S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1–20 (2020) УДК 510.67:514.116
DOI 10.33048/semi.2020.17.001 MSC 03C07, 03C60, 03G15, 20N02

СТРУКТУРА АЛГЕБР БИНАРНЫХ ФОРМУЛ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ С УСЛОВИЕМ СИММЕТРИИ

Д.Ю. ЕМЕЛЬЯНОВ, С.В. СУДОПЛАТОВ

Abstract. We describe the structure of algebras of binary formulas for polygonometrical theories with the symmetry condition. The concepts of pseudo-Euclidean and interval algebras for binary formulas are introduced. Questions of existence of such algebras in classes of polygonometrical theories are investigated.

Keywords: algebra of binary formulas, polygonometrical theory with symmetry condition, pseudo-Euclidean algebra, interval algebra.

Понятия полигонометрии групп и полигонометрической теории [1, 2] имеют следующие основные предпосылки и возможности. С одной стороны, полигонометрии групп являются естественными обобщениями классических тригонометрий и полигонометрий, которые находят широкое применение во многих областях жизни [3, 4, 5, 6, 7]. С другой стороны, полигонометрии групп позволяют реализовывать структурные свойства для решения некоторых известных теоретико-модельных проблем [1, 8, 9, 10]. С третьей стороны, многие классы полигонометрических теорий имеют хорошее структурное описание и допускают естественную классификацию [1, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18].

Среди всех полигонометрий групп следует выделить: 1) полигонометрии групп с особыми элементами, позволяющие, в частности, строить стабильные

Emelyanov, D.Yu., Sudoplatov, S.V., Structure of algebras of binary formulas for polygonometrical theories with the symmetry condition.

© 2020 Емельянов Д.Ю., Судоплатов С.В.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00531-а) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05132546).

Поступила 20 декабря 2019 г., опубликована 15 января 2020 г.

властные орграфы [1, 9, 10, 20]; 2) полигонометрии пар групп, для которых одна из групп служит для измерения расстояний между точками, а вторая — для измерения углов между линиями [1, 19]; 3) полигонометрии групп с условиями симметрии, к которым относятся классические тригонометрии и полигонометрии [1, 21].

В настоящей работе продолжаются исследования по описанию алгебр бинарных формул [22, 23] полигонометрических теорий [1], начатые в [24], рассматриваются алгебры бинарных формул полигонометрических теорий с условием симметрии, описывается структура и исследуется специфика этих алгебр. Эта специфика связана с вводимыми понятиями псевдоевклидовых и интервальных алгебр. Доказано существование таких полигонометрий для любой коммутативной линейно упорядоченной группы, рассматриваемой в виде группы сторон.

В работе используется терминология, относящаяся к алгебрам бинарных формул, а также к полигонометриям и их элементарным теориям [1, 22, 24].

Мы будем рассматривать алгебры $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул элементарных теорий $T(\mathrm{spm})$ s-полигонометрий spm, т.е. полигонометрий с условием симметрии, и, в частности, элементарных теорий $T(\mathrm{strm})$ s-тригонометрий strm пар групп (G_1, G_2) [1].

Работа состоит из следующих разделов. В разделе 1 приводятся необходимые сведения о полигонометриях групп и о полигонометрических теориях [1]. В разделе 2 дается система понятий и обозначений для алгебр бинарных формул [22, 23]. В разделе 3 описывается структура и специфика алгебр бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий с условием симметрии. В разделе 4 охарактеризованы детерминированные и почти детерминированные алгебры бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий. В разделе 5 изучены расширения псевдоплоскостей полигонометрий с условием симметрии до плоскостей, а также введены псевдоевклидовы и интервальные алгебры бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий и решены вопросы их существования.

1. Полигонометрии групп и полигонометрические теории

Полигонометрии групп (в частности, тригонометрии групп) представляют собой объекты на (псевдо)плоскостях, наделенные действиями групп, которые позволяют измерять длины отрезков и величины углов. При этом приводимые ниже понятия полигонометрии и s-полигонометрии отличаются тем, что в первом случае длины отрезков и величины углов могут быть несимметричными, т.е. переход от точки p_1 до точки p_2 на некоторой линии (также как и переход от линии l_1 до линии l_2, при наличии общих точек у этих линий) и обратный переход могут соответствовать разным элементам группы.

Система $\mathcal{P} = \langle P, L, I\rangle$, где P — множество *точек*, L — множество *линий*, $I \subseteq P \times L$ — *отношение инцидентности*, называется *точной* (λ_1, λ_2)-*псевдоплоскостью*, где λ_1, λ_2 — некоторые кардиналы, если выполняются следующие предложения:

$$\forall p \in P \ \ \exists^{=\lambda_1} l \in L \ \ I(p, l), \quad \forall l \in L \ \ \exists^{=\lambda_2} p \in P \ \ I(p, l),$$

$$\forall p_1 \neq p_2 \in P \ \ \exists^{\leq 1} l \in L \ \ (I(p_1, l) \wedge I(p_2, l)),$$

$$\forall l_1 \neq l_2 \in L \ \ \exists^{\leq 1} p \in P \ \ (I(p, l_1) \wedge I(p, l_2)).$$

Здесь $\exists^{=\lambda}$ означает "существует ровно λ", а $\exists^{\leq 1}$ — "существует не более одного".

Точную (λ_1, λ_2)-псевдоплоскость $\mathcal{P}$ будем называть *псевдоплоскостью*, если из контекста ясно, о каких кардиналах λ_1 и λ_2 идёт речь.

Пусть $\mathcal{P} = \langle P, L, \in \rangle$ — (λ_1, λ_2)-псевдоплоскость. Если p_1, p_2 — точки псевдоплоскости $\mathcal{P}$, то наименьшее число n, для которого существуют линии $l_1, \ldots, l_n$ с условиями $p_1 \in l_1$, $p_2 \in l_n$, $l_i \cap l_{i+1} \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n-1$, называется *расстоянием* $d(p_1, p_2)$ *между точками* p_1 *и* p_2, если такая последовательность линий существует, и $d(p_1, p_2) \rightleftharpoons \infty$, если такой последовательности нет; $d(p_1, p_1) \rightleftharpoons 0$.

Пусть $\mathcal{P}' = \langle P', L', \in \rangle$ — (λ_1, λ_2)-псевдоплоскость, для которой $P' \subseteq P$, $L' \subseteq L$ и P', L' — максимальные подмножества P и L соответственно такие, что расстояния между любыми двумя точками конечны. Тогда псевдоплоскость $\mathcal{P}'$ называется *связной компонентой* или *компонентой связности* псевдоплоскости $\mathcal{P}$. Число связных компонент псевдоплоскости $\mathcal{P}$ обозначается через $c(\mathcal{P})$. Псевдоплоскость $\mathcal{P}$ называется *связной*, если $c(\mathcal{P}) = 1$. *Диаметром* $d(\mathcal{P})$ псевдоплоскости $\mathcal{P}$ называется наибольшее расстояние между точками, принадлежащими одной и той же связной компоненте, если такое расстояние существует, и полагается $d(\mathcal{P}) \rightleftharpoons \infty$, если расстояния в некоторой связной компоненте не ограничены.

Точная (λ_1, λ_2)-псевдоплоскость $\mathcal{P}$ называется *плоскостью*, если выполняется

$$\forall p_1 \neq p_2 \in P \; \exists^{=1} l \in L \; (I(p_1, l) \wedge I(p_2, l)).$$

Плоскость $\mathcal{P}$ называется *проективной плоскостью*, если

$$\forall l_1 \neq l_2 \in L \; \exists^{=1} p \in P \; (I(p, l_1) \wedge I(p, l_2)).$$

Точная (λ_1, λ_2)-псевдоплоскость называется *точной* λ*-псевдоплоскостью*, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Любая последовательность, состоящая из $n \geq 3$ точек $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, для которых существуют линии $l_1, l_2, \ldots, l_n$ такие, что $p_1, p_2 \in l_1$, $\ldots$, $p_{n-1}, p_n \in l_{n-1}$, $p_n, p_1 \in l_n$, называется n*-угольником* или *многоугольником*. Как обычно, при $n = 3$ n-угольник называется *треугольником*, при $n = 4$ — *четырёхугольником* и т.д. Последовательность точек $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ (при $n \geq 1$), для которых существуют линии $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ такие, что $p_1, p_2 \in l_1$, $\ldots$, $p_{n-1}, p_n \in l_{n-1}$, называется *ломаной*.

Обозначим через $l(p_1, p_2)$ линию, проходящую через две данные точки p_1 и p_2, где $p_1 \neq p_2$, а через $p(l_1, l_2)$ — точку пересечения двух данных линий l_1 и l_2, где $l_1 \neq l_2$.

