S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 2142–2189 (2020) УДК 517.956.225
DOI 10.33048/semi.2020.17.144 MSC 35J05

КРИТЕРИЙ СОБОЛЕВСКОЙ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ЛИПШИЦЕВЫХ ОБЛАСТЯХ. I

А.И. ПАРФЁНОВ

Abstract. We study the Dirichlet problem for the Poisson equation in bounded Lipschitz domains. We show that its well-posedness in the first order Sobolev space is equivalent to the condition of K. Nyström (1996). This criterion is simpler than the similar criterion of Z. Shen (2005) due to using one positive harmonic function with vanishing trace instead of gradients of all harmonic functions with vanishing trace. Our criterion yields the main known facts about this well-posedness except for Shen's criterion. Finally, we determine all possible combinations of three basic properties (injectivity, denseness of range and closedness of range) of the operator of the boundary value problem under consideration.

Keywords: Alkhutov criterion, Bogdan formula for the Green function, Carleman–Huber theorem, Dirichlet problem for the Poisson equation, LHMD property, Lipschitz domain, Nyström condition, Shen criterion.

Введение

Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$). В этой статье нас интересует вопрос о том, когда задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Parfenov, A.I., Criterion for the Sobolev well-posedness of the Dirichlet problem for the Poisson equation in Lipschitz domains. I.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0010).

Поступила 31 августа 2020 г., опубликована 22 декабря 2020 г.

однозначно разрешима в пространстве $W^{m,p}(\Omega)$ при f, пробегающем пространство $W^{m-2,p}(\Omega)$. Здесь Δ — оператор Лапласа, $m \geqslant 1$ целое и $1 < p < \infty$. Данное свойство задачи (1) назовем $W^{m,p}$-корректностью. Пространство Соболева $W^{m,p}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ состоит из всех распределений u с обобщенными производными $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, $|\alpha| \leqslant m$; $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ и, для $q = p/(p-1)$,

$$W^{-1,p}(\Omega) = (W_0^{1,q}(\Omega))' \quad \left(\begin{array}{c}\text{сопряженное пространство — пространство} \\ \text{всех линейных непрерывных функционалов}\end{array}\right),$$

где $W_0^{1,q}(\Omega)$ — подпространство в $W^{1,q}(\Omega)$ всех функций с нулевым следом. Ввиду плотности $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_0^{1,q}(\Omega)$ можно считать, что $W^{-1,p}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$, а лапласиан Δ понимается в обобщенном смысле.

Вторую часть настоящей статьи планируется посвятить выводу критерия $W^{m,p}$-корректности при $m \geqslant 2$. В данной первой части мы упрощаем критерий $W^{1,p}$-корректности Шена [75] и обсуждаем некоторые свойства оператора

$$\Delta \equiv \Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p}(\Omega). \tag{2}$$

Опишем эти две темы подробнее.

1) В литературе имеется довольно много результатов по $W^{1,p}$-корректности. Они часто содержатся в более общих результатах (переменные коэффициенты, операторы высокого порядка, пространства дробной гладкости), которые мы в дальнейшем «проектируем» на наш частный случай. Прежде всего, равенство $\Delta u = f \in W^{-1,p}(\Omega)$ для $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ можно записать в слабой форме:

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in W_0^{1,q}(\Omega). \tag{3}$$

Это для любой Ω дает $W^{1,2}$-корректность по теореме Рисса о пространстве, сопряженном к гильбертову. Теорема 1 из [12] и теорема 4.6 из [77] содержат $W^{1,p}$-корректность для областей класса C^1. Теорема 1 из [9] и следствие 1 из [34] обеспечивают $W^{1,p}$-корректность для выпуклых областей, а теорема 4.12 в [68] — для полувыпуклых, т.е. удовлетворяющих равномерному условию внешнего шара. Замена переменной $x \mapsto y$ приводит к появлению в (3) малой погрешности, если матрица Якоби замены равномерно близка к единичной. Так можно вывести $W^{1,p}$-корректность для границ $\partial\Omega$ с малой постоянной Липшица из $W^{1,p}$-корректности для гладких областей с помощью ряда Неймана. Результат такого рода дают теорема 7.5.3 в [64] и аналогичная теорема 14.5.3 в [65]. Теорема 3 в [37] для любой области Ω гарантирует $W^{1,p}$-корректность при некотором $p > 2$. Устойчивость обратимости в интерполяционных шкалах показывает $W^{1,p}$-корректность для всех $p \approx 2$, см. теорему 17.2.1 книги [2] или теорему 16.4.1 ее русского оригинала. Аналогично проверяется открытость множества всех $p \in (1, \infty)$ со свойством $W^{1,p}$-корректности. По теореме 0.5(a) в [51] (альтернативный подход есть в теореме 10.1 из [31])

$$\begin{gathered}W^{1,p}\text{-корректность имеет место для любого } p \in (J/(J-1), J), \\ \text{где } J = J(\Omega) > 4 \text{ при } n = 2 \text{ или } J > 3 \text{ при } n \geqslant 3.\end{gathered} \tag{4}$$

Теорема 1.5 из [18] и теорема 1.1 из [60] доставляют $W^{1,p}$-корректность для областей (Райфенберга) с локально «достаточно плоской» границей и, соответственно, областей с нормалью к границе класса VMO.

Приведенные условия являются достаточными. Роль необходимых обычно играют контрпримеры, например, локализация невыпуклого конуса

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \colon (x_1^2 + x_{n-1}^2)^{1/2} + \varepsilon x_n > 0\right\} \quad (\varepsilon > 0),$$

см. [25, с. 167]. Тем не менее, известны два критерия $W^{1,p}$-корректности. Теорема 1 в [8] описывает все ограниченные области (не обязательно липшицевы), в которых $W^{1,p}$-корректность имеет место при всех p, как это случается для C^1-областей или выпуклых областей. Условие состоит в том, чтобы

$$\begin{gathered}(\forall \mu \in (0,1))\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \operatorname{diam}\Omega))\ (\forall x \in B(a,\beta) \cap \Omega) \\ \omega_\beta^a(x) \leqslant \alpha\big(|x-a|/\beta\big)^\mu,\end{gathered} \tag{5}$$

где $B(a,\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x-a| < \beta\}$, а $\omega_\beta^a(x)$ — гармоническая мера множества $\partial B(a,\beta) \cap \Omega$ в точке x относительно множества $B(a,\beta) \cap \Omega$.

Критерий в теореме B статьи [75] относится к $W^{1,p}$-корректности при фиксированном $p > 2$ и параллельно утверждает открытость множества всех $p > 2$ со свойством $W^{1,p}$-корректности. Критерий сформулирован в терминах ограниченности в пространстве $L^p(\Omega)$ преобразования Рисса ∇A^{-1}, где квадратный корень $A = (-\Delta)^{1/2}$ определяется стандартным образом. С учетом оценки

$$\|Au\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

[51, теорема 7.5(b)] легко показать, что $W^{1,p}$-корректность равносильна как ограниченности в $L^p(\Omega)$ оператора $\nabla(-\Delta)^{-1}\operatorname{div} = \nabla A^{-1}(\nabla A^{-1})'$, так и ограниченности в $L^p(\Omega)$ оператора ∇A^{-1}. Критерий гласит, что $W^{1,p}$-корректность с $p > 2$ равносильна условию

$$\begin{gathered}(\exists \alpha > 0)\ (\exists \beta_0 > 0)\ (\exists \gamma_0 > \gamma > 1)\ (\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0,\beta_0))\ (\forall u) \\ \int_{B(a,\beta)\cap\Omega} |\nabla u|^p\,dx \leqslant \alpha\beta^{n-np/2}\left(\int_{B(a,\beta\gamma)\cap\Omega} |\nabla u|^2\,dx\right)^{p/2},\end{gathered} \tag{6}$$

где u — гармоническая функция из $W^{1,2}(B(a,\beta\gamma_0) \cap \Omega)$ с нулевым следом на множестве $B(a,\beta\gamma_0) \cap \partial\Omega$. Теорема C в [75] доставляет вывод утверждения (4) из критерия (6). В остальном он почти не сопоставлен с литературой.

Пусть U — положительная непрерывная в Ω функция с нулевым следом на $\partial\Omega$, гармоническая в некоторой окрестности $\{\varrho < \delta\}$ границы $\partial\Omega$, где

$$\varrho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \quad x \in \Omega.$$

Любые две такие функции сравнимы ввиду граничного принципа Гарнака. Можно взять $U(x) = \min\{G(x,y_0), 1\}$ для функции Грина G задачи (1) и $y_0 \in \Omega$. Мы докажем, что $W^{1,p}$-корректность с $p \geqslant 2$ равносильна условию

$$\begin{gathered}(\exists \alpha > 0)\ (\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \operatorname{diam}\Omega)) \\ \int_{B(a,\beta)\cap\Omega} (U/\varrho)^p\,dx \leqslant \alpha\beta^{n-p} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^p.\end{gathered} \tag{7}$$

Оно аналогично (6) и эквивалентно условию К. Нистрёма [70, с. 336].

Легко показать, что (6) $\Rightarrow$ (7), но мы затрудняемся установить эквивалентность двух критериев. Мы даем прямое доказательство критерия (7), которое отчасти подготавливает планируемый критерий $W^{m,p}$-корректности для $m \geqslant 2$ и является довольно простым, если считать известной формулу Богдана, приближенно выражающую G через U ([15, теорема 2] для $n \geqslant 3$). Корректность доставляет для потенциала Грина $\mathbf{G}f(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy$, где $\operatorname{supp} f \Subset \Omega$, оценку $\|\mathbf{G}f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$, которая допускает изучение посредством формулы Богдана. Обратно, выполнение такой оценки по слабой компактности влечет разрешимость задачи (1) при любом f. Единственность же решения для $p \geqslant 2$ следует из единственности при $p = 2$.

Указанной теме посвящены § 1–4. В § 1 даны предварительные сведения, которые преимущественно связаны с обобщением формулы Богдана на случай $n \geqslant 2$. В § 2 доказана основная теорема о равносильности $W^{1,p}$-корректности, $W^{1,q}$-корректности, оценки $\|\mathbf{G}f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$, условия (7) и внешне более сильного условия с участием степеней логарифма. В § 3 доказана теорема Карлемана–Хубера и на ее основе обсуждается класс областей $\mathcal{A}^\mu$ со свойством (5) для фиксированного $\mu \in (0,1]$. В § 4 мы соединяем весовую L^2-оценку на функцию U с результатами из § 2 и § 3 для вывода основных известных (кроме критерия (6)) и некоторых новых фактов о $W^{1,p}$-корректности.

