

Под ***большим*** числом мы понимаем число, которое больше всех чисел, уже использованных в построении.

Изолированная стратегия удовлетворения требования $P_{i,j}$:

(1) Выбираем большое число t.

(2) Если $W_i \cap [j]_{\mathrm{supp}(P)} = \emptyset$, то ждём пока $W_i \cap [k]_{\mathrm{supp}(P)} \neq \emptyset$ для некоторого $k \geq t$.

(3) Добавляем пары (j, k) и (k, j) в P.

Изолированная стратегия удовлетворения требования T_k:

Фиксируем универсальный позитивный предпорядок U.

(1) Выбираем *свежие* (т.е. ранее не использованные) числа a_0, a_1 и полагаем параметр r этой стратегии равным 1.

(2) Для всех различных $i, j \leq r$ ставим запрет на добавление пар (a_i, a_j) в P, если они уже не находятся в P. Этот запрет относится только к стратегиям, отличным от T_k.

(3) Ждём, пока все значения $\varphi_k(a_0), \varphi_k(a_1), ..., \varphi_k(a_r)$ станут определёнными на некотором шаге s.

(4) Если для всех $i, j \leq r$

$$a_i P^s a_j \Leftrightarrow \varphi_k(a_i) R^s \varphi_k(a_j), \qquad (\dagger)$$

то добавляем пары (a_i, a_j) в P для всех $i, j \leq r$ таких, что $iU^s j$, увеличиваем на 1 значение параметра r, выбираем свежий элемент a_r и переходим к пункту (2).

Изолированная стратегия удовлетворения требования WP_e:

(1) Выбираем свежее число x_e.

(2) Ждём, пока определится значение $\varphi_e(x_e)$.

(3) Добавляем пары $(\varphi_e(x_e), x_e)$ и $(x_e, \varphi_e(x_e))$ в P.

Понятно, что выполнение всех требований $T_k, k \in \omega$, и $WP_e, e \in \omega$, гарантирует несводимость предпорядка P к R и слабую предполноту P. Покажем, что выполнение всех требований $P_{i,j}, i, j \in \omega$, гарантирует минимальность предпорядка P. Действительно, пусть X – произвольный позитивный предпорядок, сводящийся к P посредством некоторой вычислимой функции f. И пусть W_i

есть range(f). Если множество W_i пересекает только конечное число классов эквивалентности supp(P), то прообразом f может быть только позитивный предпорядок, носитель которого состоит из конечного числа классов эквивалентности. Если же W_i пересекает бесконечно много классов эквивалентности, то стратегии $P_{i,j}, j \in \omega$, в совокупности дают равенство $[\mathrm{range}(f)]_{\mathrm{supp}(P)} = \omega$ и вследствие позитивности предпорядка P не сложно построить вычислимую сводящую функцию для сводимости $P \leq_c X$. Таким образом, P является минимальным позитивным предпорядком.

Конфликты стратегий. Очевидно, что стратегии $P_{i,j}$ и WP_e не конфликтуют между собой. Конфликты могут возникнуть, когда одна из этих стратегий желает добавить некоторую пару чисел в P, а эта пара уже находится под запретом, наложенным некоторой стратегией T_k. Заметим, что запреты налагаются только стратегиями T_k. Казалось бы, что стратегия $T_{k'}$ для $k' \neq k$ может препятствовать стратегии T_k перечислить в P пару (a_i, a_j) при выполнении пункта (4), налагая запрет на эту пару. Однако это не происходит, поскольку выбор параметров $a_0, a_1, \ldots, a_r$ в обеих стратегиях $T_{k'}$ и T_k производится из свежих чисел. По той же причине, параметры x_e, выбираемые стратегией WP_e, не могут быть компонентой ни одной пары, запрещённой ни одной из стратегий T_k. Таким образом, в нашем построении предпорядка P мы должны заботиться только о разрешении конфликтов стратегий $P_{i,j}$ и T_k.

Способ разрешения такого рода конфликтов давно известен – это метод приоритета, в данном случае метод приоритета с конечными нарушениями. Мы считаем, что все стратегии линейно упорядочены: $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$, причём по номеру k можно эффективно восстановить вид стратегии и её индексы. Будем говорить, что стратегия S_k имеет больший приоритет, чем S_n, если $k < n$.