Пусть G_1, G_2 — некоторые группы, $G_1 \neq \{e\}$. Система $\langle G_1, G_2, \mathcal{P} \rangle$ (обозначаемая через $\mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$) называется *полигонометрией пары групп* (G_1, G_2) на точной $(|G_1|, |G_2|)$-псевдоплоскости $\mathcal{P} = \langle P, L, \in \rangle$, если выполняются следующие условия:

а) для любой линии $l \in L$ (соответственно для любой точки $p \in P$) группа G_1 (соответственно G_2) действует точно транзитивно на множестве точек из l (на множестве линий, проходящих через точку p), т. е. для любых $p', p'' \in l$ существует единственный элемент $g_1 \in G_1$ такой, что $p'' = p'g_1$ на множестве l, и для любых линий l', l'', содержащих точку p, найдётся единственный элемент $g_2 \in G_2$ такой, что $l'' = l'g_2$ на множестве $\{l \in L \mid p \in l\}$;

б) для любых $p_1, p_2 \in P$ и $l_1, l_2 \in L$, если $p_1 \in l_1$ и $p_2 \in l_2$, то существует биекция $f \colon P \to P$ такая, что

i) $f(p_1) = p_2$, $f(l_1) = l_2$;

ii) $f(l)$ принадлежит множеству L для любой линии $l \in L$, и $f(\{l \mid p \in l\}) = \{l \mid f(p) \in l\}$ для любой точки $p \in P$;

iii) для любой линии l и точек $p', p'' \in l$, если $p'' = p'g_1$ на l, то $f(p'') = f(p')g_1$ на $f(l)$; для любой точки p и линий l', l'', содержащих точку p, если $l'' = l'g_2$ на множестве $\{l \mid p \in l\}$, то $f(l'') = f(l')g_2$ на множестве $\{l \mid f(p) \in l\}$.

При этом биекции f называются *автоморфизмами* полигонометрии

$$\mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P}).$$

Тригонометрией пары групп (G_1, G_2) называется любая полигонометрия $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, у которой точная псевдоплоскость $\mathcal{P}$ является плоскостью. При этом полигонометрия pm обозначается через $\mathrm{trm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$.

Напомним, что (*линейно*) *упорядоченной группой* называется группа G, на которой задан (линейный) порядок $\leq$ такой, что для любых a, b, x, y из G неравенство $a \leq b$ влечёт за собой $xay \leq xby$. *Положительным конусом* упорядоченной группы G называется множество $\mathrm{Pos}(G) \rightleftharpoons \{x \in G \mid x \geq e\}$. Для любого элемента g из линейно упорядоченной группы G через $|g|$ обозначается элемент $g' \in \mathrm{Pos}(G)$, для которого $(g')^{\pm 1} = g$.

Пусть G_1 — линейно упорядоченная группа, $\mathrm{Pos}(G_1)$ — ее положительный конус, G_2 — группа, $\mathcal{P} = \langle P, L \in\rangle$ — точная $(|G_1|, |G_2|)$-псевдоплоскость. Предположим, что для тройки $\langle G_1, G_2, \mathcal{P}\rangle$ выполняются следующие условия:

1) для любой линии $l \in L$ определено действие множества $\mathrm{Pos}(G_1)$ на множестве всех подмножеств множества l, для которого:

а) если $X \subseteq l$, то $Xg_1 = \bigcup\{\{p\}g_1 \mid p \in X\}$, $g_1 \in \mathrm{Pos}(G_1)$;

б) $\{p\}e = \{p\}$, $|\{p\}g_1| = 2$, $p \in l$, $g_1 \in \mathrm{Pos}(G_1) \setminus \{e\}$;

в) $(\{p\}g_1)g_1' = \{p\}(g_1g_1') \cup \{p\}|g_1(g_1')^{-1}|$, $p \in l$, $g_1, g_1' \in \mathrm{Pos}(G_1)$;

г) если $p, p' \in l$, то существует единственный элемент $g_1 \in \in \mathrm{Pos}(G_1)$, для которого $p' \in \{p\}g_1$;

2) существует элемент $\pi \in G_2 \setminus \{e\}$ такой, что для любой точки $p \in P$ определено действие группы G_2 на множестве $\bigcup\{l \in L \mid p \in l\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $pg_2 = p$ для любого $g_2 \in G_2$;

б) если $p'' = p'g_2$, $g_2 \in G_2 \setminus \{e\}$ и $p' \in \{p\}g_1$ на линии $l(p, p')$, то $p'' \in \{p\}g_1$ на линии $l(p, p'')$;

в) если $p \in l$, то $lg_2 \in L$ и $l\pi = l$;

г) если $p'' = p'g_2$ и $p'' = p'g_2'$, то $g_2 = g_2'$.

Ниже будем обозначать множество $\{p\}g_1$ через pg_1.

Если точки p' и p'' принадлежат линии l, как и раньше пара $p'\hat{\ }p''$ будет называться *отрезком*. Если $p'' \in p'g_1$ для множества l, то элемент g_1 называется *длиной отрезка* $p'\hat{\ }p''$ и обозначается через $|p'\hat{\ }p''|$.

Используя условия 1), можно определить трёхместное отношение на множестве P “лежать между”. Для трёх коллинеарных точек p, p', p'' будем говорить, что *точка* p' *лежит между точками* p *и* p'', если $|p\hat{\ }p''| = |p\hat{\ }p'| \cdot |p'\hat{\ }p''|$.

Если линии l' и l'' содержат общую точку p, точка p' принадлежит $l' \setminus \{p\}$, точка p'' принадлежит $l'' \setminus \{p\}$ и $|p\hat{\ }p'| = |p\hat{\ }p''|$, то тройка (p', p, p'') называется *углом* между линиями l' и l''. Если $l'' = l'g_2$ и $p'' = p'g_2$ для множества $\bigcup\{l \in L \mid p \in l\}$, то элемент g_2 называется *величиной* $\angle(p', p, p'')$ данного угла.

Величина угла $\angle(p', p, p'')$ может быть определена тройкой (p', p, p''') для любой точки $p''' \in l''$, удовлетворяющей следующим условиям: $p''' \neq p'$, и p'' лежит между точками p' и p''' или p''' лежит между точками p' и p''. Поэтому будем также писать (p', p, p''') для обозначения углов и $\angle(p', p, p''')$ для обозначения их величин.

Предположим дополнительно, что тройка $\langle G_1, G_2, \mathcal{P}\rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

3) если $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ и $(p'_0, p'_1, \ldots, p'_n)$ — ломаные (или многоугольники), $|p_{i-1}\hat{\ }p_i| = |p'_{i-1}\hat{\ }p'_i|$, $1 \leq i \leq n$, $\angle(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) = \angle(p'_{i-1}, p'_i, p'_{i+1})$, $1 \leq i \leq n-1$, то существует биекция $f\colon P \to P$ такая, что

а) $f(p_i) = p'_i$, $0 \leq i \leq n$;

б) $f(l)$ принадлежит L для любой линии $l \in L$, и $f(\{l \mid p \in l\}) = \{l \mid f(p) \in l\}$ для любой точки $p \in P$;

в) для любой линии l и её подмножеств X' и X'' если $X'' = X'g_1$ на l, то $f(X'') = f(X')g_1$ на $f(l)$;

г) для любой точки p и точек $p', p'' \in \bigcup\{l \in L \mid p \in l\}$ если $p'' = p'g_2$ на множестве $\bigcup\{l \mid p \in l\}$, то $f(p'') = f(p')g_2$ на множестве $\bigcup\{l \mid f(p) \in l\}$.

При выполнении условий 1)–3) будем говорить, что тройка $\langle G_1, G_2, \mathcal{P}\rangle$ образует *полигонометрию с условием симметрии* или *s-полигонометрию* $\mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ пары групп (G_1, G_2) на точной псевдоплоскости $\mathcal{P}$. Биекция f, удовлетворяющая условию 3, называется *автоморфизмом* s-полигонометрии $\mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$.

s-Полигонометрия $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ называется *s-тригонометрией* пары групп (G_1, G_2), если $\mathcal{P}$ — плоскость. Такие s-полигонометрии spm будут обозначаться через $\mathrm{strm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$.

Рассмотрим некоторые следствия из аксиом.

Предложение 1.1 [1, 21]. (i) (Симметричность). *Если $p'' \in p'g_1$ на некоторой линии l, то $p' \in p''g_1$ на l.*

(ii) (Коммутативность группы G_1). *Группа G_1 коммутативна.*

(iii) (Порядок элемента π). $\pi^2 = e$.

(iv) (Центральность элемента π). *Элемент π коммутирует с любым элементом из G_2.*

В силу предложения 1.1 функция длины

$$|\cdot\hat{\ }\cdot|\colon \{(p', p'') \mid p', p'' \in l \text{ для некоторой } l \in L\} \to \mathrm{Pos}(G_1)$$

симметрична и мы будем рассматривать группу G_1 как коммутативную линейно упорядоченную группу с групповой операцией $+$ и элементом $e = 0$.

Пусть $S = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — многоугольник. Для сторон $p_i\hat{\ }p_{i+1}$ и $p_n\hat{\ }p_1$ многоугольника S определим их *параметры* как элементы $a_i \in \mathrm{Pos}(G_1)$ *группы сторон* G_1, для которых $p_{i+1} \in p_i a_i$ на линии, содержащей p_i и p_{i+1}, $i = 1, \ldots, n-1$, и $p_1 \in p_n a_n$ на линии, содержащей p_n и p_1. Соответственно для углов $(p_{i-1}, l(p_{i-1}, p_i), l(p_i, p_{i+1}), p_{i+1})$, $i = 2, \ldots, n-1$, $(p_{n-1}, l(p_{n-1}, p_n), l(p_n, p_1), p_1)$ и $(p_n, l(p_n, p_1), l(p_1, p_2), p_2)$ многоугольника S определим их *параметры* как элементы α_i *группы углов* G_2, для которых $\angle(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) = \alpha_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n-1$, $\angle(p_{n-1}, p_n, p_1) = \alpha_{n-1}$ и $\angle(p_n, p_1, p_2) = \alpha_n$. Таким образом, параметры многоугольника S определяются матрицей

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Любая матрица $S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, где $a_1, \dots, a_n \in \in \mathrm{Pos}(G_1)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in G_2$, называется $(G_1, G_2, n)^s$*-угольником* или просто $(G_1, G_2)^s$*-многоугольником*. Элементы $a_1, \dots, a_n$ (соответственно $\alpha_1, \dots, \alpha_n$) вместе с их вхождениями в S называются *сторонами* (*углами*) $(G_1, G_2)^s$-многоугольника S.