2) Характерными чертами $W^{m,p}$-корректности для $m = 1$ по сравнению со случаем $m \geqslant 2$ являются «самосопряженность» задачи (1) и возможность неединственности решений. А именно, рефлексивность пространства $W_0^{1,q}(\Omega)$ и интегрирование по частям показывают, что сопряженный Δ_p' к оператору (2) равен Δ_q. Для учета этой специфики введем свойства $\pi_{ijk}(T)$ $(i,j,k \in \{0,1\})$ линейного непрерывного всюду определенного оператора $T : X \to Y$ между банаховыми пространствами X и Y следующими условиями:

$$\begin{aligned} i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{подпространство } N(T) = \{x \in X : Tx = 0\} \text{ равно } \{0\},\\ j = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{линеал } R(T) = \{Tx : x \in X\} \text{ плотен в } Y,\\ k = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{линеал } R(T) \text{ замкнут в } Y. \end{aligned}$$

В этой терминологии $W^{1,p}$-корректность становится свойством $\pi_{000}(\Delta_p)$. Свойства $\pi_{ijk}(T)$ согласованы со взятием сопряженного оператора $T' : Y' \to X'$, если пространство X рефлексивно. Действительно, из теоремы Хана–Банаха и рефлексивности X легко следует, что

$$\begin{aligned} N(T) = \{0\} \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{R(T')} = X',\\ N(T') = \{0\} \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{R(T)} = Y. \end{aligned}$$

По теореме Банаха [86, § VII.5] замкнутость образа инвариантна относительно перехода к сопряженному оператору, так что

$$\pi_{ijk}(T) \Leftrightarrow \pi_{jik}(T'). \tag{8}$$

Автору неизвестно, возможно ли в терминах функции U найти критерии справедливости свойств $\pi_{ijk}(\Delta_p)$, отличных от $\pi_{000}(\Delta_p)$. В заключительном § 5 решается менее амбициозная задача — перечислить все свойства $\pi_{ijk}(\Delta_p)$, которые реализуются на классе всех ограниченных липшицевых областей. Мы показываем, что реализуются в точности четыре возможности:

$$\begin{aligned} &\pi_{000}(\Delta_p) \equiv \pi_{000}(\Delta_q),\\ &\pi_{010}(\Delta_p) \equiv \pi_{100}(\Delta_q),\\ &\pi_{001}(\Delta_p) \equiv \pi_{001}(\Delta_q),\\ &\pi_{011}(\Delta_p) \equiv \pi_{101}(\Delta_q). \end{aligned} \tag{9}$$

Точнее, с привлечением идей из [58] и [62] доказано, что для $p > 2$ и кругового сектора раствора $0 < \Pi < 2\pi$ первые три случая в (9) выполнены соответственно при $\Pi < \pi p/(p-2)$, $\Pi > \pi p/(p-2)$ и $\Pi = \pi p/(p-2)$, а четвертый случай реализуется на некотором криволинейном секторе раствора $\pi p/(p-2)$, $p > 4$. (Четвертый пример можно построить и сочетанием в одной области второго и третьего примеров, но это менее поучительно.) Оставшиеся соотношения

$$\pi_{11k}(\Delta_p) \equiv \pi_{11k}(\Delta_q) \quad (k = 0, 1)$$

запрещены, так как из $N(\Delta_p) \neq \{0\}$ и $N(\Delta_q) \neq \{0\}$ следуют несовместные условия $p < 2$ и $q < 2$.

Указанные результаты частично известны из литературы. В [57] на с. 132 и с. 134 без доказательства даны результаты первых трех приведенных выше примеров. В [58] для бесконечного угла $\{0 < \phi < \pi p/(p-2)\}$ с помощью ряда Фурье по ϕ в сущности доказано третье свойство из (9). Результаты статьи [78] не позволяют для кругового сектора раствора $\Pi > \pi p/(p-2)$ различить случаи $\pi_{010}(\Delta_p)$ и $\pi_{011}(\Delta_p)$. В [84, теорема 7.5] ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^3$ с незамкнутым линеалом $R(\Delta_p)$ строится с помощью последовательности дополнений к сглаженным «острым» круговым конусам. Об обсуждении близких вопросов см. также работы [53, 55, 59, 63].

Соглашения. Буква c указывает на различные положительные константы, зависящие от параметров, перечисленных в скобках. Диаметр diam и расстояние dist берутся относительно евклидовой метрики $|x - y|$, но $|\alpha|$ для мультииндекса α — это его длина. Гамма-функция Эйлера $\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt$ обозначается через $\Gamma(\alpha)$, градиент $(D_1 f, \ldots, D_n f)$ и лапласиан $\sum_{i=1}^n \partial^2 f/\partial x_i^2$ функции f — через ∇f и Δf, вектор $(0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ — через e_n, а первые $n - 1$ компонент вектора $x \in \mathbb{R}^n$ — через x'. При этом $|x'|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |x_i|$. Пусть $s \wedge t = \min\{s, t\}$ и $s \vee t = \max\{s, t\}$ для $s, t \in \mathbb{R}$. Функциональные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$.

1. Предварительные сведения

Приведем, следуя работе [20, § 1], такие свойства гармонических функций, как оценка Карлесона и граничный принцип Гарнака. В основополагающих работах [10, 22, 24, 25, 48, 85] формулировки или доказательства выглядят менее удачными. Подробнее об этих двух свойствах — их справедливость для более широких классов областей и их равносильность для произвольных областей — см. [4] (теорема 1 и замечание 2), [6] (теорема 1 и следствие 1) и обзор [7].

Лемма 1. *Пусть в липшицевом цилиндре*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x'|_\infty < 4 \ \&\ \omega(x') < x_n < \omega(x') + 8\}, \tag{10}$$

где $|\omega(\xi) - \omega(\eta)| \leqslant \theta|\xi - \eta|$ *(*$\theta \geqslant 0$*) и* $\omega(0) = 0$, *заданы положительные гармонические функции* u *и* v *такие, что* $u(\xi, \omega(\xi)) = v(\xi, \omega(\xi)) = 0$ *в смысле непрерывно принимаемых граничных значений. Тогда*

$$\sup_{A_0} u \leqslant c(n, \theta) u(e_n), \tag{11}$$

$$\sup_{A_0} (u/v) \leqslant c(n, \theta) u(e_n)/v(e_n), \tag{12}$$

где $A_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x'|_\infty < 1 \ \&\ \omega(x') < x_n < \omega(x') + 2\}$.

Доказательство. Оценка (11) получается соединением замечаний 1.2 и 1.3 в [20], а оценка (12) — соединением замечаний 1.2 и 1.5 в [20]. Отметим, что в (12) можно $u(e_n)/v(e_n)$ заменить на $\inf_{A_0}(u/v)$ ввиду (12) для пары $\{v,u\}$. $\square$

Дадим основные определения статьи.

Определение 1. *Для $x,y\in\mathbb{R}^n$ введем замкнутый шар (или точку)*

$$A(x,y)=\left\{z\in\mathbb{R}^n\colon \left|\frac{x+y}{2}-z\right|\leqslant|x-y|\right\}.$$

Ограниченная область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ называется липшицевой, если $\Omega\neq\varnothing$ и для каждого $a\in\partial\Omega$ найдутся число $\beta>0$, движение (аффинная изометрия) $D:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и липшицева функция $\omega: B(a',\beta)\to\mathbb{R}$ такие, что

$$D(a)=a \quad \& \quad B(a,\beta)\cap D(\Omega)=\{x\in B(a,\beta)\colon x_n>\omega(x')\}.$$

Положим $E(0)=-\infty$ и, для $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$,

$$E(x)=\begin{cases}(2\pi)^{-1}\ln|x| & \text{при}\quad n=2,\\ \frac{\Gamma(n/2)}{(2-n)2\pi^{n/2}}|x|^{2-n} & \text{при}\quad n\geqslant 3.\end{cases}$$

Для ограниченной липшицевой области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ и $x\in\Omega$ пусть F_x — мера, ассоциированная с мерой Дирака δ_x, т.е. такая конечная борелевская мера с носителем в $\partial\Omega$, что для любой гармонической в Ω функции $h\in C(\overline{\Omega})$

$$h(x)=\int_{\overline{\Omega}}h\,d\delta_x=\int_{\partial\Omega}h\,dF_x. \tag{13}$$

Функция Грина области Ω — это функция

$$G(x,y)=-E(x-y)+\int_{\partial\Omega}E(y-a)\,dF_x(a),\quad x,y\in\Omega. \tag{14}$$

Множество всех непрерывных функций $U:\Omega\to(0,\infty)$, гармонических для некоторого $\delta=\delta(U)>0$ на множестве $\{\varrho<\delta\}$ и таких, что $\lim_{x\to a}U(x)=0$ для всех $a\in\partial\Omega$, обозначим через U_Ω.

В [56, § IV.1] не обязательно единственная ассоциированная мера построена по каждой мере над замыканием любой ограниченной области (и не только). Наша область Ω удовлетворяет условию внешнего конуса Пуанкаре. Отсюда по [56, § IV.1] она регулярна, т.е. для любого $g\in C(\partial\Omega)$ задача Дирихле

$$\Delta h=0 \quad \& \quad h\big|_{\partial\Omega}=g$$

однозначно разрешима в классе $C^\infty(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$. Формула (13) дает соответствие $g=h\big|_{\partial\Omega}\mapsto h$ и единственность меры F_x. Значит, второе слагаемое в (14) — решение задачи Дирихле с $g(a)=E(y-a)$, так что $G(x,y)\to 0$ при $x\to a\in\partial\Omega$. Кроме того, $G(x,y)=G(y,x)>0$ опять на основании [56, § IV.1].

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое множество. Выметание [56, § IV.2] меры δ_x $(x\in\Omega)$ на компакт $K=\partial\Omega$ доставляет такую конечную борелевскую меру δ'_x с носителем в K, что $E*\delta'_x\geqslant E*\delta_x$ в $\mathbb{R}^n$ и $E*\delta'_x=E*\delta_x$ на $K\setminus X$ для множества X нулевой внешней емкости. Мера δ'_x с этими свойствами единственна и является ассоциированной с δ_x. Для борелевского множества $A\subset\partial\Omega$ число $\delta'_x(A)$ называют гармонической мерой A в точке x относительно множества Ω и обозначают через $\omega(x,A,\Omega)$.

Альтернативный подход к этим вопросам см. в [43, § 5.2] (функция Грина) и [43, § 8.2] (гармоническая мера).

Функцию Грина часто задают ([27, 28, 29, 38, 69]) как обобщенное решение задачи Дирихле (1) с правой частью $f = -\delta_x$. Следующая лемма затрагивает связь G с обобщенными решениями.