На каждом шаге s конструкции рассматривается в точности одна из стратегий $S_l, l \in \omega$, обозначаемая через S^s, при этом S^s является вычислимой функцией аргумента s и для любого l существует бесконечно много s таких, что $S^s = S_l$. К концу любого шага s стратегия S_l может быть либо *активной*, либо *пассивной*. На шаге 0 все стратегии пассивны. Активная (пассивная) на шаге s стратегия остаётся таковой до тех пор, пока на некотором большем шаге она не объявляется пассивной (соответственно, активной). Активная стратегия, ставшая пассивной, может быть реактивизирована на некотором большем шаге.

Активизация (реактивизация) стратегии S_l означает выбор её параметров: для стратегий $P_{i,j}$, T_k и WP_e это выполнение пункта (1) этих стратегий, параметрами являются соответственно числа t, r, a_0, a_1 и x_e. По ходу конструкции значение параметра r стратегии T_k может быть увеличено, а в список её параметров могут быть добавлены свежие числа a_r, как это описано в пункте (4) этой стратегии. Кроме параметров r, a_0, a_1 стратегия T_k при активизации формирует множество res(k), состоящее из пар чисел, которые стратегия T_k запрещает добавлять в P всем стратегиям меньшего приоритета. При активизации (реактивизации) res(k) состоит из двух пар (a_0, a_1) и (a_1, a_0), к которым при увеличении параметра r добавляются новые пары в соответствии с пунктом (4) описания стратегии T_k.

Объявление стратегии пассивной сопровождается тем, что все её параметры становятся неопределёнными, а множество запретов $\mathrm{res}(k)$ стратегии T_k опустошается. После этого стратегия реактивизируется на большем шаге.

Конструкция. Предпорядок P строится по шагам. Через P^s обозначается предпорядок на ω, содержащий конечное число пар (x, y) с $x \neq y$, построенный к концу шага s.

Будем говорить, что активная стратегия S^{s+1} *требует внимания*, если

(1) $S^{s+1} = S_l$ и S_l есть стратегия $P_{i,j}$ для некоторых i, j и выполнено условие: если $W_i^s \cap [j]_{\mathrm{supp}(P^s)} = \emptyset$, то $W_i^s \cap [m]_{\mathrm{supp}(P^s)} \neq \emptyset$ для некоторого $m \geq t$ такого, что $\{(j,m),(m,j)\} \cap \mathrm{res}(l') = \emptyset$ для всех $l' < l$, либо

(2) $S^{s+1} = S_l$ и S_l есть стратегия T_k и значения $\varphi_k(a_0), \varphi_k(a_1), ..., \varphi_k(a_r)$ определены на шаге s для всех параметров $a_0, a_1, \ldots, a_r$ стратегии T_k и выполнено (†), либо

(3) $S^{s+1} = S_l$ и S_l есть стратегия WP_e для некоторого e, $(y, \varphi_e(y)) \notin \mathrm{supp}(P^s)$ для каждого $y \in \mathrm{dom}(\varphi_e^s)$ и $\varphi_e^s(x_e)$ определено.

Шаг 0. Полагаем $P^0 = \mathrm{Id}, \mathrm{res}(l) = \emptyset$ для любых l. Все стратегии на шаге 0 объявляем пассивными. Переходим к следующему шагу.

Шаг $s+1$**.** Если стратегия S^{s+1} является пассивной, то активизируем (реактивизируем) её и переходим к следующему шагу. Если стратегия S^{s+1} является активной, но не требует внимания, то ничего на изменяя переходим к следующему шагу. Наконец, если стратегия S^{s+1} требует внимания, то рассмотрим три случая.

(1) $S^{s+1} = S_l$ и S_l есть стратегия $P_{i,j}$ для некоторых i, j. Если $W_i^s \cap [j]_{\mathrm{supp}(P^s)} \neq \emptyset$, то сразу переходим к следующему шагу. В противном случае выбираем наименьшее число $m \geq t$ такое, что класс эквивалентности $[m]_{\mathrm{supp}(P^s)}$ содержит число из W_i^s и обе пары $(j,m),(m,j)$ не содержатся ни в одном из множеств $\mathrm{res}(l'), l' < 1$; полагаем $P^{s+1} = (P^s \cup \{(j,m),(m,j)\})^*$; объявляем все стратегии $S'_l, l > l'$, пассивными.

(2) $S^{s+1} = S_l$ и S_l есть стратегия WP_e для некоторого e. Пусть x_e – параметр стратегии WP_e. Полагаем $P^{s+1} = (P^s \cup \{(x_e, \varphi_e(x_e)), (\varphi_e(x_e), x_e)\})^*$. Объявляем все стратегии $S'_l, l > l'$, пассивными.