Обозначим множество всех $(G_1, G_2, n)^s$-угольников, соответствующих n-угольникам s-полигонометрии $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, через $\mathbf{S}_n(\mathrm{spm})$, а также через $\mathbf{S}_n(G_1, G_2, \mathcal{P})$; $\mathbf{S}(\mathrm{spm}) \rightleftharpoons \mathbf{S}(G_1, G_2, \mathcal{P}) \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n\geq 3} \mathbf{S}_n(\mathrm{spm})$.

Если $S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ — $(G_1, G_2, n)^s$-угольник, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, то любые $2n - 3$ параметра из S, среди которых нет каких-то a_k, α_k, a_{k+1}, или $\alpha_k, a_{k+1}, \alpha_{k+1}$, или a_n, α_n, a_1 или α_n, a_1, α_1, называются *определяющими*. Нетрудно заметить, что из равенства соответствующих определяющих параметров $(G_1, G_2)^s$-многоугольников $S_1, S_2 \in \mathbf{S}_n(\mathrm{spm})$ следует, что $S_1 = S_2$. В частности, $(G_1, G_2)^s$-треугольники из $\mathbf{S}_3(\mathrm{spm})$ с ненулевыми параметрами из G_1 однозначно определяются по стороне и двум прилежащим к ней углам, а также по двум сторонам и углу между ними.

Любая матрица
$$\begin{pmatrix} a_i & a_{i+1} & \dots & a_n & a_1 & \dots & a_{i-1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} & \dots & \alpha_n & \alpha_1 & \dots & \alpha_{i-1} \end{pmatrix}$$
называется *циклической перестановкой* матрицы
$$S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$
Матрица $\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ \alpha_{n-1}^{-1} & \alpha_{n-2}^{-1} & \dots & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}$ называется *разворотом* матрицы S.

Пусть $S_1 = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k & \dots & a_m \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k & \dots & \alpha_m \end{pmatrix}$
$$\text{и}\ \ S_2 = \begin{pmatrix} a_m & \dots & a_{k+1} & a_k & b_{m-k+2} & \dots & b_n \\ \alpha_{m-1}^{-1} & \dots & \alpha_k^{-1} & \beta_{m-k+1} & \beta_{m-k+2} & \dots & \beta_n \end{pmatrix} -$$
$(G_1, G_2)^s$-многоугольники. $(G_1, G_2)^s$-Многоугольник
$$S = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{k-1} & b_{m-k+2} & \dots & b_{n-1} & b_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{k-1}\beta_{m-k+1} & \beta_{m-k+2} & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n\alpha_m \end{pmatrix},$$
где $q = k - 1 + (n - (m - k + 2) + 1) = n - m + 2k - 2 \geq 3$, называется *соединением* $(G_1, G_2)^s$-многоугольников S_1 и S_2 по границе $(a_k, a_{k+1}, \dots, a_m)$.

Если $\mathbf{S}$ — множество $(G_1, G_2)^s$-многоугольников, то через $\mathrm{GN}(\mathbf{S})$ обозначается замыкание множества $\mathbf{S}$ над циклическими перестановками, разворотами и соединениями, а через $\mathrm{GN}_n(\mathbf{S})$ — множество $(G_1, G_2, n)^s$-угольников из $\mathrm{GN}(\mathbf{S})$. Через $\mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s$ обозначается замыкание над циклическими перестановками множества матриц
$$\begin{pmatrix} g_1 & g_1' & g_1 + g_1' \\ \pi & e & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi g_2 & g_2' & (g_2')^{-1} g_2^{-1} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} g_1 & g_1 & 0 \\ e & \pi g_2 & g_2^{-1} \end{pmatrix},$$
где $g_1, g_1' \in \mathrm{Pos}(G_1)$, $g_2, g_2' \in G_2$.

Обозначим через $\mathbf{S}^0(G_1, G_2)$ множество $(G_1, G_2)^s$-многоугольников, имеющих сторону 0.

Множество $\mathbf{S}$ $(G_1, G_2)^s$-треугольников ($(G_1, G_2)^s$-многоугольников) называется *s-согласованным* (*s-полигонометрическим*), если $\mathbf{S}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) если Δ — $(G_1, G_2)^s$-треугольник и некоторый из его элементов равен 0 или e, то $\Delta \in \mathbf{S}$ тогда и только тогда, когда $\Delta \in \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)^s$;

2) любой $(G_1, G_2)^s$-треугольник ($(G_1, G_2)^s$-многоугольник) $S \in \mathbf{S}$ с ненулевыми сторонами однозначно определяется по любым своим определяющим параметрам;

3) $\mathrm{GN}_3(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$ $(\mathrm{GN}(\mathbf{S}) = \mathbf{S})$.

Теорема 1.2 [1, 21]. *Пусть $\mathbf{S}$ — множество $(G_1, G_2)^s$-треугольников ($(G_1, G_2)^s$-многоугольников). Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathbf{S}$ — *s-согласованное* (*s-полигонометрическое*) *множество;*

(2) *на некоторой точной $(|G_1|, |G_2|)$-псевдоплоскости $\mathcal{P}$ существует s-полигонометрия* $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, *для которой* $\mathbf{S} = \mathrm{GN}_3(\mathbf{S}(\mathrm{spm}))$ $(\mathbf{S} = \mathrm{GN}(\mathbf{S}(\mathrm{spm})))$.

Отображение $f\colon P \to P'$ называется *вложением* s-полигонометрии spm в s-полигонометрию spm$'$ (пишем $f\colon \mathrm{pm} \hookrightarrow \mathrm{spm}'$), если выполняются следующие условия:

1) f инъективно;

2) для любой линии $l \in L$ существует единственная линия $l' \in L'$ (обозначаемая через $l(\mathcal{P}', f(l))$), для которой $f(l) \subseteq l'$;

3) если $p_2 \in p_1 g_1$ на линии $l(p_1, p_2)$ в spm, то $f(p_2) \in f(p_1)\varphi_1(g_1)$ на линии $l(f(p_1), f(p_2))$ в spm$'$;

4) если $l_2 = l_1 g_2$ на множестве $\{l \mid p(l_1, l_2) \in l\}$ в spm, то $l(\mathcal{P}', f(l_2)) = l(\mathcal{P}', f(l_1))\varphi_2(g_2)$ на множестве $\{l' \mid p(l(\mathcal{P}', f(l_1)), l(\mathcal{P}', f(l_2))) \in l'\}$ в spm$'$.

Если G_1 — упорядоченная подгруппа упорядоченной группы G_1', а G_2 — подгруппа группы G_2', будем предполагать, что $\varphi_1 = \mathrm{id}_{G_1}$ и $\varphi_2 = \mathrm{id}_{G_2}$.

s-Полигонометрия spm называется (*тождественно*) *вложимой* в s-полигонометрию spm$'$, если существует вложение $f\colon \mathrm{spm} \hookrightarrow \mathrm{spm}'$ (являющееся тождественной функцией). Если s-полигонометрия spm пары (G_1, G_2) тождественно вложима в s-полигонометрию spm$'$ пары (G_1', G_2'), $G_1 \leq G_1'$, $G_2 \leq G_2'$, то s-полигонометрия spm называется *(G_1, G_2)-s-подполигонометрией* s-полигонометрии spm$'$.

s-Полигонометрии $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ и $\mathrm{spm}' = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P}')$ называются *изоморфными* (пишем $\mathrm{spm} \simeq \mathrm{spm}'$), если существует биекция $f\colon P \to P'$, являющаяся вложением spm в spm$'$.

Для s-полигонометрии $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ число $c(\mathcal{P})$ обозначается через $c(\mathrm{spm})$. s-Полигонометрия spm называется *связной*, если $c(\mathrm{spm}) = 1$. Любая связная s-подполигонометрия s-полигонометрии spm, имеющая ту же пару групп, называется *связной компонентой*, или *компонентой связности* , s-полигонометрии spm.

Теорема 1.3 [1, 21]. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{spm} \simeq \mathrm{spm}'$*;*

(2) $\mathbf{S}(\mathrm{spm}) = \mathbf{S}(\mathrm{spm}')$ *и* $c(\mathrm{spm}) = c(\mathrm{spm}')$.

Пусть $\mathbf{\Delta}$ — s-согласованное множество $(G_1, G_2)^s$-треугольников. Множество $\mathbf{\Delta}$ называется *s-предполным*, если для любых $g_1, g_3 \in \mathrm{Pos}(G_1)$, $g_2 \in G_2$ множество $\mathbf{\Delta}$ содержит некоторый $(G_1, G_2)^s$-треугольник $\begin{pmatrix} g_1 & g_3 & \cdot \\ g_2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$. s-Предполное множество $\mathbf{\Delta}$ называется *s-полным*, если для любых $g_1, g_3 \in G_2$, $g_2 \in \mathrm{Pos}(G_1)$ множество $\mathbf{\Delta}$ содержит некоторый $(G_1, G_2)^s$-треугольник $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & g_2 \\ \cdot & g_1 & g_3 \end{pmatrix}$.