Лемма 2. *Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, а носитель функции $f \in L^\infty(\Omega)$ компактен. Тогда для всех $x \in \Omega$ интеграл*

$$\mathbf{G}f(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy$$

абсолютно сходится, $\mathbf{G}f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ и $\Delta\mathbf{G}f = -f$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Доказательство. Основы теории распределений [45] дают абсолютную сходимость свертки $E * f$, принадлежность $E * f$ к $C^1(\mathbb{R}^n)$ и равенство $\Delta(E * f) = f$. Второе слагаемое в (14) равно $E * F_y \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ $(\forall y \in \Omega)$, что влечет абсолютную сходимость $\mathbf{G}f(x)$ и соотношения $\mathbf{G}f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\mathbf{G}f\big|_{\partial\Omega} = 0$ и $\Delta\mathbf{G}f = -f$.

Для проверки интегрируемости $|\nabla\mathbf{G}f|^2$ можно использовать свойство (72) из § 4 или рассуждение из замечания 1.2 в [20]. Мы выберем другой способ. Пусть $\partial\Omega \in C^\infty$. Хорошо известно, что тогда $E * F_y \in C^\infty(\overline{\Omega})$ как решение задачи Дирихле с данными $g = E(y - \cdot) \in C^\infty(\partial\Omega)$. При $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla\mathbf{G}f|^2\,dx = \int_\Omega f\mathbf{G}f\,dx, \tag{15}$$

где интегрирование по частям законно ввиду $E * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\mathbf{G}f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. При $f \in L^\infty(\Omega)$ найдем соболевскую аппроксимацию (f_j) к f. Тогда $\mathbf{G}f_j \to \mathbf{G}f$ в $C^1(\overline{\Omega})$ при $j \to \infty$ ввиду $E * f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, что дает (15) для $\partial\Omega \in C^\infty$.

Пусть Ω лишь липшицева. Найдем исчерпание Ω областями $\operatorname{supp} f \Subset \Omega_j \subset \Omega$ с $\partial\Omega_j \in C^\infty$ и построим соответствующие потенциалы $\mathbf{G}_j f$. Принцип максимума и включение $E * F_y \in C(\overline{\Omega})$ показывают, что $\mathbf{G}_j f - \mathbf{G}f \xrightarrow{j\to\infty} 0$ в C^∞ на компактах в Ω. Переходя в равенстве (15) для Ω_j и $\mathbf{G}_j f$ к пределу, получаем $\int_\Omega |\nabla\mathbf{G}f|^2\,dx \leqslant \int_\Omega f\mathbf{G}f\,dx$ и поэтому $\mathbf{G}f \in W_0^{1,2}(\Omega)$. $\square$

Лемма 3. *Для ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $1 < p < \infty$*

$$(\exists\alpha_P > 0)\ (\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \alpha_P\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{16}$$

$$(\exists\alpha_H(p) > 0)\ (\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \|u/\varrho\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \alpha_H(p)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{17}$$

$$(\forall u \in L^p(\Omega)) \quad \|u/\varrho\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leqslant \alpha_H(q)\|u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{18}$$

где $q = p/(p-1)$. Найдется $M > 0$ такое, что для любого $f \in W^{-1,p}(\Omega)$

$$(\exists f_1, \ldots, f_n \in L^p(\Omega)) \quad f = \sum_{j=1}^n D_j f_j \quad \& \quad \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^p(\Omega)} \leqslant M\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}. \tag{19}$$

Линеал $C_0^\infty(\Omega)$ плотен в $W^{-1,p}(\Omega)$.

Здесь $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \big\||\nabla u|\big\|_{L^p(\Omega)}$ и $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.

Обычно, см. [1, с. 50], [65, с. 496] и [69, с. 64], элементы $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ представляют в виде $f = f_0 + \sum_{j=1}^n D_j f_j$ или $f = f_0/\varrho + \sum_{j=1}^n D_j f_j$ для $f_j \in L^p(\Omega)$. Запись (19) иногда используется в литературе в связи с $W^{1,p}$-корректностью и она понадобится в дальнейшем.

Доказательство. Соотношение (16) суть неравенство Пуанкаре [1, с. 158], а (17) — неравенство Харди [69, с. 286].

Свойство (18) следует из неравенства Гёльдера и (17), так как

$$(\forall v \in C_0^\infty(\Omega)) \quad |\langle u/\varrho, v\rangle| \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v/\varrho\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \alpha_H(q)\|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{W^{1,q}(\Omega)}.$$

В декартовом произведении $\prod_{j=1}^n L^q(\Omega)$ линеал

$$Q = \big\{(D_1 u, \dots, D_n u)\colon u \in W_0^{1,q}(\Omega)\big\} \tag{20}$$

замкнут ввиду неравенства Пуанкаре и замкнутости оператора обобщенного дифференцирования. Опять по неравенству Пуанкаре отображение пространства $W_0^{1,q}(\Omega)$ на Q из (20) биективно, так что $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ можно считать линейным непрерывным функционалом на подпространстве Q в $\prod_{j=1}^n L^q(\Omega)$. Доказательство (19) завершается по обычной схеме из [1, 65, 69].

Плотность линеала $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{-1,p}(\Omega)$ следует из (19) и плотности $C_0^\infty(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$. □

Сформулируем ряд геометрических и аналитических свойств ограниченных липшицевых областей и свойств функций класса U_Ω.

Лемма 4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная липшицева область. Существуют $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 1$, $0 < \beta_1 < \operatorname{diam}\Omega$ и $\gamma_1 > 1$ со следующими свойствами:*

$$(\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \beta_1)) \quad \sup_{\partial B(a,\beta)\cap\Omega} \varrho \geqslant \beta/\alpha_1, \tag{21}$$

$$(\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \beta_1))\ (\forall u) \quad \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} u \leqslant \alpha_1 u(a_{(\beta)}), \tag{22}$$

$$(\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \beta_1))\ (\forall u, v) \quad \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} \frac{u}{v} \leqslant \alpha_1 \frac{u(a_{(\beta)})}{v(a_{(\beta)})}, \tag{23}$$

$$(\forall x \in \Omega)\ (\exists z \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}\colon |x - z| \leqslant \alpha_2\varrho(x))\ (\forall a \in \partial\Omega) \quad \frac{|x-a|}{|a-z|} \leqslant \alpha_2, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &(\forall \nu > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall x, y \in \Omega\colon |x - y| \leqslant \{\varrho(x) \wedge \varrho(y)\}\nu)\ (\exists \{z[i]\}_0^N \subset \Omega) \\ &\qquad z[0] = x \quad \&\quad z[N] = y \quad \&\quad (\forall i < N)\ A(z[i], z[i+1]) \subset \Omega \\ &\qquad\qquad \&\quad (\forall i, j)\ |z[i] - z[j]| \leqslant \alpha_3|x - y|. \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь u и v — положительные гармонические на множестве $B(a, \beta\gamma_1) \cap \Omega$ функции с нулевыми граничными значениями на $B(a, \beta\gamma_1)\cap\partial\Omega$, а $a_{(\beta)}$ — любая из точек, на которых реализуется супремум из (21).

Множество U_Ω не пусто. Пусть $U \in U_\Omega$. Тогда

$$(\forall x \in \Omega)\ (\forall \gamma > 1) \quad \sup_{B(x,\varrho(x)\gamma)\cap\Omega} U \leqslant c(\Omega, U, \gamma)U(x), \tag{26}$$

$$(\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \operatorname{diam}\Omega))\ (\forall \gamma > 1) \quad \frac{\sup_{B(a,\beta\gamma)\cap\Omega} U}{\sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U} \leqslant c(\Omega, U, \gamma). \tag{27}$$

Для $\alpha \geqslant 1$ и $x, y \in \Omega$ обозначим

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \varrho(x) + \varrho(y) + |x - y|, \\ \mathcal{A}_\alpha(x, y) &= \{z \in \Omega : |z - (x + y)/2| \leqslant \rho(x, y)\alpha\}, \\ \mathcal{B}_\alpha(x, y) &= \{z \in \mathcal{A}_\alpha(x, y)\colon \rho(x, y) \leqslant \varrho(z)\alpha\}. \end{aligned}$$

Выполнены соотношения

$$(\forall\alpha)\ (\exists\vartheta>1)\ (\forall x,y)\quad \vartheta^{-1}\sup_{\mathcal{A}_\alpha(x,y)}U\leqslant\sup_{A(x,y)\cap\Omega}U\leqslant\vartheta\inf_{\mathcal{B}_\alpha(x,y)}U, \tag{28}$$

$$(\exists\alpha)\ (\forall x,y)\quad \mathcal{B}_\alpha(x,y)\neq\varnothing. \tag{29}$$

Кроме того, $0<\inf_\Omega(U/V)\leqslant\sup_\Omega(U/V)<\infty$ *для любых* $U,V\in U_\Omega$.

Формулировка свойств (21)–(23) сходна с работой [4]. Множество $B(a,\beta)\cap\Omega$ не обязательно связно, но его точки можно соединить кривыми в большем множестве $B(a,\beta\gamma_1)\cap\Omega$, тоже не обязательно связном.

Точку $a_{(\beta)}$ иногда называют нетангенциальной для $a\in\partial\Omega$. Точку z из (24) можно назвать приближенным отражением точки x относительно $\partial\Omega$.

Семейства $\{z[i]\}_{i=0}^N$ и $\{A(z[i],z[i+1])\}_{i=0}^{N-1}$ или аналогичные им называют цепочками Гарнака.

Величина $\sup_{A(x,y)\cap\Omega}U$ из (28) понадобится для записи формул Богдана. В [15] для этой цели применялось значение $U(z)$ для z из аналога множества

$$\{z\in A(x,y)\cap\Omega\colon \rho(x,y)\leqslant\varrho(z)\alpha\}.$$

Преимущество $\sup_{A(x,y)\cap\Omega}U$ заключается в отсутствии параметра α.

Доказательство. Свойства (21)–(25) проверяются с помощью определения 1 и компактности $\partial\Omega$. Рассуждения являются простыми и техническими, поэтому ограничимся схемой доказательства. Компактность $\partial\Omega$ показывает, что число $\beta>0$ и параметр $\theta\geqslant0$ из условия липшицевости $|\omega(\xi)-\omega(\eta)|\leqslant\theta|\xi-\eta|$ в определении липшицевой области можно считать общими для всех $a\in\partial\Omega$ (обозначим их через β_0 и θ_0). Это делает свойства (21), (24) и (25) почти тривиальными. При проверке (24) надо разобрать случаи малых и больших значений $\varrho(x)$, а при проверке (25) — случаи малых и больших значений $\rho(x,y)$. Свойства (22) и (23) вытекают из свойств (11) и (12), в которых к независимому переменному x применена композиция T движения и растяжения в $\beta\gamma_0$ раз, где $1\ll\gamma_0\ll\gamma_1\leqslant\beta_0/\beta_1$. Условия $\gamma_0\ll\gamma_1\leqslant\beta_0/\beta_1$ гарантируют, что множество $B(a,\beta\gamma_1)\cap\Omega$ описывается определением 1 и содержит в себе как множество $T(A)$ (см. (10)), так и некоторую соединяющую точки $a_{(\beta)}$ и $T(e_n)$ цепочку Гарнака, откуда

$$u(a_{(\beta)})\approx u(T(e_n))\quad\&\quad v(a_{(\beta)})\approx v(T(e_n)).$$

Условие же $1\ll\gamma_0$ обеспечивает, что $B(a,\beta)\cap\Omega\subset T(A_0)$. Для дальнейшего отметим, что постоянные $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\gamma_1)$ зависят лишь от Ω.