(3) $S^{s+1} = S_l$ и S_l есть стратегия T_k для некоторого k. Пусть $r, a_0, a_1, \ldots, a_r$ – её параметры. Полагаем $P^{s+1} = (P^s \cup \{(a_i, a_j) : i, j \leq r \,\&\, (i.j) \in U^s\})^*$. Увеличиваем значение параметра r на единицу. Полагаем параметр a_{r+1} равным наименьшему свежему числу. Добавляем в res_k все пары чисел $(a_1, a_{r+1}), (a_{r+1}, a_i), i \leq r$. Объявляем все стратегии $S'_l, l > l'$, пассивными.

Переходим к следующему шагу.

Верификация. Очевидно, что для любого s каждая стратегия, являющаяся пассивной на шаге s, будет активизирована (реактивизирована) на некотором большем шаге.

Лемма 1. *Каждая стратегия требует внимания только конечное число раз.*

Доказательство. Для упрощения доказательства будем считать, что S_0 – это T_0, а φ_0 – нигде не определённая функция. Тогда стратегия S_0 активизируется ровно один раз и никогда не требует внимания.

Индукционный шаг. Пусть после некоторого шага s_0 ни одна из стратегий $S_0, S_1, \ldots, S_{l-1}$ не требует внимания. Докажем, что после некоторого шага $s_1 \geq$

s_0 стратегия S_l также не будет требовать внимания. Не трудно заметить, что если S_l это одна из стратегий $P_{i,j}$ или WP_e, то после шага s_0 стратегия S_l может потребовать внимания не более одного раза.

Предположим теперь, что S_l есть стратегия T_k для некоторого k и S_l требует внимания на бесконечно многих шагах $s > s_0$. В силу выбора s_0, стратегия S_l не может быть объявлена пассивной и на всех этих шагах выполняется соотношение †. Тогда последовательность параметров $a_0, a_1, a_2, \dots$ является бесконечной, функция φ_e является всюду определённой, и, следовательно, вычислимая функция $\varphi_e(a_i)$ переменной i сводит универсальный позитивный предпорядок U к предпорядку R, что невозможно. □

Лемма 2. *Все требования $P_{i,j}$, WP_e, T_k удовлетворены.*

Доказательство. Пусть S_l есть любая из стратегий $P_{i,j}$, WP_e, T_k и пусть s_0 – наименьший шаг, после которого ни одна из стратегий $S_0, S_1, \dots, S_l$ не требует внимания. Существование такого шага следует из Леммы 1. Покажем, что стратегия S_l будет удовлетворена на или после шага s_0. Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1. S_l есть стратегия $P_{i,j}$ для некоторых i, j, причем W_i пересекает бесконечно много классов эквивалентности $\mathrm{supp}(P)$, а число j произвольное. Ввиду выбора s_0 множество $\bigcup_{l'<l} \mathrm{res}_{l'}$ конечно. Следовательно, существует бесконечно много чисел $m \in W_i$, отличных от компонентов всех пар этого множества. Пусть $s_1 + 1 > s_0$ некоторый шаг, для которого одно из таких достаточно больших чисел m содержится в $W_i^{s_1}$, и S^{s_1+1} есть стратегия $P_{i,j}$. Тогда $W_i^{s_1} \cap [j]_{\mathrm{supp}(P^s)} \neq \emptyset$, иначе на шаге $s_1 + 1$ стратегия S_l потребует внимания, что противоречит выбору шага s_0.

Случай 2. S_l есть стратегия WP_e для некоторого e, причём функция φ_e является всюду определённой. Пусть на шаге $s_2+1 > s_0$ параметр x_e и значение $\varphi_e(x_e)$ определены, и S^{s_2+1} есть стратегия WP_e. Тогда $(y, \varphi_e(y)) \in \mathrm{supp}(P^{s_2})$ для некоторого $y \in \mathrm{dom}(\varphi_e^{s_2})$, иначе на шаге $s_2 + 1$ стратегия S_l потребует внимания, что противоречит выбору шага s_0.

Случай 3. S_l есть стратегия T_k для некоторого k, причём функция φ_k является всюду определённой. Поскольку стратегия T_k не требует внимания после шага s_0, список её параметров стабилизируется на некотором конечном множестве $a_0, a_1, \dots, a_r$, стабилизируется множество запретов res_k, и к некоторому шагу $s_3 + 1 > s_0$, для которого S^{s_3+1} есть T_k, все значения $\varphi_k(a_0), \varphi_k(a_1), \dots, \varphi_k(a_r)$ будут определены и для всех $i, j \leq r$ выполнятся соотношения:

$$\varphi_k(a_i) R \varphi_k(a_j) \iff \varphi_k(a_i) R^{s_3} \varphi_k(a_j), \quad iUj \iff iU^{s_3} j.$$