Теорема 1.4 [1, 21]. *Если $\mathcal{P}$ — связная псевдоплоскость и тройка $(G_1, G_2, \mathcal{P})$ образует s-полигонометрию, то следующие условия эквивалентны:*
(1) $\mathbf{S}_3(G_1, G_2, \mathcal{P})$ — *s-предполное (s-полное) множество;*
(2) $\mathcal{P}$ — *(проективная) плоскость.*

Следствие 1.5 [1, 21]. *Если $\mathbf{S}_3(G_1, G_2, \mathcal{P})$ — s-предполное множество, то* $\mathbf{S}(G_1, G_2, \mathcal{P}) = \mathrm{GN}(\mathbf{S}_3(G_1, G_2, \mathcal{P}))$.

В s-полигонометрии $\mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ *многоугольниками, препятствующими проведению линий через точки*, или *h_p-многоугольниками*, называются многоугольники $(p_1, p_2, \ldots, p_{2n})$, $n \geq 2$, $p_n \neq p_{2n}$, соответствующие $(G_1, G_2)^s$-многоугольникам вида

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_2 & a_1 \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta & \alpha_{n-1}^{-1} & \alpha_{n-2}^{-1} & \ldots & \alpha_1^{-1} & \gamma \end{array} \right),$$

где $\beta, \gamma \neq e$, а также их циклическим перестановкам. *Многоугольниками, препятствующими пересекаемости линий*, или *h_l-многоугольниками*, называются многоугольники $(p_1, p_2, \ldots, p_{2n})$, $n \geq 2$, $l(p_1, p_{2n}) \neq l(p_n, p_{n+1})$, соответствующие $(G_1, G_2)^s$-многоугольникам вида

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} b & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & c & a_n & \ldots & a_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_n^{-1} & \alpha_{n-1}^{-1} & \ldots & \alpha_1^{-1} \end{array} \right),$$

а также их циклическим перестановкам.

Теорема 1.6 [1, 21]. 1. *s-Полигонометрия* spm *вложима в s-полигонометрию, в которой через любые две точки проходит линия (соответственно любые две линии пересекаются) тогда и только тогда, когда* spm *не содержит h_p-многоугольников (h_l-многоугольников).*
2. *s-Полигонометрия* spm *вложима в s-тригонометрию на проективной плоскости тогда и только тогда, когда* spm *не содержит h_p-многоугольников и h_l-многоугольников.*

Теорией $T(\mathrm{pm})$ полигонометрии $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G_1, G_2, \langle P, L, \in \rangle)$ называется теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M}(\mathrm{pm}))$, где

$$\mathcal{M}(\mathrm{pm}) = \left\langle P; \left\langle Q_{g_1}^{(2)} \mid g_1 \in G_1 \right\rangle, \left\langle R_{g_2}^{(3)} \mid g_2 \in G_2 \right\rangle \right\rangle,$$

$Q_{g_1} = \{(p, p') \mid p' = pg_1$ на некоторой линии $l \in L\}$, $g_1 \in G_1$, $R_{g_2} = \{(p, p', p'') \mid$ существуют $l(p, p')$, $l(p, p'')$ и $\angle(l(p, p'), l(p, p'')) = g_2\}$, $g_2 \in G_2$. Заменив в определении pm на spm, получим теорию $T(\mathrm{spm})$ полигонометрии spm с условием симметрии. Теории $T(\mathrm{pm})$ и $T(\mathrm{spm})$ называются *полигонометрическими*. Если trm — тригонометрия, то теория $T(\mathrm{trm})$ называется *тригонометрической*.

2. Алгебры бинарных формул

Определение 2.1 [22, 25, 26, 27, 28, 29]. Пусть T — полная теория, $\mathcal{M} \models T$. Рассмотрим типы $p(x), q(y) \in S(\emptyset)$, реализуемые в $\mathcal{M}$, а также всевозможные (p,q)-*устойчивые*, или (p,q)-*полуизолирующие*, формулы $\varphi(x,y)$ теории T, т. е. формулы, для которых найдутся элементы $a \in M$ такие, что $\models p(a)$ и $\varphi(a,y) \vdash q(y)$. Напомним, что если $\models p(a)$ и $\models \varphi(a,b)$ для (p,q)-полуизолирующей формулы $\varphi(x,y)$, то говорят, что *a полуизолирует b*. Определим для каждой такой формулы $\varphi(x,y)$ двухместное отношение $R_{p,\varphi,q} \rightleftharpoons \{(a,b) \mid \mathcal{M} \models p(a) \wedge \varphi(a,b)\}$. При условии $(a,b) \in R_{p,\varphi,q}$ пара (a,b) называется (p,φ,q)-*дугой*. Если $\varphi(a,y)$ — главная формула (над a), то (p,φ,q)-дуга (a,b) также называется *главной*.

Если $\varphi(x,y)$ является $(p \leftrightarrow q)$-*формулой*, т. е. одновременно (p,q)- и (q,p)-устойчивой, то множество $[a,b] \rightleftharpoons \{(a,b),(b,a)\}$ называется (p,φ,q)-*ребром*. Если (p,φ,q)-ребро $[a,b]$ состоит из главных (p,φ,q)- и (q,φ^{-1},p)-дуг, где $\varphi^{-1}(x,y)$ обозначает $\varphi(y,x)$, то $[a,b]$ называется *главным* (p,φ,q)-ребром.

Будем называть (p,φ,q)-дуги и (p,φ,q)-рёбра *дугами* и *рёбрами* соответственно, если из контекста ясно, о какой формуле идёт речь, или речь идёт о некоторой формуле $\varphi(x,y)$. Дуги (a,b), у которых пары (b,a) не являются дугами ни по каким (q,p)-формулам, будем называть *необращаемыми*.

Определение 2.2 [22, 23]. Для типов $p(x), q(y) \in S(\emptyset)$ обозначим через $\mathrm{PF}(p,q)$ множество

$$\{\varphi(x,y) \mid \varphi(a,y) \text{ — главная формула, } \varphi(a,y) \vdash q(y), \text{ где } \models p(a)\}.$$

Пусть $\mathrm{PE}(p,q)$ — множество пар $(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ формул из $\mathrm{PF}(p,q)$ таких, что для любой (некоторой) реализации a типа p совпадают множества решений формул $\varphi(a,y)$ и $\psi(a,y)$.

Очевидно, что $\mathrm{PE}(p,q)$ является отношением эквивалентности на множестве $\mathrm{PF}(p,q)$. Заметим, что каждому $\mathrm{PE}(p,q)$-классу E соответствует либо главное ребро, либо необращаемая главная дуга, связывающая реализации типов p и q посредством любой (некоторой) формулы из E. Таким образом, фактор-множество $\mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ представляется в виде дизъюнктного объединения множеств $\mathrm{PFS}(p,q)$ и $\mathrm{PFN}(p,q)$, где $\mathrm{PFS}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих главным рёбрам, а $\mathrm{PFN}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих необращаемым главным дугам.

Множества $\mathrm{PF}(p,p)$, $\mathrm{PE}(p,p)$, $\mathrm{PFS}(p,p)$ и $\mathrm{PFN}(p,p)$ обозначаются соответственно через $\mathrm{PF}(p)$, $\mathrm{PE}(p)$, $\mathrm{PFS}(p)$ и $\mathrm{PFN}(p)$.

Зафиксируем полную теорию T, не имеющую конечных моделей. Пусть $U = U^- \dot\cup \{0\} \dot\cup U^+$ — некоторый алфавит мощности $\geq |S(T)|$, состоящий из *отрицательных элементов* $u^- \in U^-$, *положительных элементов* $u^+ \in U^+$ и нуля 0. Как обычно, будем писать $u < 0$ для любого элемента $u \in U^-$ и $u > 0$ для любого элемента $u \in U^+$. Множество $U^- \cup \{0\}$ обозначается через $U^{\leq 0}$, а $U^+ \cup \{0\}$ — через $U^{\geq 0}$. Элементы множества U будем называть *метками*.

Рассмотрим инъективные *меточные функции*

$$\nu(p,q)\colon \mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q) \to U,$$

$p(x), q(y) \in S(\emptyset)$, при которых классам из $\mathrm{PFN}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ соответствуют отрицательные элементы, а классам из $\mathrm{PFS}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ — элементы неотрицательные так, что значение 0 определяется лишь для $p = q$ и задаётся по формуле $(x \approx y)$, $\nu(p) \rightleftharpoons \nu(p,p)$. При этом будем считать, что

$\rho_{\nu(p)} \cap \rho_{\nu(q)} = \{0\}$ для $p \neq q$ (где, как обычно, через ρ_f обозначается область значений функции f) и $\rho_{\nu(p,q)} \cap \rho_{\nu(p',q')} = \emptyset$, если $p \neq q$ и $(p,q) \neq (p',q')$. Любые меточные функции с указанными свойствами, а также семейства таких функций будем называть *правильными* и далее рассматривать только правильные меточные функции и их правильные семейства.