Очевидно, что U_Ω содержит функцию $x\mapsto G(x,y_0)\wedge1$ для любого $y_0\in\Omega$, где G — функция Грина области Ω. Значит, $U_\Omega\neq\varnothing$.

Возьмем функцию $U\in U_\Omega$. Пусть она гармоническая на множестве $\{\varrho<\delta\}$. Рассмотрим $\gamma>1$ и $x\in\Omega$ с $\varrho(x)<\beta_1/(1+\gamma)$. Найдем $a\in\partial\Omega$, $|x-a|=\varrho(x)$. Имеет смысл точка $y=a_{(\varrho(x)(1+\gamma))}$, причем ввиду (21)

$$|x-y|\leqslant\varrho(x)+\varrho(x)(1+\gamma)\leqslant\{\varrho(x)\wedge\varrho(y)\}\nu,\quad \nu=\left\{1\vee\frac{\alpha_1}{1+\gamma}\right\}(2+\gamma).$$

По (25) можно построить соответствующие $N=N(\Omega,\gamma)$ и цепочку $\{z[i]\}_0^N$. Очевидно, что $A(z[i],z[i+1])\subset B(a,\varrho(x)c_1(\alpha_3,\gamma))\cap\Omega$ при $i<N$. Если

$$\varrho(x)<c_2(\Omega,U,\gamma)=\frac{\beta_1}{1+\gamma}\wedge\frac{\delta}{(1+\gamma)\gamma_1}\wedge\frac{\delta}{c_1},$$

то в силу (22) и неравенства Гарнака

$$\sup_{B(x,\varrho(x)\gamma)\cap\Omega} U \leqslant \sup_{B(a,\varrho(x)(1+\gamma))\cap\Omega} U \leqslant \alpha_1 U(y) = \alpha_1 U(z[N])$$
$$\leqslant \alpha_1 3^n U(z[N-1]) \leqslant \dots \leqslant \alpha_1 3^{nN} U(z[0]) = \alpha_1 3^{nN} U(x).$$

Если же $\varrho(x) \geqslant c_2$, то

$$\sup_{B(x,\varrho(x)\gamma)\cap\Omega} U \leqslant \sup_{\Omega} U \leqslant c_3(\Omega, U, \gamma) \min_{\{\varrho\geqslant c_2\}} U \leqslant c_3 U(x). \tag{30}$$

Свойство (26) доказано.

Свойство (27) проверяется так же, как (26). Отличие заключается в том, что точка $a \in \partial\Omega$ дана по условию, а вместо x и $y = a_{(\varrho(x)(1+\gamma))}$ используются точки $a_{(\beta)}$ и $a_{(\beta\gamma)}$. Они удовлетворяют оценке

$$|a_{(\beta)} - a_{(\beta\gamma)}| \leqslant \beta + \beta\gamma \leqslant \{\varrho(a_{(\beta)}) \wedge \varrho(a_{(\beta\gamma)})\}\nu, \quad \nu = (1+\gamma)\alpha_1.$$

Возьмем $x, y \in \Omega$ такие, что $\varrho(x) \geqslant \varrho(y)$. Если $\varrho(x) \geqslant |x-y|/4$, то

$$x \in A(x,y) \cap \Omega \quad \& \quad \rho(x,y) \leqslant 2\varrho(x) + |x-y| \leqslant 6\varrho(x).$$

Пусть $\varrho(x) < |x-y|/4$. Считая, что $\beta_1 < \operatorname{diam}\Omega/4$, положим

$$\beta = \frac{|x-y|\beta_1}{\operatorname{diam}\Omega} < \beta_1 \wedge \frac{|x-y|}{4}.$$

С учетом (21) найдем $a \in \partial\Omega$ и $a_{(\beta)} \in \partial B(a,\beta) \cap \Omega$ со свойствами $|x-a| = \varrho(x)$ и $\varrho(a_{(\beta)}) \geqslant \beta/\alpha_1$. Тогда

$$|a_{(\beta)} - (x+y)/2| \leqslant |a_{(\beta)} - a| + |a-x| + |x-y|/2 < |x-y|,$$
$$\rho(x,y) < 3|x-y|/2 = 3\beta \operatorname{diam}\Omega/(2\beta_1) \leqslant \underbrace{3\alpha_1 \operatorname{diam}\Omega/(2\beta_1)}_{c_4(\Omega)} \varrho(a_{(\beta)}).$$

При этом $\alpha_1 > 1$ и потому $c_4 > 6$. В каждом из случаев

$$(\exists z_0 \in A(x,y) \cap \Omega \subset \mathcal{A}_1(x,y)) \quad z_0 \in \mathcal{B}_{c_4}(x,y).$$

В частности, имеет место (29) для $\alpha = c_4$.

Пусть $\alpha \geqslant 1$. По неравенству треугольника и свойству (26)

$$\mathcal{A}_\alpha(x,y) \subset \overline{B(z_0, |x-y| + \rho(x,y)\alpha)} \subset B(z_0, \varrho(z_0)c_4\{1+\alpha\}),$$
$$\sup_{\mathcal{A}_\alpha(x,y)} U \leqslant \sup_{B(z_0,\varrho(z_0)c_4\{1+\alpha\})\cap\Omega} U \leqslant c_5(\Omega, U, c_4\{1+\alpha\}) U(z_0) \leqslant c_5 \sup_{A(x,y)\cap\Omega} U.$$

Для любого $z \in \mathcal{B}_\alpha(x,y)$ аналогичным образом

$$A(x,y) \subset \overline{B(z, |x-y| + \rho(x,y)\alpha)} \subset B(z, \varrho(z)\alpha(1+\alpha)),$$
$$\sup_{A(x,y)\cap\Omega} U \leqslant c(\Omega, U, \alpha(1+\alpha)) U(z).$$

Мы доказали (28).

Пусть функции $U, V \in U_\Omega$ гармонические на множестве $\{\varrho < \delta\}$. Возьмем положительное число $\beta_2 < \beta_1 \wedge (\delta/\gamma_1)$. Находя для любого $x \in \{\varrho < \beta_2\}$ точку $a \in \partial\Omega$ с $|x-a| = \varrho(x) < \beta_2$, ввиду (23) и (21) получаем

$$\sup_{\{\varrho<\beta_2\}} (U/V) = \sup_{a\in\partial\Omega} \sup_{B(a,\beta_2)\cap\Omega} (U/V) \leqslant \alpha_1 \max_{\{\varrho\geqslant\beta_2/\alpha_1\}} (U/V) \equiv \alpha_1 M.$$

Отсюда $\sup_\Omega(U/V) \leqslant (\alpha_1 M) \vee M = \alpha_1 M < \infty$. Аналогично $\inf_\Omega(U/V) > 0$. Лемма 4 доказана. □

Формула Богдана для функции Грина [15, теорема 2] в следующей лемме обобщается со случая $n \geqslant 3$ на случай $n \geqslant 2$ с меньшим вниманием к возникающим константам. В [15, теорема 1] приведена аналогичная приближенная формула для ядра Мартина. В связи с оценками для функций Грина сошлемся на работы [17, 27, 28, 29, 38, 52, 67] и литературу в них. Двустороннюю оценку для плоской ляпуновской области можно найти в [82, лемма 4.2]. В работах [8, 9, 12, 34, 60, 68, 75] функция Грина и оценки для нее использовались при изучении $W^{1,p}$-корректности.

Лемма 5. *Пусть $U \in U_\Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная липшицева область. Тогда существует $\alpha_G > 1$ такое, что для любых $x, y \in \Omega$*

$$\frac{G(x,y)}{\alpha_G} \leqslant \frac{U(x)U(y)\ln\frac{\varrho(x)+\varrho(y)+|x-y|e}{|x-y|}}{\sup_{A(x,y)\cap\Omega} U^2} \leqslant G(x,y)\alpha_G \qquad (n=2), \tag{31a}$$

$$\frac{G(x,y)}{\alpha_G} \leqslant \frac{U(x)U(y)|x-y|^{2-n}}{\sup_{A(x,y)\cap\Omega} U^2} \leqslant G(x,y)\alpha_G \qquad (n \geqslant 3), \tag{31b}$$

где G — функция Грина области Ω.

Доказательство. Построим постоянные $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \gamma_1)$ по лемме 4. Пусть функция U гармоническая на множестве $\{\varrho < \delta\}$, $\delta \leqslant \operatorname{diam}\Omega/2$. Тогда

$$\varepsilon(\Omega, \delta) = \frac{\beta_1}{\operatorname{diam}\Omega} \wedge \frac{\delta}{\gamma_1 \operatorname{diam}\Omega} \wedge \frac{1}{12} \leqslant \frac{1}{2\gamma_1}.$$

Обозначим $f(x,y) = G(x,y) + E(x-y) = f(y,x)$ (см. (14)).

Для любых точек $x, y \in \Omega$ найдем точки $a, b \in \partial\Omega$ такие, что $|x-a| = \varrho(x)$ и $|y-b| = \varrho(y)$. В терминах леммы 4 обозначим

$$X = \begin{cases} x & \text{при} \quad \varrho(x) \geqslant \beta = |x-y|\varepsilon, \\ a_{(\beta)} & \text{при} \quad \varrho(x) < \beta, \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} y & \text{при} \quad \varrho(y) \geqslant \beta = |x-y|\varepsilon, \\ b_{(\beta)} & \text{при} \quad \varrho(y) < \beta. \end{cases}$$

Здесь $a_{(\beta)}$ и $b_{(\beta)}$ имеют смысл ввиду $\beta < (\operatorname{diam}\Omega)\varepsilon \leqslant \beta_1$. При проверке формул Богдана (31) можно считать, что $x \neq y$. Очевидно, что

$$\begin{gathered} |X-x| < 2\beta \quad \& \quad |Y-y| < 2\beta, \\ (2/3)|x-y| \leqslant |x-y|(1-4\varepsilon) < |X-Y| < |x-y|(1+4\varepsilon) \leqslant (4/3)|x-y|. \end{gathered} \tag{32}$$

Покажем, что с не зависящей от x и y постоянной $\vartheta > 1$

$$\alpha_1^{-1} \leqslant \frac{U(x)G(X,y)}{G(x,y)U(X)} \leqslant \alpha_1, \tag{33}$$

$$\alpha_1^{-1} \leqslant \frac{U(y)G(X,Y)}{G(X,y)U(Y)} \leqslant \alpha_1, \tag{34}$$

$$\vartheta^{-1} \leqslant \frac{\ln\frac{\varrho(x)+\varrho(y)+|x-y|e}{|x-y|}}{G(X,Y)} \leqslant \vartheta \quad (n=2), \tag{35}$$

$$\vartheta^{-1} \leqslant \frac{|x-y|^{2-n}}{G(X,Y)} \leqslant \vartheta \quad (n \geqslant 3), \tag{36}$$

$$\vartheta^{-1} \leqslant \frac{U(X)}{\sup_{A(x,y)\cap\Omega} U} \leqslant 1, \tag{37}$$

$$\vartheta^{-1} \leqslant \frac{U(Y)}{\sup_{A(x,y)\cap\Omega} U} \leqslant 1. \tag{38}$$

Перемножение этих оценок доказывает (31) с постоянной $\alpha_G = \alpha_1^2\vartheta^3$.