Следовательно, на шаге $s_3 + 1$ нарушено соотношение †. В силу выбора s_0, ни одна из пар $(a_i, a_j), i, j \leq r$, не может быть перечислена в P стратегиями большего приоритета и тем более не может быть перечислена в P стратегиями меньшего приоритета, чем S_l. Отсюда вытекает, что $a_i P^{s_3} a_j \iff a_i P a_j$ для всех $i, j \leq r$. Следовательно, сводимость $P \leq_c R$ посредством вычислимой функции φ_k нарушается хотя бы на одной паре чисел $(a_i, a_j) \in \mathrm{res}_k$.

Таким образом, в каждом из рассмотренных выше трёх случаев конструкция обеспечивает выполнение соответствующего требования. □

Теорема доказана.

□

Следствие 4. *Для любого не универсального позитивного предпорядка R найдется бесконечно много попарно не сравнимых слабо предполных минимальных позитивных предпорядков, каждый из которых не сводится к R.*

Доказательство. По Теореме 4 для предпорядка R найдется слабо предполный минимальный предпорядок P_0, не сравнимый с R. Рассмотрим позитивный предпорядок $R_1 = R \oplus P_0$. Тогда $\mathrm{supp}(R_1)$ не является универсальной позитивной эквивалентностью, поскольку универсальная позитивная эквивалентность не разлагается в прямую сумму несравнимых эквивалентностей, [1]. Следовательно, R_1 не является универсальным позитивным предпорядком. Применяя Теорему 4, получим слабо предполный минимальный предпорядок P_1, не сравнимый с R_1, а, значит, не сравнимый ни с R, ни с P_0. Итерируя этот процесс, получим требуемую последовательность слабо предполных минимальных предпорядков. □

References

[1] Ershov Yu.L., *Positive equivalence*, Algebra and Logic, **10**:6, (1973), 378–394.
[2] Bernardi C., and Sorbi A., *Classifying positive equivalence relations*, Journal of Symbolic Logic, **48**:3, (1983), 529–538.
[3] Lachlan A.H., *A note on positive equivalence relations*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., **33**:1, (1987), 43–46.
[4] Badaev S.A., *On weakly-precomplete positive equivalences*, Siberian Mathematical Journal, **32**:2, (1991), 321–323.
[5] Gao S., Gerdes P., *Computably enumerable equivalence relations*, Studia Logica, **67**:1, (2001), 27–59.
[6] Andrews U., Badaev S., Sorbi A., *A survey on universal computably enumerable equivalence relations.* In: Day A., Fellows M., Greenberg N., Khoussainov B., Melnikov A., Rosamond F. (eds) Computability and Complexity. Lecture Notes in Computer Science, **10010**, (2017), 418–451.
[7] Andrews U., Sorbi A., *Join and meets in the structure of ceers*, Computability, **8**:3-4, (2019), 193–241.
[8] Bazhenov N.A., Kalmurzayev B.S., *On dark computably enumerable relations*, Siberian Mathematical Journal, **59**:1, (2018) , 22–30.
[9] Fokina E., Khoussainov B., Semukhin P., Turetsky D., *Linear orders realised by c.e. equivalence relations*, Journal of Symbolic Logic, **81**:2, (2016), 463–482.
[10] Bazhenov N., Mustafa M., Stephan F., Yamaleev M., *Boolean algebras realised by c.e. equivalence relations*, Siberian Eletronic Mathematical Reports, **14**:1, (2017), 848–855.
[11] Montagna F., Sorbi A., *Universal recursion-theoretic properties of r.e. preordered structures*, Journal of Symbolic Logic, **50**, (1985), 397–406.
[12] Mal'tsev A.I., *Constructive algebras. 1*, Uspekhi Mat. Nauk, **16**:3, (1961), 3–60.
[13] Badaev S.A., Kalmurzayev B.S., Kabylzhanova D.K., Abeshev K.Sh, *Universal positive preorders*, News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan – Series Physico-Mathematical, **322**:6 (2018), 49–53.

Serikzhan Badaev, Birzhan Kalmurzayev, Nazgul Mukash
Kazakh-British Technical University,
Tole Bi str. 59,
050000, Almaty, Kazkhstan
Email address: s.badaev@kbtu.kz, birzhan.kalmurzayev@gmail.com, mukash.nazgul1@gmail.com

Aruna Khamitova
M.Utemisov WKSU,
Dostyk-Druzhby Ave. 162,
090000, Uralsk, Kazkhstan
Email address: arunabaevna@gmail.com