Через $\theta_{p,u,q}(x,y)$ будут обозначаться формулы из $\mathrm{PF}(p,q)$, представляющие метку $u \in \rho_{\nu(p,q)}$. Если тип p фиксирован и $p = q$, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y)$ обозначается через $\theta_u(x,y)$.

Отметим, что если $\theta_{p,u,q}(x,y)$ и $\theta_{q,v,p}(x,y)$ — формулы, свидетельствующие о том, что для реализаций a и b типов p и q соответственно пары (a,b) и (b,a) являются главными дугами, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y) \wedge \theta_{q,v,p}(y,x)$ свидетельствует о том, что $[a,b]$ является главным ребром. При этом *обратимой* метке u однозначно соответствует (неотрицательная) метка v и наоборот. Метки u и v будем называть *взаимно обратными* и обозначать через v^{-1} и u^{-1} соответственно.

Для типов $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\emptyset)$ и множеств меток $X_1, X_2, \ldots, X_k \subseteq U$ обозначим через

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

множество, состоящее из всех меток $u \in U$, соответствующих формулам

$$\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(x,y),$$

которые для реализаций a типа p_1 и некоторых $u_1 \in X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, \ldots, u_k \in X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}$ удовлетворяют условию

$$\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(a,y) \vdash \theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(a,y),$$

где

$$\begin{gathered}\theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(x,y) \rightleftharpoons \\ \rightleftharpoons \exists x_2, x_3, \ldots, x_k(\theta_{p_1,u_1,p_2}(x,x_2) \wedge \theta_{p_2,u_2,p_3}(x_2,x_3) \wedge \ldots \\ \ldots \wedge \theta_{p_{k-1},u_{k-1},p_k}(x_{k-1},x_k) \wedge \theta_{p_k,u_k,p_{k+1}}(x_k,y)).\end{gathered}$$

Тем самым, на булеане $\mathcal{P}(U)$ множества U образуется *алгебра распределений бинарных изолирующих формул* с k-местными операциями

$$P(p_1, \cdot, p_2, \cdot, \ldots, p_k, \cdot, p_{k+1}),$$

где $p_1, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\emptyset)$. Эта алгебра имеет естественное обеднение на любое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$.

Очевидно, что биективно заменяя множество меток, мы получаем изоморфную алгебру. В частности, имеется *каноническая алгебра*, у которой метки представлены элементами

$$\bigcup_{p,q} \mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q).$$

Тем не менее, мы будем использовать абстрактное множество меток U, отражающее знаки меток и проясняющее алгебраические свойства операций на $\mathcal{P}(U)$.

Заметим, что если хотя бы одно из множеств X_i не пересекается с $\rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$ и, в частности, если оно пусто, справедливо равенство

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) = \emptyset.$$

Отметим также, что если $X_i \not\subseteq \rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$ для некоторого i, то

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) =$$

$$= P(p_1, X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, p_2, X_2 \cap \rho_{\nu(p_2,p_3)}, \ldots, p_k, X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}, p_{k+1}).$$

На основании последнего равенства в дальнейшем при рассмотрении значений

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

будем предполагать, что $X_i \subseteq \rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$, $i = 1, \ldots, k$.

Если каждое множество X_i состоит лишь из одного элемента u_i, то в записи

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

вместо множеств X_i будем использовать элементы u_i и писать

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}).$$

По определению справедливо следующее равенство:

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) =$$
$$= \cup\{P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}) \mid u_1 \in X_1, \ldots, u_k \in X_k\}.$$

Таким образом, задание множества

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

сводится к заданию множеств $P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$. Отметим также, что для любого множества $X \subseteq \rho_{\nu(p,q)}$ имеет место $P(p, X, q) = X$.

Заметим, что если $u_i = 0$, то $p_i = p_{i+1}$ для непустых множеств

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, 0, p_{i+1}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$$

и при этом выполняются следующие соотношения:

$$P(p_1, 0, p_1) = \{0\},$$

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, 0, p_{i+1}, u_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}) =$$
$$= P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, u_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}).$$

Если все типы p_i совпадают с типом p, то вместо записей

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

и

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$$

будем писать $P_p(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ и $P_p(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ соответственно, а также $\lfloor X_1, X_2, \ldots, X_k\rfloor_p$ и $\lfloor u_1, u_2, \ldots, u_k\rfloor_p$. Будем также опускать индексы $\cdot_p$, если из контекста ясно, о каком типе p идет речь. При этом вместо формул $\theta_{p,u_1,p,u_2,\ldots,p,u_k,p}(x, y)$ будем писать $\theta_{u_1,u_2,\ldots,u_k}(x, y)$.

При наличии модели $\mathcal{M}_p$ группоид $\mathfrak{P}_{\nu(p)} \rightleftharpoons \langle \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\emptyset\}; \lfloor\cdot,\cdot\rfloor\rangle$, будучи *полуассоциативной* (*слева*) алгеброй, позволяет представить всевозможные операции $\lfloor\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\rfloor$ термами сигнатуры $\lfloor\cdot,\cdot\rfloor$. В дальнейшем операцию $\lfloor\cdot,\cdot\rfloor$ будем также обозначать через $\cdot$ и использовать запись uv вместо $u \cdot v$. При этом в случае отсутствия полуассоциативности справа будем в записи $u_1u_2\ldots u_k$ предполагать следующую расстановку скобок: $(((u_1 \cdot u_2) \cdot \ldots) \cdot u_k)$.

Поскольку по выбору метки 0 для формулы $(x \approx y)$ справедливы равенства $X \cdot \{0\} = X$ и $\{0\} \cdot X = X$ для любого $X \subseteq \rho_{\nu(p)}$, группоид $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ имеет единичный элемент $\{0\}$ и, при выполнении свойства полуассоциативности справа, является моноидом. В этой системе для любых множеств $Y, Z \in \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\emptyset\}$ справедливо соотношение

$$Y \cdot Z = \bigcup\{yz \mid y \in Y, z \in Z\}. \quad (1)$$

Для семейства 1-типов $R \subset S(T)$ обозначим через I_R (в модели $\mathcal{M}$) множество

$$\{(a,b) \mid \mathrm{tp}(a), \mathrm{tp}(b) \in R \text{ и } a \text{ изолирует } b\},$$

а через SI_R (в модели $\mathcal{M}$) множество

$$\{(a,b) \mid \mathrm{tp}(a), \mathrm{tp}(b) \in R \text{ и } a \text{ полуизолирует } b\}.$$

Очевидно, что $I_R \subseteq \mathrm{SI}_R$ и на любом множестве реализаций типов из R отношения I_R и SI_R рефлексивны. Известно, что отношение полуизолированности на множестве кортежей произвольной модели транзитивно и, в частности, транзитивно любое отношение SI_R. Что касается отношения I_R, оно может быть как транзитивным, так и нетранзитивным:

Предложение 2.3 [22, 23]. *Пусть $p(x)$ — полный тип полной теории T, имеющей модель $\mathcal{M}_p$, $\nu(p)$ — правильная меточная функция. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отношение I_p (на множестве реализаций типа p в любой модели $\mathcal{M} \models T$) транзитивно;*

(2) *для любых меток $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(p)}$ множество $P_p(u_1, u_2)$ конечно.*

Предложение 2.4 [22, 23]. *Если $p, q \in R$ — главные типы, то $\rho_{\nu(p,q)} \cup \rho_{\nu(q,p)} \subseteq U^{\geq 0}$.*

Расширяя множество меток U положительными и отрицательными метками для полуизолирующих формул, а также *нейтральными* метками $u' \in U'$ (совмещающими необратимые дуги и главные ребра в множество решений полуизолирующих формул), получаем $\mathfrak{SI}_{\mathcal{R}}$-системы $\mathfrak{SI}$ для полуизолирующих формул, а также si-ранги, булевы операции на метках этих формул, отношения доминирования меток, соответствующие отношению $\vdash$, и $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-системы, включающие все указанные атрибуты [22, 30].

Предложение 2.5 [22, 31]. *Для любой теории T, непустого семейства $R \subseteq S^1(\emptyset)$ изолированных типов и правильного семейства $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-система $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ состоит из положительных меток и нуля, и каждая метка u имеет дополнение $\bar{u}$ такое, что $u \wedge \bar{u} = \emptyset$ и $u \vee \bar{u}$ является максимальным элементом. Если $R = \{p\}$, то моноид $\mathfrak{SI}_{\nu(p)} = \langle M_{\nu(R)}, \cdot \rangle$ порождается булевой алгеброй, для которой $u \vee \bar{u}$ соответствует изолирующим формулам типа p.*

Следствие 2.6 [22, 31]. *Для любой ω-категоричной теории T, непустого семейства $R \subseteq S^1(\emptyset)$ и правильного семейства $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-система $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ конечна, состоит из положительных меток и нуля, и каждая метка u имеет дополнение $\bar{u}$.*

Теорема 2.7 [22, 31]. *Для любой $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-системы $\mathfrak{M}$, у которой каждая метка положительная или нулевая и при этом имеет дополнение, существует теория T, непустое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$ изолированных типов и правильное семейство $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул такие, что $\mathfrak{M}_{\nu(R)} = \mathfrak{M}$.*

Следствие 2.8 [22, 31]. *Для любой конечной* $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$*-системы* $\mathfrak{M}$*, у которой любая метка положительна или нулевая и имеет дополнение, существует* ω*-категоричная теория* T*, непустое семейство* $R \subseteq S^1(\emptyset)$ *и правильное семейство* $\nu(R)$ *меточных функций для полуизолирующих формул такие, что* $\mathfrak{M}_{\nu(R)} = \mathfrak{M}$.