При $\varrho(x) \geqslant \beta$ неравенство (33) тривиально. Пусть $\varrho(x) < \beta$. Тогда

$$|x-a| = \varrho(x) < \beta \quad \& \quad B(a,\beta\gamma_1)\cap\Omega \subset B(a,\delta)\cap\Omega \subset \{\varrho<\delta\},$$
$$|y-a| \geqslant |x-y| - |x-a| > |x-y|/2 \geqslant \beta\gamma_1 \quad \Rightarrow \quad y \notin B(a,\beta\gamma_1).$$

Поэтому (33) следует из оценки (23) для функций U и $G(\cdot,y)$. Неравенства (34) так же выводятся из (23) для функций U и $G(X,\cdot)$, так как при $\varrho(y) < \beta$

$$|y-b| = \varrho(y) < \beta \quad \& \quad B(b,\beta\gamma_1)\cap\Omega \subset B(b,\delta)\cap\Omega \subset \{\varrho<\delta\},$$
$$|X-b| \geqslant |x-y| - |X-x| - |y-b| > |x-y|/2 \geqslant \beta\gamma_1 \quad \Rightarrow \quad X \notin B(b,\beta\gamma_1).$$

Проверим (35) и (36). Разберем сначала случай $|X-Y| \leqslant \varrho(X)/2$, когда

$$\varrho(x) \geqslant \varrho(X) - |x-X| > 2|X-Y| - 2\beta > \beta,$$
$$\varrho(y) \geqslant \varrho(X) - |x-X| - |x-y| > 2|X-Y| - 2\beta - |x-y| > \beta$$

ввиду (32), откуда $(X,Y) = (x,y)$ и $|x-y| \leqslant \varrho(x)/2$. При $n=2$ найдем точку z из (24). С учетом принципа максимума для функции $f(x,\cdot)$ получаем

$$\begin{gathered}
\frac{\varrho(x)}{|x-y|} < \frac{\varrho(x)+\varrho(y)+|x-y|e}{|x-y|} < \frac{4\varrho(x)}{|x-y|} \leqslant \left(\frac{\varrho(x)}{|x-y|}\right)^3, \\
(\forall \mathbf{a}\in\partial\Omega) \quad \frac{\ln\varrho(x)}{2\pi} \leqslant \frac{\ln|x-\mathbf{a}|}{2\pi} = f(x,\mathbf{a}) \leqslant \frac{\ln(|\mathbf{a}-z|\alpha_2)}{2\pi}, \\
\frac{\ln\varrho(x)}{2\pi} \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{\ln(|y-z|\alpha_2)}{2\pi}, \\
\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\varrho(x)}{|x-y|} \leqslant G(x,y) \leqslant \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|y-z|\alpha_2}{|x-y|}, \\
\frac{|y-z|\alpha_2}{|x-y|} \leqslant \frac{|x-y|+|x-z|}{|x-y|}\alpha_2 \leqslant \frac{c(\alpha_2)\varrho(x)}{|x-y|} \leqslant \left(\frac{\varrho(x)}{|x-y|}\right)^{c_1(\alpha_2)}, \\
\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\varrho(x)}{|x-y|} \leqslant G(x,y) \leqslant \frac{c_1}{2\pi}\ln\frac{\varrho(x)}{|x-y|}, \\
\frac{2\pi}{c_1} < \frac{\ln\frac{\varrho(x)+\varrho(y)+|x-y|e}{|x-y|}}{G(x,y)} < 6\pi.
\end{gathered}$$

При $n \geqslant 3$ аналогично

$$\begin{gathered}
(\forall \mathbf{a}\in\partial\Omega) \quad \frac{\Gamma(n/2)\varrho(x)^{2-n}}{(2-n)2\pi^{n/2}} \leqslant \frac{\Gamma(n/2)|x-\mathbf{a}|^{2-n}}{(2-n)2\pi^{n/2}} = f(x,\mathbf{a}) < 0, \\
\frac{\Gamma(n/2)\varrho(x)^{2-n}}{(2-n)2\pi^{n/2}} \leqslant f(x,y) < 0, \\
\frac{(n-2)2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} < \frac{|x-y|^{2-n}}{G(x,y)} \leqslant \frac{(n-2)4\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.
\end{gathered}$$

Мы доказали (35) и (36) при $|X-Y| \leqslant \varrho(X)/2$.

Пусть теперь $|X-Y|>\varrho(X)/2$. С учетом (21) и (32) получаем

$$\begin{gathered}|x-y|\varepsilon/\alpha_1=\beta/\alpha_1\leqslant\varrho(X)<2|X-Y|<(8/3)|x-y|,\\ |x-y|\varepsilon/\alpha_1=\beta/\alpha_1\leqslant\varrho(Y),\\ |X-Y|<(4/3)|x-y|\leqslant\{\varrho(X)\wedge\varrho(Y)\}\nu,\quad \nu(\Omega,\delta)=(4/3)\alpha_1/\varepsilon.\end{gathered}\tag{39}$$

По (25) найдем соответствующие $N(\Omega,\delta)\in\mathbb{N}$ и цепочку $\{z[i]\}_0^N$. Положим

$$\gamma(t)=\left(\frac{i}{N}-t\right)Nz[i-1]+\left(t-\frac{i-1}{N}\right)Nz[i],\quad 0\leqslant\frac{i-1}{N}\leqslant t\leqslant\frac{i}{N}\leqslant 1,$$
$$\tau=\max\bigl\{t\in[0,1]\colon |X-\gamma(t)|\leqslant\varrho(X)/2\bigr\}.$$

Тогда $\tau<1$. Для $t\in[\tau,1]\cap\left[\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\right]$ ввиду (39) и (25) выводим

$$|X-\gamma(t)|\geqslant\frac{\varrho(X)}{2}\geqslant\frac{|x-y|\varepsilon}{2\alpha_1}>\frac{|X-Y|\varepsilon}{(8/3)\alpha_1}\geqslant\frac{|z[i-1]-z[i]|\varepsilon}{(8/3)\alpha_1\alpha_3}.$$

Применяя к $G(X,\cdot)$ неравенство Гарнака вдоль ломаной $\gamma\big|_{[\tau,1]}$, имеем

$$c(\Omega,\delta)\leqslant\frac{G(X,\gamma(\tau))}{G(X,Y)}\leqslant c(\Omega,\delta).$$

Ввиду $|X-\gamma(\tau)|=\varrho(X)/2\approx|x-y|$ (см. (39)) и предыдущего абзаца

$$c(\Omega,\delta)\leqslant\frac{|x-y|^{2-n}}{G(X,\gamma(\tau))}\leqslant c(\Omega,\delta).$$

Для завершения доказательства оценок (35) и (36) отметим, что при $n=2$

$$\frac{\varrho(x)+\varrho(y)}{|x-y|}\leqslant 1+\frac{2\varrho(x)}{|x-y|}<1+4\varepsilon+\frac{2\varrho(X)}{|x-y|}<7,\quad \text{см. (32) и (39).}$$

В силу $|X-x|<2\beta\leqslant|x-y|/6$ имеем $X\in A(x,y)\cap\Omega$, что дает правое неравенство в (37). При этом

$$\rho(x,y)/2\leqslant\varrho(x)+|x-y|<\varrho(X)+(2+1/\varepsilon)\beta\leqslant\varrho(X)\{1+(2+1/\varepsilon)\alpha_1\},$$

так что $X\in\mathcal{B}_{c_2}(x,y)$, $c_2(\Omega,\delta)=2\{1+(2+1/\varepsilon)\alpha_1\}$. Из (28) имеем левое неравенство в (37). Оценки (38) проверяются точно так же. Лемма 5 доказана. □

Следующая лемма, которая проверяется без труда, доставляет разложение Уитни открытого множества и связанное с ним разбиение единицы.

Лемма 6. *Введем семейство всех двоичных кубов в* $\mathbb{R}^n$ *формулой*

$$\mathcal{D}=\{I\colon I=[0,2^k)^n+2^kK \text{ для некоторых } k\in\mathbb{Z} \text{ и } K\in\mathbb{Z}^n\}.$$

Для непустого открытого множества $\Omega\subsetneq\mathbb{R}^n$ *положим*

$$\mathcal{E}=\{I\in\mathcal{D}\colon \varrho(\mathfrak{c}_I)\equiv\operatorname{dist}(\mathfrak{c}_I,\mathbb{R}^n\setminus\Omega)>2\operatorname{diam}I\}\quad(\mathfrak{c}_I \text{ — центр } I),$$
$$\mathcal{F}=\{I\in\mathcal{E}\colon I\subset J\in\mathcal{E}\Rightarrow I=J\}.$$

Тогда кубы семейства $\mathcal{F}$ *образуют разбиение множества* Ω *и*

$$(\forall I\in\mathcal{F})\quad \varrho(\mathfrak{c}_I)\leqslant(9/2)\operatorname{diam}I.$$

Существуют функции $0\leqslant\varphi_I\in C_0^\infty(\Omega)$ *(*$I\in\mathcal{F}$*) такие, что*

$$\sum_{I\in\mathcal{F}}\varphi_I\equiv 1\quad\&\quad|\nabla\varphi_I|\leqslant c_\varphi(n)/\operatorname{diam}I,$$
$$\operatorname{supp}\varphi_I\Subset(3/2)I=\{(3/2)(x-\mathfrak{c}_I)+\mathfrak{c}_I\colon x\in I\}.$$

Лемма 7. *Пусть* $u \in C^2(\overline{B})$ *и* $\Delta u = f_0 + \sum_{j=1}^n D_j f_j$ *в* $\mathscr{D}'(B)$, *где*

$$B = B(0,1) \quad \& \quad \{f_j\}_{j=0}^n \subset L^p(\mathbb{R}^n)\ (1 < p < \infty) \quad \& \quad \operatorname{supp} f_j \subset \overline{B(0,3/4)}.$$

Обозначим $\mathcal{F} = \sum_{j=0}^n \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. *Тогда*

$$\|u\|_{W^{1,p}(B(0,3/4))} \leqslant c(n,p)\left\{\max_{\partial B}|u| + \mathcal{F}\right\}.$$

Доказательство. Пусть E — фундаментальное решение Δ из определения 1, а $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ — продолжение Δu нулем на $\mathbb{R}^n \setminus B$. Тогда $v = E * f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Функция $u - v$ гармоническая в B, а функция v — вне $\overline{B(0,3/4)}$, поэтому

$$\|u - v\|_{W^{1,p}(B(0,3/4))} \leqslant c_1(n,p)\sup_B |u - v| = c_1 \max_{\partial B}|u - v|,$$

$$\max_{\partial B}|v| \leqslant c_2(n,p)\|v\|_{W^{1,p}(B(0,3/2))},$$

$$\|u\|_{W^{1,p}(B(0,3/4))} \leqslant c_1 \max_{\partial B}|u| + (c_1c_2 + 1)\|v\|_{W^{1,p}(B(0,3/2))}.$$

По неравенству Юнга для сверток и теореме Михлина о мультипликаторах (см. утверждение после теоремы 7.1.18 и теорему 7.9.5 в [45] для распределения $k(x) = D_i(x_j|x|^{-n})$) заключаем, что $\|v\|_{W^{1,p}(B(0,3/2))} \leqslant c(n,p)\mathcal{F}$. Сопоставление полученных неравенств доказывает лемму 7. □

2. Основной критерий $W^{1,p}$-корректности

Докажем главный результат статьи. Эквивалентность включения $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$ условию Нистрёма будет обсуждаться в § 4.