Замечание 2.9.. Отметим, что если $u_1, \ldots, u_n$ — все метки, связывающие реализации 1-типов p и q главными дугами, то для любой метки $u = u_{i_1} \vee \ldots \vee u_{i_k}$ её дополнением является метка $\bar{u} = u_{j_1} \vee \ldots \vee u_{j_l}$, где $\{i_1, \ldots, i_k\}, \{j_1, \ldots j_l\}$ — разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$. Поэтому в следствиях 2 и 2 о наличии дополнений можно не упоминать.

Кроме того, поскольку в любой конечной $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-системе $\mathfrak{M}$ все метки сводятся к меткам изолирующих формул, эта система однозначно определяется своей подалгеброй распределений изолирующих формул.

Напомним [22, 23], что алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных формул теории называется (*почти*) *детерминированной*, если для любых меток u и v множество $u \cdot v$ одноэлементно (конечно). Для детерминированной алгебры $\mathfrak{A}$ с множеством меток U алгебра $\langle U; * \rangle$ с операцией $u * v = w$, где $u \cdot v = \{w\}$, обозначается через $\mathfrak{A}'$.

3. Алгебры бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий с условием симметрии

Пусть $T = T(\mathrm{spm})$ — теория s-полигонометрии spm пары групп (G_1, G_2). Напомним [1], что группа сторон G_1 должна быть линейно упорядочена и коммутативна, а ее действие на каждой линии из spm задается положительным конусом $\mathrm{Pos}(G_1)$.

Для тригонометрических теорий бинарные изолирующие формулы задаются предикатами Q_g, где $g \in \mathrm{Pos}(G_1)$. При перемножении Q_g и $Q_{g'}$ образуется множество параметров сторон треугольников, у которых две стороны имеют параметры g и g', а параметры углов варьируются произвольно в рамках группы G_2.

Алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_{\nu(p)}$ бинарных изолирующих формул полигонометрической теории, вообще говоря, не сводится к указанным перемножениям, поскольку многоугольники могут не распадаться на треугольники и, следовательно, перемножения для меток u и v, задаваемых параметрами

$$(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k),$$
$$(g'_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}, g'_m)$$

двух ломаных, определяют множество меток w, задаваемых параметрами

$$(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k, \beta, g'_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}, g'_m)$$

с произвольными $\beta \in G_2$.

Кроме того, в случае конечности, т.е. формульной определимости компонент связности, и при наличии нескольких компонент возникает изолирующая формула $\theta_{\bar{c}}(x, y)$, связывающая, элементы, принадлежащие разным компонентам связности. В этом случае алгебра $\mathfrak{A}$ имеет подалгебру с меткой $\bar{c}$. Если компонент связности две, то эта подалгебра детерминирована и имеет таблицу Кэли, задаваемую следующей таблицей:

Таблица 1

$\cdot$	0	$\bar{c}$
0	$\{0\}$	$\{\bar{c}\}$
$\bar{c}$	$\{\bar{c}\}$	$\{0\}$

Если имеется больше двух компонент связности, то эта подалгебра недетерминирована и имеет таблицу Кэли, задаваемую следующей таблицей:

Таблица 2

$\cdot$	0	$\bar{c}$
0	$\{0\}$	$\{\bar{c}\}$
$\bar{c}$	$\{\bar{c}\}$	$\{0,\bar{c}\}$

Поскольку все метки $u \neq \bar{c}$ связывают элементы одной компоненты связности и $u \cdot \bar{c} = \bar{c} \cdot u = \{\bar{c}\}$, описание алгебры $\mathfrak{A}$ сводится к описанию подалгебры $\mathfrak{A}_c$ на множестве меток $u \neq \bar{c}$, т.е. к описанию алгебр изолирующих формул для теорий связных s-полигонометрий spm.

Как уже замечено выше, алгебра $\mathfrak{A}_c$ включает метки u для предикатов Q_g, $g \in \mathrm{Pos}(G_1)$, а также метки v для наборов параметров ломаных, соединяющих элементы компоненты связности C. При этом множество U_0 меток u естественно считать подмножеством множества V меток v. Метки из U_0 будем называть *реберными*, а метки из $V \setminus U_0$ — *нереберными.*

Отметим, что метки $v \in V$ фактически выделяют классы эквивалентности наборов $(g_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, g_k)$ параметров ломаных, у которых совпадают начала и совпадают концы. При этом реберные метки $u \in U_0$ соответствуют классам эквивалентности, включающим (единственные) наборы вида (g_1), т.е. элементы $g_1 \in \mathrm{Pos}(G_1)$.

Напомним, что в простой модели полигонометрической теории T все компоненты связности изоморфны. Поэтому метки v исчерпываются метками для фиксированной компоненты связности. Кроме того, если $\models \varphi(a,b)$, $a,b \in C$, то выполняется $\models \theta_v(a,b)$ и $\theta_v(x,y) \vdash \varphi(x,y)$, где v — метка для набора параметров кратчайшей (a,b)-ломаной. Таким образом, множество меток для алгебры $\mathfrak{A}_c$ исчерпывается указанным множеством меток V.

Нетрудно заметить, что нереберные метки $v \in V \setminus U_0$ образуются лишь при наличии кратчайших ломаных длины ≥ 2, т.е. при условии, что C не является плоскостью. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 3.1. *Алгебра $\mathfrak{A}_c$ состоит из реберных меток из $u \in U_0$ тогда и только тогда, когда $(|G_1|,|G_2|)$-псевдоплоскость для C образует плоскость.*

Как уже замечено выше, в общем случае алгебра $\mathfrak{A}_c$ задается параметрами многоугольников простой модели теории $T(\mathrm{spm})$: для меток v и v', задаваемых параметрами $(g_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, g_k)$, $(g'_1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{m-1}, g'_m)$ двух ломаных, множество $u \cdot v$ состоит из меток w, задаваемых параметрами

$$(g_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, g_k, \beta, g'_1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{m-1}, g'_m),$$

$\beta \in G_2$. При этом метки w могут быть как реберными, если в spm имеется $(G_1, G_2)^s$-многоугольник вида

$$\begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_{k-1} & g_k & g'_1 & \dots & g'_{m-1} & g'_m & h \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{k-1} & \beta & \alpha'_1 & \dots & \alpha'_{m-1} & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

так и нереберными, в случае отсутствия $(G_1, G_2)^s$-многоугольников указанного вида с некоторыми β.

Таким образом, *структура алгебры $\mathfrak{A}_c$, а значит и алгебры $\mathfrak{A}$, полностью определяется множеством $\mathbf{S}(\mathrm{spm})$ и числом $c(\mathrm{spm})$ компонент связности данной s-полигонометрии.*

Замечание 3.2. Поскольку для реберных меток u, u', соответствующих элементам $g_1, g_1' \in \mathrm{Pos}(G_1)$, множество $u \cdot u'$ включает метки $|u - u'|$ и $u + u'$ для элементов $|g_1 - g_1'|$ и $g_1 + g_1'$ соответственно (при действии на фиксированной линии), ограничение значения $u \cdot u'$ на множество реберных меток может варьироваться от множества $\{|u - u'|, u + u'\}$, если s-полигонометрия свободная, до максимально допустимого множества реберных меток, и включающего 0 тогда и только тогда, когда $u = u'$.

Рассмотрим теперь динамику меток при расширении/сужении пар групп (G_1, G_2).

Напомним [1], что при отсутствии в s-полигонометрии spm многоугольников, препятствующих проведению линий через различные точки p_1, p_2, соединенные ломаной с параметрами $(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k)$, группу G_2 можно расширить новыми свободными порождающими β, γ и взять произвольный положительный элемент h группы G_1 или ее упорядоченного абелева расширения G_1' так, что после расширения множества $(G_1, G_2)^s$-многоугольников матрицей

$$S = \begin{pmatrix} g_1 & \ldots & g_{k-1} & g_k & h \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-1} & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

образуется s-полигонометрия spm' пары групп $(G_1', G_2 * \langle \beta, \gamma \rangle)$, для которой метка v набора $(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k)$ превращается в метку $u \in U_0'$ для spm', соответствующую элементу h.

Таким образом, имеет место следующее

Предложение 3.3. *Для любых точек $p_1 \neq p_2$ s-полигонометрии $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, не имеющих препятствий для проведения линий $l(p_1, p_2)$, а также для любого положительного элемента h из упорядоченного абелева расширения G_1' группы G_1 существует s-полигонометрия $\mathrm{spm}' = \mathrm{spm}(G_1', G_2 * \langle \beta, \gamma \rangle, \mathcal{P}')$, расширяющая s-полигонометрию spm и такая, что метка изолирующей формулы, связывающей p_1 и p_2, принадлежит множеству U_0' реберных меток формул $Q_g(x, y)$, $g \in G_1'$.*

Согласно предложению 3.3 нереберная метка $v \in V$ для набора

$$(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k)$$

после расширения spm превращается в некоторую реберную метку $u \in U_0'$. Понятно, что обратной операцией, при которой удаляется линия $l(p_1, p_2)$, с сохранением некоторой (p_1, p_2)-ломаной, реберная метка $u \in U_0'$ становится некоторой нереберной меткой из $V \setminus U_0'$.