Определение 2. *Пусть* Ω — *ограниченная липшицева область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *При* $2 \leqslant p < \infty$ *скажем, что* $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$, *если для некоторого* $U \in U_\Omega$

$$(\exists \alpha > 0)\ (\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \operatorname{diam}\Omega))$$

$$\int_{B(a,\beta)\cap\Omega} (U/\varrho)^p\,dx \leqslant \alpha\beta^{n-p} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^p. \tag{40}$$

Теорема 1. *Пусть* Ω — *ограниченная липшицева область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Тогда для любого* $2 \leqslant p < \infty$ *равносильны следующие условия:*

(i) *задача Дирихле для уравнения Пуассона* $W^{1,p}$*-корректна, т.е. любому* $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ *соответствует единственное* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *с* $\Delta u = f$;

(ii) *задача Дирихле для уравнения Пуассона* $W^{1,p/(p-1)}$*-корректна;*

(iii) *потенциал Грина* $\mathbf{G}f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *для любого* $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *и*

$$(\exists C > 0)\ (\forall f \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \|\mathbf{G}f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)};$$

(iv) $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$;

(v) $(\exists U \in U_\Omega)\ (\forall m \geqslant 0)\ (\exists \alpha[m] > 0)\ (\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \operatorname{diam}\Omega))$

$$\int_{B(a,\beta)\cap\Omega} \left(\frac{U}{\varrho}\right)^p \left(\ln\frac{\beta e}{\varrho}\right)^m dx \leqslant \alpha[m]\beta^{n-p} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^p.$$

Доказательство. Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (ii) получается из рефлексивности пространства $W^{1,p}(\Omega)$, см. [1, с. 47] или [69, с. 64], и эквивалентности (8).

Пусть верно (i). Для $f \in C_0^\infty(\Omega)$ пусть If — решение u из (i). Тогда

$$\mathbf{G}f + If \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad \& \quad \Delta(\mathbf{G}f + If) = -f + f = 0 \quad (\text{лемма } 2).$$

Поэтому $\mathbf{G}f + If \in N(\Delta_2) = \{0\}$ и $\mathbf{G}f = -If \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Отсюда

$$(\exists C > 0)\ (\forall f \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \|\mathbf{G}f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|If\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$$

на основании теоремы Банаха об обратном операторе. Значит, (i) $\Rightarrow$ (iii).

Пусть выполнено (iii). Представим любое $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ пределом в $W^{-1,p}(\Omega)$ при $j \to \infty$ последовательности $(f_j) \subset C_0^\infty(\Omega)$ по лемме 3. Положим

$$u_j = -\mathbf{G}f_j \in W_0^{1,p}(\Omega),$$
$$\sup \|u_j\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C \sup \|f_j\|_{W^{-1,p}(\Omega)} < \infty.$$

Рефлексивность пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$ гарантирует, что некоторая подпоследовательность (u_{j_k}) имеет в нем слабый предел $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Тем более $u_{j_k} \to u$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$, поэтому $\Delta u = \lim_{k\to\infty} \Delta u_{j_k} = \lim_{k\to\infty} f_{j_k} = f$. Построенное решение задачи Дирихле единственно ввиду $N(\Delta_p) \subset N(\Delta_2) = \{0\}$. Значит, (iii) $\Rightarrow$ (i).

Далее рассуждаем по схеме (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iii).

Пусть верно (iii). Зафиксируем $U \in U_\Omega$. В обозначениях леммы 4 для любых $a \in \partial\Omega$ и $0 < \beta < 2\beta_1$ положим (где χ — характеристическая функция)

$$b = a_{(\beta/2)} \quad \& \quad B = B(b, \varrho(b)/2) \quad \& \quad f = \chi_B.$$

Для любых $x \in B(a,\beta) \cap \Omega$ и $y \in B \subset B(a,\beta) \cap \Omega$ по леммам 4 и 5

$$\rho(x,y) = \varrho(x) + \varrho(y) + |x-y| < 4\beta \leqslant \varrho(b)8\alpha_1 < \varrho(y)16\alpha_1 \quad (\text{см. } (21)),$$
$$y \in \mathcal{B}_{16\alpha_1}(x,y) \quad \Rightarrow \quad \sup_{A(x,y)\cap\Omega} U \leqslant U(y)\vartheta \quad (\text{см. } (28)),$$
$$G(x,y)\alpha_G \geqslant \frac{U(x)U(y)|x-y|^{2-n}}{\sup_{A(x,y)\cap\Omega} U^2} \geqslant \frac{U(x)(2\beta)^{2-n}}{U(y)\vartheta^2} \quad (\text{см. } (31)),$$
$$\mathbf{G}f(x) \geqslant U(x)\frac{[\operatorname{mes} B](2\beta)^{2-n}}{\alpha_G[\sup_B U]\vartheta^2} \geqslant \frac{c_1(n,\alpha_1,\alpha_G,\vartheta)U(x)\beta^2}{\sup_B U} \quad (\text{см. } (21)),$$
$$\|(\mathbf{G}f)/\varrho\|_{L^p(\Omega)} \geqslant c_1\beta^2 \left(\int_{B(a,\beta)\cap\Omega} (U/\varrho)^p\,dx\right)^{1/p} \Bigg/ \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U.$$

Кроме того, рассматривая монотонную аппроксимацию $f_j \to f$ функциями $f_j \in C_0^\infty(\Omega)$, из неравенств (17), (iii) и (18) выводим, что

$$\|(\mathbf{G}f_j)/\varrho\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \alpha_H(p)\|\mathbf{G}f_j\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \alpha_H(p)C\|f_j\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$$
$$\leqslant \alpha_H(p)C\alpha_H(q)\|\varrho f_j\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{для} \quad q = p/(p-1),$$
$$\|(\mathbf{G}f)/\varrho\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \alpha_H(p)C\alpha_H(q)c_2(n,p)\beta^{1+n/p}.$$

Это устанавливает неравенство (40) с постоянной $\alpha = \{c_1^{-1}\alpha_H(p)C\alpha_H(q)c_2\}^p$ при ограничении $\beta < 2\beta_1$. Отсюда $U/\varrho \in L^p(\Omega)$, что дает (40) для остальных $\beta < \operatorname{diam}\Omega$ по аналогии с (30). Мы доказали импликацию (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Импликацию (iv) $\Rightarrow$ (v) можно установить с помощью леммы Геринга, см. [35, лемма 3] или предложение 1.1 из [36, гл. V], выводя из $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$ свойство $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p_\star}$ для некоторого $p_\star > p$, что дает соотношение

$$(41) \qquad (\exists\varepsilon, \alpha_\star > 0)\ (\forall a,\beta) \quad \int_{B(a,\beta)\cap\Omega} \left(\frac{U}{\varrho}\right)^p \left(\frac{\beta}{\varrho}\right)^\varepsilon dx \leqslant \alpha_\star\beta^{n-p} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^p$$

и, как следствие, свойство (v). Мы приведем для импликации (iv) $\Rightarrow$ (v) более сложное (две страницы вместо одной), но прямое доказательство.

Пусть выполнено условие (iv), что совпадает с $(\mathrm{v})\big|_{m=0}$. Очевидно, что (v) достаточно проверить для всех целых $m \geqslant 0$. По индукции допустим, что (v) имеет место для некоторого целого $m-1 \geqslant 0$ вместо m.

Построим семейства $(\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ по лемме 6. Ввиду $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$

$$(\forall I \in \mathcal{F}) \quad (4/5) \sup_I \varrho < \varrho(\mathfrak{c}_I) < (4/3) \inf_I \varrho.$$

Найдем точки $a[I] \in \partial\Omega$ с $|\mathfrak{c}_I - a[I]| = \varrho(\mathfrak{c}_I)$. Рассмотрим любые

$$a \in \partial\Omega \quad \& \quad \beta \in (0, \operatorname{diam}\Omega) \quad \& \quad I \in \mathcal{F} \quad \text{со свойством} \quad B(a,\beta) \cap I \neq \varnothing,$$
$$\text{целое} \quad k \geqslant 2 \quad \text{со свойством} \quad \beta_k[I] = \varrho(\mathfrak{c}_I) 2^k < \beta_1 \wedge (\beta/2).$$

В силу (21) существует точка $a[I]_{(\beta_k[I])} \in \Omega$ такая, что

$$|a[I]_{(\beta_k[I])} - a[I]| = \beta_k[I] \leqslant \varrho(a[I]_{(\beta_k[I])})\alpha_1.$$