Преобразование s-полигонометрии spm в s-полигонометрию spm', описанное для доказательства предложения 3.3, задает оператор $\mathcal{L}_S$ с параметрами из матрицы S. В результате действия этого оператора из s-полигонометрии spm получается s-полигонометрия spm': $\mathcal{L}_S(\mathrm{spm}) = \mathrm{spm}'$.

Указанная динамика преобразования нереберных меток $v \in V \setminus U_0$ в реберные метки $u \in U_0'$ позволяет, при условии отсутствия препятствий к проведению линий $l(p_1, p_2)$ при расширении s-полигонометрий, шаг за шагом, с использованием трансфинитной индукции, перевести все нереберные метки из $V \setminus U_0$ в некоторые реберные метки из U'_0. Более того, вновь возникающие нереберные метки, не принадлежащие U'_0, некоторыми расширениями также можно преобразовать в реберные метки.

Таким образом, в силу предложений 3.1 и 3.3 устанавливается следующая

Теорема 3.4. *Для связной s-полигонометрии* $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует расширение s-полигонометрии* spm *до некоторой s-полигонометрии* spm$'$ *на плоскости;*

(2) *существует расширение s-полигонометрии* spm *до некоторой s-полигонометрии* spm$'$*, не имеющей нереберных меток;*

(3) spm *не имеет точек $p_1 \neq p_2$, для которых имеются препятствия к проведению линий $l(p_1, p_2)$.*

4. Почти детерминированные алгебры бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий

Напомним характеризацию детерминированности алгебры бинарных изолирующих формул полигонометрической теории [24]:

Теорема 4.1. *Алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул полигонометрической теории $T(\mathrm{pm})$ пары групп (G_1, G_2) детерминирована тогда и только тогда, когда выполняется какое-либо из следующих условий:*

(1) $|G_1| = 1$ *и* $c(\mathrm{pm}) \leq 2$*;*

(2) $1 < |G_1| < \omega$, $|G_2| = 1$ *и* $c(\mathrm{pm}) = 1$*;*

(3) $|G_1| \geq \omega$ *и* $|G_2| = 1$.

При этом в случае (1) *алгебра* $\mathfrak{P}'_{\nu(p)}$ *изоморфна единичной группе или группе* $\mathbb{Z}_2$*, а в случаях* (2) *и* (3) *эта алгебра изоморфна группе* G_1.

Для доказательства аналога теоремы 4.1 при переходе к s-полигонометрическим теориям напомним, что неединичная упорядоченная группа бесконечна. Поэтому условие (2) теоремы 4.1 для полигонометрий с условием симметрии выполняться не может. Кроме того, при $|G_1| \geq \omega$ s-полигонометрическая теория не может иметь детерминированную алгебру $\mathfrak{A}$ в силу замечания 3.2. Следовательно, условие (3) для детерминированности алгебры $\mathfrak{A}$ также невозможно и остается только условие (1). При этом детерминированность обеспечивается таблицей 1. Таким образом, при переходе от классов полигонометрий пар групп к классу s-полигонометрий теорема 4.1 преобразуется в следующую теорему.

Теорема 4.2. *Алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул s-полигонометрической теории $T(\mathrm{spm})$ пары групп (G_1, G_2) детерминирована тогда и только тогда, когда $|G_1| = 1$ и $c(\mathrm{spm}) \leq 2$.*

В следующем предложении дается очевидная "техническая" характеризация почти детерминированности алгебр $\mathfrak{A}$ для s-полигонометрических теорий.

Предложение 4.3. *Алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул s-полигонометрической теории $T(\mathrm{spm})$ пары групп (G_1, G_2) почти детерминирована тогда и только тогда, когда для любых меток u, v, соответствующих наборам параметров некоторых кратчайших ломаных $(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k)$, $(g'_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}, g'_m)$, множество $u \cdot v$ меток w, задаваемых параметрами*

$(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k, \beta, g'_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}, g'_m)$, $\beta \in G_2$, *совпадает с некоторым конечным множеством меток, соответствующих некоторым наборам параметров кратчайших ломаных.*

Из предложений 3.1 и следствия 4.3 вытекают

Следствие 4.4. *Для любой s-полигонометрической теории $T(\mathrm{spm})$ на плоскости алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул является почти детерминированной тогда и только тогда, когда произведение $u \cdot v$ любых меток u, v алгебры $\mathfrak{A}$ содержит лишь конечное число реберных меток.*

Отметим, что для теорий всюду конечно определенных s-полигонометрий имеется лишь конечное число представлений меток w, задаваемых параметрами

$$(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k, \beta, g'_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}, g'_m)$$

из предложения 4.3, посредством кратчайших ломаных с другими параметрами. Поэтому для таких s-полигонометрий почти детерминированность алгебры $\mathfrak{A}$ равносильна одноэлементности группы G_1 или конечности группы G_2. Тем самым, имеет место следующая теорема.

Теорема 4.5. *Алгебра бинарных изолирующих формул всюду конечно определенной теории $T(\mathrm{spm})$ s-полигонометрии $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ почти детерминирована тогда и только тогда, когда группа G_1 одноэлементна или группа G_2 конечна.*

Расширение связной s-полигонометрии $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ без многоугольников, препятствующих проективности, описанное в доказательстве предложения 3.3, позволяет шаг за шагом нереберные метки сводить к реберным, соответствующим элементам h, причем эти реберные метки u выбираются произвольно среди реберных меток для положительных элементов группы G_1. Тем самым, некоторое расширение группы G_2 обеспечивает преобразование псевдоплоскости $\mathcal{P}$ в некоторую плоскость $\mathcal{P}'$, а выбор конечного числа реберных меток для произведений $u \cdot v$, при изначальном конечном числе реберных меток в $u \cdot v$, гарантирует почти детерминированность теории расширенной s-полигонометрии. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.6. *Для любой всюду конечно определенной s-полигонометрии $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, не имеющей многоугольников, препятствующих проективности, существует расширение $\mathrm{spm}' = \mathrm{spm}(G_1, G'_2, \mathcal{P}')$ s-полигонометрии spm на некоторой плоскости $\mathcal{P}'$ такое, что алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул теории $T(\mathrm{spm}')$ почти детерминирована.*

Приведенные выше рассуждения и утверждения для s-полигонометрий spm естественным образом переносятся на полигонометрии pm пар групп и их теории. В частности, из допустимости конечных групп сторон G_1 и отсутствия нереберных меток для связных полигонометрий на плоскости вытекает следующее

Предложение 4.7. *Если $\mathcal{P}$ — плоскость для полигонометрии $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ и группа G_1 конечна, то алгебра $\mathfrak{A}$, для теории $T(\mathrm{pm})$, $(|G_1|+1)$-почти детерминирована.*

Из рассуждения для доказательства теоремы 4.6 вытекает

Теорема 4.8. *Для любой полигонометрии* $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ *с конечной группой* G_1 *и не имеющей многоугольников, препятствующих проективности, существует расширение* $\mathrm{pm}' = \mathrm{pm}(G_1, G_2', \mathcal{P}')$ *полигонометрии* pm *на некоторой плоскости* $\mathcal{P}'$ *такое, что алгебра* $\mathfrak{A}$ *бинарных изолирующих формул теории* $T(\mathrm{pm}')$ *почти детерминирована.*

5. Расширения псевдоплоскостей полигонометрий с условием симметрии до плоскостей. Псевдоевклидовы и интервальные алгебры бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий

Как уже замечено выше, использованный в доказательстве предложения 3.3 алгоритм преобразования нереберных меток в реберные позволяет выполнять эти преобразования достаточно свободно. По существу единственными ограничениями являются следующие:

1) наличие многоугольников, препятствующих проведению линий $l(p_1, p_2)$;

2) включение в множество $u \cdot u'$, для реберных меток u, u', соответствующих элементам $g, g' \in \mathrm{Pos}(G_1)$, меток $|u - u'|$ и $u + u'$, соответствующих элементам $|g - g'|$ и $g + g'$.

Это означает, что при отсутствии в s-полигонометрии $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ многоугольников, препятствующих проективности и задании для каждой пары (u, u') ненулевых реберных меток некоторого *согласованного* множества $Z(u, u') \subseteq \mathrm{Pos}(G_1)$ реберных меток, включающего метки $|u - u'|$, $u + u'$ и все реберные метки из $u \cdot u'$ для $T(\mathrm{spm})$, а также удовлетворяющего соотношениям $Z(u, 0) = Z(0, u) = \{u\}$, $u \in \mathrm{Pos}(G_1)$, найдется расширение $\mathrm{spm}' = \mathrm{spm}(G_1, G_2', \mathcal{P}')$ s-полигонометрии spm на некоторой плоскости $\mathcal{P}'$ такое, что алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул теории $T(\mathrm{spm}')$ удовлетворяет соотношениям $u \cdot u' = Z(u, u')$, $u, u' \in \mathrm{Pos}(G_1)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Для любой s-полигонометрии* $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$*, не имеющей многоугольников, препятствующих проективности, а также для любой согласованной системы множеств* $Z(u, u') \subseteq \mathrm{Pos}(G_1)$*, существует расширение* $\mathrm{strm}' = \mathrm{strm}(G_1, G_2', \mathcal{P}')$ *s-полигонометрии* spm *на некоторой плоскости* $\mathcal{P}'$ *такое, что алгебра* $\mathfrak{A}$ *бинарных изолирующих формул теории* $T(\mathrm{spm}')$ *удовлетворяет соотношениям* $u \cdot u' = Z(u, u')$*,* $u, u' \in \mathrm{Pos}(G_1)$*.*

Далее мы рассмотрим два важных класса согласованных систем множеств, возникающих в классических и близких к ним тригонометриях.