Эта точка лежит в единственном кубе $I^{(k)} \in \mathcal{F}$. Отсюда

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam} I &< \varrho(\mathfrak{c}_I)/2 < (2/3) \inf_I \varrho < \beta, \\
I &\subset B(a, 2\beta), \\
(1/2)\operatorname{diam} I + |\mathfrak{c}_I - \mathfrak{c}_{I^{(k)}}| &\leqslant (1/2)\operatorname{diam} I + |\mathfrak{c}_I - a[I]| + \beta_k[I] + (1/2)\operatorname{diam} I^{(k)} \\
&< (1/4)\varrho(\mathfrak{c}_I) + \varrho(\mathfrak{c}_I) + \beta_k[I] + (1/4)\varrho(\mathfrak{c}_{I^{(k)}}) \\
&\leqslant (21/16)\beta_k[I] + (1/4)\varrho(\mathfrak{c}_{I^{(k)}}) \\
&\leqslant (21/16)\big(\sup_{I^{(k)}} \varrho\big)\alpha_1 + (1/4)\varrho(\mathfrak{c}_{I^{(k)}}) < 2\varrho(\mathfrak{c}_{I^{(k)}})\alpha_1, \\
I &\subset B(\mathfrak{c}_{I^{(k)}}, 2\varrho(\mathfrak{c}_{I^{(k)}})\alpha_1), \\
|a - \mathfrak{c}_{I^{(k)}}| &< \beta + (1/2)\operatorname{diam} I + |\mathfrak{c}_I - \mathfrak{c}_{I^{(k)}}| \\
&< \beta + (21/16)\beta_k[I] + (1/3)\varrho(a[I]_{(\beta_k[I])}) \\
&< \beta + 2\beta_k[I] < 2\beta.
\end{aligned}$$

Для фиксированного I кубы $I^{(k)}$ попарно различны, так как если $I^{(k_1)} = I^{(k_2)}$ при $k_1 < k_2$, то ввиду оценки $\operatorname{diam} I^{(k_1)} < (2/3) \inf_{I^{(k_1)}} \varrho$ имеем

$$\beta_{k_1}[I] \leqslant \big|a[I]_{(\beta_{k_1}[I])} - a[I]_{(\beta_{k_2}[I])}\big| \leqslant \operatorname{diam} I^{(k_1)} < (2/3)\beta_{k_1}[I].$$

Предположим, что для некоторого $c_3(\operatorname{diam}\Omega/\beta_1)$ установлена оценка

$$\left(\ln \frac{4\beta}{\varrho(\mathfrak{c}_I)}\right)^m \leqslant c_3^m m! + c_3 m \sum_k \left(\ln \frac{2\beta}{\varrho(\mathfrak{c}_{I^{(k)}})}\right)^{m-1}. \tag{42}$$

С учетом предыдущего абзаца имеем

$$\begin{aligned}
J = \int_{B(a,\beta)\cap\Omega} \left(\frac{U}{\varrho}\right)^p \left(\ln \frac{\beta e}{\varrho}\right)^m dx &\leqslant \sum_I \left(\ln \frac{4\beta}{\varrho(\mathfrak{c}_I)}\right)^m \int_I \left(\frac{U}{\varrho}\right)^p dx \\
&\leqslant c_3^m m! \int_{B(a,2\beta)\cap\Omega} \left(\frac{U}{\varrho}\right)^p dx
\end{aligned}$$
$$+ c_3 m \sum_{I\in\mathcal{F}\colon |a-\mathfrak{c}_I|<2\beta} \left(\ln \frac{2\beta}{\varrho(\mathfrak{c}_I)}\right)^{m-1} \int_{B(\mathfrak{c}_I, 2\varrho(\mathfrak{c}_I)\alpha_1)\cap\Omega} \left(\frac{U}{\varrho}\right)^p dx.$$

В силу неравенств (40), (27), (26) и $\operatorname{diam} I < \varrho(\mathfrak{c}_I)/2 \leqslant (9/4)\operatorname{diam} I$

$$\int_{B(a,2\beta)\cap\Omega}\left(\frac{U}{\varrho}\right)^p dx \leqslant c_4(\alpha,\Omega,U,p)\beta^{n-p}\sup_{B(a,\beta)\cap\Omega}U^p,$$

$$\begin{aligned}\int_{B(\mathfrak{c}_I,2\varrho(\mathfrak{c}_I)\alpha_1)\cap\Omega}\left(\frac{U}{\varrho}\right)^p dx &\leqslant \int_{B(a[I],3\varrho(\mathfrak{c}_I)\alpha_1)\cap\Omega}\left(\frac{U}{\varrho}\right)^p dx\\ &\leqslant c(\alpha,\Omega,U,p,\alpha_1)\varrho(\mathfrak{c}_I)^{n-p}\sup_{B(a[I],\varrho(\mathfrak{c}_I))\cap\Omega}U^p\\ &\leqslant c_5(\alpha,\Omega,U,p,\alpha_1)\int_I\left(\frac{U}{\varrho}\right)^p dx.\end{aligned}$$

Отсюда по предположению индукции и неравенству (27)

$$\begin{aligned}J &\leqslant c_3^m m! c_4\beta^{n-p}\sup_{B(a,\beta)\cap\Omega}U^p + c_3 m c_5\int_{B(a,3\beta)\cap\Omega}\left(\frac{U}{\varrho}\right)^p\left(\ln\frac{\beta e}{\varrho}\right)^{m-1}dx\\ &\leqslant \{c_3^m m! + c_3 m\alpha[m-1]\}c_6(\alpha,\Omega,U,p,\alpha_1)\beta^{n-p}\sup_{B(a,\beta)\cap\Omega}U^p,\end{aligned}$$

$$\forall\alpha[m]\geqslant\{c_3^m m! + c_3 m\alpha[m-1]\}c_6 \quad \text{удовлетворяет требуемой оценке.}$$

По индукции это доказывает (v). Отметим следующее.

- Будем считать, что $c_6 \geqslant 1/2$. Легко проверить, что тогда можно взять $\alpha[m] = (\alpha\vee 1)(2c_3c_6)^m m!$ (при целых m). Умножая (v) на $\varepsilon^m/m!$ для $0<\varepsilon<1/(2c_3c_6)$ и суммируя по m, получаем оценку (41).
- Неравенства со степенями логарифма — это один из способов доказать лемму Геринга [49, (2.12)].

Проверим (42). Обозначим $K = (\operatorname{diam}\Omega/\beta_1)\vee 2$ и $L = \ln(16K)$. Если

$$T = \ln\frac{\beta}{\varrho(\mathfrak{c}_I)4K} = \ln\frac{4\beta}{\varrho(\mathfrak{c}_I)} - L \leqslant Lm,$$

то $\left(\ln\frac{4\beta}{\varrho(\mathfrak{c}_I)}\right)^m \leqslant L^m(1+m)^m < (Le)^m m!$, так что (42) выполнено при $c_3\geqslant Le$. Наоборот, пусть $T > Lm$. С учетом оценки $\varrho(\mathfrak{c}_{I^{(k)}}) < (4/3)\beta_k[I]$ имеем

$$\begin{aligned}\left(\ln\frac{4\beta}{\varrho(\mathfrak{c}_I)}\right)^m &= (T+L)^m < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m T^m < eT^m,\\ T^m &= m\int_0^T (T-t)^{m-1}dt \leqslant m\ln 2\sum_{l\in\mathbb{Z}:\ 0\leqslant l\ln 2<T}(T-l\ln 2)^{m-1}\\ &= m\ln 2\sum_{k\in\mathbb{Z}:\ k\geqslant 2\ \&\ \beta_k[I]K<\beta}\left(\ln\frac{\beta}{\beta_k[I]K}\right)^{m-1}\\ &\leqslant m\ln 2\sum_{k\in\mathbb{Z}:\ k\geqslant 2\ \&\ \beta_k[I]<\beta_1\wedge(\beta/2)}\left(\ln\frac{2\beta}{\varrho(\mathfrak{c}_{I^{(k)}})}\right)^{m-1}.\end{aligned}$$

Теперь (42) имеет место при $c_3\geqslant e\ln 2$. Это устанавливает (42) и тем самым импликацию (iv) $\Rightarrow$ (v).

Пусть верно (v) и $f\in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда $\mathbf{G}f\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})\cap W_0^{1,2}(\Omega)$ по лемме 2. В некоторой окрестности границы $\partial\Omega$ функция $\mathbf{G}f$ гармоническая и, в силу формул Богдана, удовлетворяет оценке $|\mathbf{G}f| = O(U)$. Отсюда $\mathbf{G}f\in W_0^{1,p}(\Omega)$ по (v)$\big|_{m=0}$ и внутренней оценке градиента гармонической функции.

Для дальнейшего отметим, что $\mathbf{G}f\in C^\infty(\Omega)$, так как $E*f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Построим семейства $(\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ и разбиение единицы $\{\varphi_I\}$ по лемме 6. Пусть $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(B(0,3/2))$ и $\psi \equiv 1$ на $B(0,5/4)$. Обозначим

$$B_I = B(\mathfrak{c}_I, (3/2)\operatorname{diam} I), \quad I \in \mathcal{F},$$
$$\psi_I(x) = \psi((x - \mathfrak{c}_I)/\operatorname{diam} I), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда $\psi_I \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\psi_I \Subset B_I \Subset \Omega$ и $\psi_I \equiv 1$ на шаре $B(\mathfrak{c}_I, (5/4)\operatorname{diam} I)$. Если $I \in \mathcal{F}$ и $x \in B_I$, то по лемме 6

$$(1/2)\operatorname{diam} I < \varrho(\mathfrak{c}_I) - |x - \mathfrak{c}_I| \leqslant \varrho(x) \leqslant \varrho(\mathfrak{c}_I) + |x - \mathfrak{c}_I| < 6\operatorname{diam} I, \tag{43}$$
$$\sum_{I\in\mathcal{F}} \chi_{B_I} \leqslant c_7(n).$$

Для $f \in C_0^\infty(\Omega)$ положим

$$\mathbf{G}_1 f = \sum_{I\in\mathcal{F}} \varphi_I \mathbf{G}[\psi_I f],$$
$$\mathbf{G}_2 f = \sum_{I\in\mathcal{F}} \varphi_I \mathbf{G}[(1-\psi_I) f] = \mathbf{G}f - \mathbf{G}_1 f.$$

Ввиду $\operatorname{supp}\varphi_I \Subset (3/2)I \Subset B_I$ имеем

$$\|\nabla \mathbf{G}_1 f\|_{L^p(\Omega)}^p \leqslant c_7^{p-1} \sum_{I\in\mathcal{F}} \big\|\nabla\{\varphi_I \mathbf{G}[\psi_I f]\}\big\|_{L^p(B_I)}^p$$
$$\leqslant c(n,p,c_\varphi) \sum_{I\in\mathcal{F}} \left\{ \left(\frac{\|\mathbf{G}[\psi_I f]\|_{L^p(B_I)}}{\operatorname{diam} I} \right)^p + \big\|\nabla \mathbf{G}[\psi_I f]\big\|_{L^p(B_I)}^p \right\}.$$

Запишем $f = \sum_{j=1}^n D_j f_j$ согласно (19). Очевидно, что

$$\psi_I f = -\sum_1^n (D_j\psi_I) f_j + \sum_1^n D_j(\psi_I f_j), \tag{44}$$
$$(\operatorname{diam} I) \left\| \sum_1^n (D_j\psi_I) f_j \right\|_{L^p(B_I)} + \sum_1^n \|\psi_I f_j\|_{L^p(B_I)} \leqslant c(\psi) \sum_1^n \|f_j\|_{L^p(B_I)}.$$