Алгебра $\mathfrak{A}$ для теории $T(\mathrm{spm})$ называется *псевдоевклидовой*, если для любых реберных меток u и u', соответствующих предикатам Q_{g_1} и $Q_{g_1'}$, $g_1, g_1' \in \mathrm{Pos}(G_1)$, множество $u \cdot u'$ состоит из реберных всех меток w, соответствующих предикатам Q_g с условием $|g_1 - g_1'| \le g \le g_1 + g_1'$.

Базисными примерами псевдоевклидовых алгебр являются алгебры для теорий классической и сферической тригонометрий.

Применяя рассуждение для доказательства теоремы 5.1 к произвольной свободной s-полигонометрии с группой сторон G_1, получаем следующую теорему.

Теорема 5.2. *Для любой коммутативной линейно упорядоченной группы* G_1 *существует s-тригонометрия* $\mathrm{strm} = \mathrm{strm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ *такая, что теория* $T(\mathrm{strm})$ *обладает псевдоевклидовой алгеброй бинарных изолирующих формул.*

Алгебра $\mathfrak{A}$ для теории $T(\mathrm{spm})$ называется *интервальной*, если для любых реберных меток u и v соответствующих предикатам Q_{g_1} и $Q_{g_1'}$, $g_1, g_1' \in \mathrm{Pos}(G_1)$, множество $u \cdot u'$ состоит из всех меток w, соответствующих предикатам Q_g таким, что элементы g образуют некоторый интервал $I_{g_1,g_1'}$ в $\mathrm{Pos}(G_1)$. При этом каждое множество $u \cdot u'$ обозначается через $I_{u,v}$ и образует интервал относительно линейного порядка, порождаемого линейным порядком группы G_1.

Таким образом, каждой паре (u, u') реберных меток соответствует как интервал $I_{g_1,g_1'}$, так и интервал $I_{u,u'}$, задаваемый интервалом $I_{g_1,g_1'}$.

Заметим, что в силу $|g_1 - g_1'|, g_1 + g_1' \in I_{g_1,g_1'}$ имеет место включение

$$[|g_1 - g_1'|, g_1 + g_1'] \subseteq I_{g_1,g_1'}. \tag{2}$$

Система $\mathcal{I}$ интервалов $I_{g_1,g_1'}$, удовлетворяющих (2), называется *согласованной* с умножением меток.

Снова применяя рассуждение для доказательства теоремы 5.1 к некоторой свободной s-полигонометрии, получаем следующую теорему.

Теорема 5.3. *Для любой коммутативной линейно упорядоченной группы G_1 и согласованной системы $\mathcal{I}$ интервалов существует s-тригонометрия $\mathrm{strm} = \mathrm{strm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ такая, что теория $T(\mathrm{strm})$ обладает интервальной алгеброй бинарных изолирующих формул, определяющей систему $\mathcal{I}$.*

References

[1] S.V. Sudoplatov, *Group polygonometries*, NSTU, Novosibirsk, 2011, 2013. (in Russian)

[2] S.V. Sudoplatov, *Trigonometries on an exact pseudoplane*, Model theory, Proc. Sov.-Fr. Colloq., Karaganda/USSR, 1990, 185–201. Zbl 0755.03019

[3] D. Hilbert, S. Cohn-Fossen, *Anschauliche geometrie*, Berlin : Verlag von J. Springer, 1932. JFM 58.0597.01

[4] V.D. Bol'shakov, Yu.I. Markuze, *City polygonometry*, (Adjustment and design basics), Nedra, Moscow, 1979. (in Russian)

[5] V.V. Danilov, *Exact polygonometry*, Publishing house of geodetic and cartographic literature, Moscow, 1953. (in Russian)

[6] B.I. Kos'kov, *City polygonometry*, Geodezizdat, Moscow, 1962. (in Russian)

[7] N.N. Stepanov, *Spherical trigonometry*, ONTI NKTP SSSR, Moscow, Leningrad, 1948. Zbl 0034.23902

[8] S.V. Sudoplatov, *On group trigonometries on a projective plane*, Sib. Math. J., **36**:2 (1995), 368–378. Zbl 0863.51010

[9] S.V. Sudoplatov, *ω-Stable trigonometries on a projective plane*, Sib. Adv. Math., **12**:4 (2002), 97–125. Zbl 1047.03030

[10] S.V. Sudoplatov, *Small stable trigonometries with infinite weight*, in Pinus, A.G. (ed.) et al., Algebra and model theory 6. Collection of papers from the 7th summer school "Frontiers in model theory and universal algebra", Erlogol, Russia, June 26–30, NSTU, Novosibirsk, 2007, 111–117. Zbl 1299.03045

[11] S.V. Sudoplatov, *Embedding relation in the class of group trigonometries*, Algebra Logika, **33**:4 (1994), 242–256. Zbl 0851.51006

[12] S.V. Sudoplatov, *On trigonometries not embeddable in trigonometries with small theories*, Investigations in the theory of algebraic systems. Collection of scientific papers, Edition of Karaganda State University, Karaganda, 1995, 103–110.

[13] S.V. Sudoplatov, *On trigonometries of finite groups and groups with subgroups having trigonometries*, Sib. Math. J., **37**:2 (1996), 363–366. Zbl 0896.20027

[14] S.V. Sudoplatov, *Partial algebras associated with polygonometries of pairs of groups*, Algebra Logika, **36**:4 (1997), 454–476. Zbl 0972.08001

[15] S.V. Sudoplatov, *Trigonometries with functions Sin and Cos*, in Algebra and Model Theory. Collection of papers, eds. A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, NSTU, Novosibirsk, 1997, 169–172. (in Russian)

[16] S.V. Sudoplatov, *The number of models for theories of everywhere finitely defined polygonometries*, Sib. Math. J., **40**:3 (1999), 590–594. Zbl 0932.03035
[17] S.V. Sudoplatov, *On classification of group polygonometries*, Mat. Tr., **4**:1 (2001), 98–125. Zbl 1016.51007
[18] S.V. Sudoplatov, *Models of Cubic Theories*, Bulletin of the Section of Logic, **43**:1-2 (2014), 19–34.
[19] S.V. Sudoplatov, *Polygonometries of pairs of groups*, Sib. Math. J., **38**:4 (1997), 801–806. Zbl 1042.20506
[20] S.V. Sudoplatov, *Powerful digraphs*, Sib. Mat. Zh., **48**:1 (2007), 205–213. Zbl 1164.03316
[21] S.V. Sudoplatov, *Group polygonometries with symmetrical conditions*, in Pinus, A. G. (ed.) et al., Algebra and model theory. 2. Collection of papers, NSTU, Novosibirsk, 1999, 140–159. Zbl 0951.03030
[22] S.V. Sudoplatov, *Classification of countable models of complete theories: monograph in two parts*, NSTU, Novosibirsk, 2018, 326 + 394 pp. (in Russian)
[23] I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov, *Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory*, Sib. Electron. Mat. Izv., **11** (2014), 380–407. Zbl 1355.03025
[24] D.Yu. Emelyanov, S.V. Sudoplatov, *On deterministic and absorbing algebras of binary formulas of polygonometrical theories*, Reports of Irkutsk State University. Series "Mathematics", **20** (2017), 32–44. (in Russian)
[25] A. Pillay, *Countable models of stable theories*, Proc. Am. Math. Soc., **89**:4 (1983), 666–672. Zbl 0545.03010
[26] B. S. Baizhanov, *Orthogonality of one types in weakly o-minimal theories*, in Pinus, A. G. (ed.) et al., Algebra and model theory. 2. Collection of papers, NSTU, Novosibirsk, 1999, 5–28. Zbl 0952.03045
[27] B.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, *On behaviour of* 2*-formulas in weakly o-minimal theories*, in Goncharov, S. S. (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian logic conference, Novosibirsk, Russia, August 16–19, 2005. Hackensack, World Scientific, NJ, 2006, 31–40. Zbl 1119.03033
[28] S.V. Sudoplatov, *Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories*, J. Math. Sci., **169**:5 (2010), 680–695. Zbl 1229.03032
[29] B.S. Baizhanov, S.V. Sudoplatov, V. V. Verbovskiy, *Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation*, Sib. Electron. Mat. Izv, **9** (2012), 161–184. Zbl 1330.03073
[30] S.V. Sudoplatov, *Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory*, Sib. Electron. Mat. Izv., **11** (2014), 408–433. Zbv 1355.03026
[31] S.V. Sudoplatov, *Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories*, International Mathematical Forum, **9**:21 (2014), 1029–1033.

Dmitry Yuryevich Emelyanov
Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marx ave.,
Novosibirsk, 630073, Russia.
E-mail address: `dima-pavlyk@mail.ru`

Sergey Vladimirovich Sudoplatov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Academician Koptyug ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia.
Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marx ave.,
Novosibirsk, 630073, Russia.
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia.
E-mail address: `sudoplat@math.nsc.ru`