Применяя к оценке леммы 7 аффинную замену переменных, переводящую шар $B(0,1)$ на шар $(4/3)B_I = B(\mathfrak{c}_I, 2\operatorname{diam} I) \Subset \Omega$, получаем

$$\|\nabla \mathbf{G}_1 f\|_{L^p(\Omega)}^p \leqslant c(n,p,c_\varphi,\psi) \sum_{I\in\mathcal{F}} \left\{ \frac{\max_{\partial(\frac{4}{3}B_I)} |\mathbf{G}[\psi_I f]|^p}{(\operatorname{diam} I)^{p-n}} + \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^p(B_I)}^p \right\}.$$

Пусть $x \in \partial(\frac{4}{3}B_I)$ и $y \in B_I$, откуда $|x-y| > (1/2)\operatorname{diam} I$ и $\varrho(y) > (1/2)\operatorname{diam} I$ (по (43) для y вместо x). В силу (31), (44) и интегрирования по частям

$$(\operatorname{diam} I)|\nabla_y G(x,y)| \leqslant c(n) G(x,y) \leqslant c(n,\alpha_G)(\operatorname{diam} I)^{2-n},$$
$$\big|\mathbf{G}[\psi_I f](x)\big| = \left| \int_{B_I} G(x,y)[\psi_I f](y)\,dy \right| \leqslant c(n,\alpha_G,\psi)(\operatorname{diam} I)^{1-n} \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1(B_I)}.$$

Неравенство Гёльдера и предыдущий абзац показывают, что

$$\|\nabla \mathbf{G}_1 f\|_{L^p(\Omega)}^p \leqslant c_8(n,p,c_\varphi,\psi,\alpha_G) \sum_{I\in\mathcal{F}} \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^p(B_I)}^p \leqslant c_7 c_8 \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^p(\Omega)}^p. \tag{45}$$

Если значение функции $\Phi(x,y)=\varphi_I(x)(1-\psi_I(y))$ или какой-нибудь из ее производных ненулевое, то $x\in\frac{3}{2}I\subset\overline{B(\mathfrak{c}_I,(3/4)\operatorname{diam}I)}$ и $y\notin B(\mathfrak{c}_I,(5/4)\operatorname{diam}I)$, так что $|x-y|\geqslant(1/2)\operatorname{diam}I$,

$$\varrho(x)\leqslant\varrho(\mathfrak{c}_I)+|x-\mathfrak{c}_I|\leqslant\{(9/2)+(3/4)\}\operatorname{diam}I=(21/4)\operatorname{diam}I<11|x-y|,$$
$$\varrho(y)\leqslant\varrho(x)+|x-y|<12|x-y|,$$
$$G\Phi\in C^\infty(\Omega\times\Omega)\quad\&\quad(G\Phi)(x,\cdot)f\in C_0^\infty(\Omega).$$

Включение $\Psi_x=(G\Phi)(x,\cdot)\in W_0^{1,2}(\Omega)$ проверяется по аналогии с леммой 2 или выводится из нее. Лапласиан $\Delta\Psi_x\in C_0^\infty(\Omega)$ гладко зависит от x, так что $D_{x_i}\Psi_x\in W_0^{1,2}(\Omega)$ по $W^{1,2}$-корректности. Отсюда и из включений $f_j\in L^p(\Omega)$ выводим законность дифференцирования по параметру и интегрирования по частям в следующей выкладке:

$$\begin{aligned}D_i\{\varphi_I\mathbf{G}[(1-\psi_I)f]\}\big|_x&=D_{x_i}\int_\Omega(G\Phi)(x,y)f(y)\,dy\\&=\int_\Omega D_{x_i}\Psi_x\sum_1^n D_jf_j\,dy\\&=-\sum_{j=1}^n\int_\Omega D_{x_i}D_{y_j}(G\Phi)(x,y)f_j(y)\,dy.\end{aligned}$$

Из гармоничности $G(x,y)$ при $x\neq y$ и формул Богдана (31) получаем

$$\begin{aligned}|D_{x_i}D_{y_j}(G\Phi)|&\leqslant c(c_\varphi,\psi)\left\{\frac{G}{\varrho(x)\varrho(y)}+\frac{|D_{x_i}G|}{\varrho(y)}+\frac{|D_{y_j}G|}{\varrho(x)}+|D_{x_i}D_{y_j}G|\right\}\\&\leqslant c(n,c_\varphi,\psi)\frac{G}{\varrho(x)\varrho(y)}\\&\leqslant c_9(n,c_\varphi,\psi,\alpha_G)G_2\end{aligned}$$

для

$$G_2(x,y)=\frac{U(x)U(y)|x-y|^{2-n}}{\varrho(x)\varrho(y)\sup_{A(x,y)\cap\Omega}U^2}.$$

Отсюда для любого $x\in\Omega$ по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned}|D_i\mathbf{G}_2f|_x&\leqslant c_7c_9\sum_{j=1}^n\int_{\varrho(x)\leqslant11|x-y|}G_2(x,y)|f_j(y)|\,dy\\&\leqslant c_7c_9\sum_{j=1}^n\left(\int_{\Omega_x}\frac{U^p(x)|x-y|^{p-n}}{\varrho^p(x)\sup_{A(x,y)\cap\Omega}U^p}\left(\frac{\ln\frac{22|x-y|}{\varrho(x)}}{\ln\frac{22|x-y|}{\varrho(y)}}\right)^{p\sigma}|f_j(y)|^p\,dy\right)^{\frac1p}Q^{\frac1q}(x),\end{aligned}$$

где $\Omega_x=\Omega\setminus B(x,\varrho(x)/11)$, $\sigma>1/q=(p-1)/p$ и

$$Q(x)=\int_{\Omega_x}\frac{U^q(y)|x-y|^{q-n}}{\varrho^q(y)\sup_{A(x,y)\cap\Omega}U^q}\left(\frac{\ln\frac{22|x-y|}{\varrho(y)}}{\ln\frac{22|x-y|}{\varrho(x)}}\right)^{q\sigma}dy.$$

Оценим $Q(x)$. Возьмем $a\in\partial\Omega$, $|x-a|=\varrho(x)$. Для целого $k\geqslant0$ пусть

$$\beta_k=\varrho(x)2^k\quad\&\quad B_0=\varnothing\quad\&\quad B_{k+1}=B(a,\beta_{k+1}).$$

Очевидно, что

$$B_{k+1} \subset B((x+y)/2, \beta_{k+1} + \varrho(x) + |x-y|/2),$$
$$\beta_1 + \varrho(x) + |x-y|/2 = 3\varrho(x) + |x-y|/2 \leqslant 3\{\varrho(x) + |x-y|\},$$
$$\begin{aligned} & & \beta_{k+1} + \varrho(x) + |x-y|/2 = 2\beta_k + \varrho(x) + |x-y|/2 \\ |y-a| \geqslant \beta_k \quad & \Rightarrow & \leqslant 2\{|x-a| + |x-y|\} + \varrho(x) + |x-y|/2 \\ & & \leqslant 3\{\varrho(x) + |x-y|\}, \end{aligned}$$
$$(\forall y \in (B_{k+1} \setminus B_k) \cap \Omega) \quad B_{k+1} \cap \Omega \subset \mathcal{A}_3(x,y) \quad (\text{см. лемму 4}),$$
$$(\forall y \in (B_{k+1} \setminus B_k) \cap \Omega) \quad \sup_{B_{k+1}\cap\Omega} U \leqslant \vartheta \sup_{A(x,y)\cap\Omega} U \quad (\text{см. (28)}),$$
$$(\forall y \in (B_{k+1} \setminus B_k) \cap \Omega_x) \quad \beta_k/11 \leqslant |x-y| \leqslant |x-a| + |y-a| < 3\beta_k,$$
$$\begin{aligned} N_k &= \int_{(B_{k+1}\setminus B_k)\cap\Omega_x} \frac{U^q(y)|x-y|^{q-n}}{\varrho^q(y)\sup_{A(x,y)\cap\Omega} U^q} \left(\frac{\ln\frac{22|x-y|}{\varrho(y)}}{\ln\frac{22|x-y|}{\varrho(x)}} \right)^{q\sigma} dy \\ &\leqslant \frac{(\beta_{k+1}/22)^{q-n}\vartheta^q}{\ln^{q\sigma}(2^{k+1})\sup_{B_{k+1}\cap\Omega} U^q} \int_{B_{k+1}\cap\Omega} \left(\frac{U}{\varrho}\right)^q \left(\ln\frac{33\beta_{k+1}}{\varrho}\right)^{q\sigma} dy. \end{aligned}$$

При $0 < \beta < \operatorname{diam}\Omega$ по неравенству Гёльдера и условию $(\mathrm{v})\big|_{m=p\sigma}$

$$\begin{aligned} \int_{B(a,\beta)\cap\Omega} \left(\frac{U}{\varrho}\right)^q \left(\ln\frac{\beta e}{\varrho}\right)^{q\sigma} dy &\leqslant \alpha[p\sigma]^{\frac{1}{p-1}} \beta^{\frac{n-p}{p-1}} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^q \big[\operatorname{mes} B(a,\beta)\big]^{\frac{p-2}{p-1}} \\ &\leqslant c(n,p,\alpha[p\sigma])\beta^{n-q} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^q. \end{aligned} \tag{46}$$

Ввиду стандартного рассуждения эту оценку можно считать справедливой для всех $0 < \beta < 2\operatorname{diam}\Omega$, поэтому

$$N_k \leqslant \frac{c(n,p,\sigma,\alpha[p\sigma],\vartheta)}{\ln^{q\sigma}(2^{k+1})} \quad \text{при} \quad \beta_{k+1} < 2\operatorname{diam}\Omega,$$
$$Q(x) = \sum_{k\geqslant 0:\ \beta_k < \operatorname{diam}\Omega} N_k \leqslant c(n,p,\sigma,\alpha[p\sigma],\vartheta) \quad \text{в силу} \quad q\sigma > 1,$$
$$\begin{aligned} \|D_i \mathbf{G}_2 f\|^p_{L^p(\Omega)} &\leqslant c(n,p,\sigma,\alpha[p\sigma],\vartheta,c_\varphi,\psi,\alpha_G)\times \\ &\times \sum_{j=1}^n \int_\Omega |f_j(y)|^p\,dy \int_{\Omega[y]} \frac{U^p(x)|x-y|^{p-n}}{\varrho^p(x)\sup_{A(x,y)\cap\Omega} U^p} \left(\frac{\ln\frac{22|x-y|}{\varrho(x)}}{\ln\frac{22|x-y|}{\varrho(y)}} \right)^{p\sigma} dx, \end{aligned}$$

где $\Omega[y] = \Omega \setminus B(y, \varrho(y)/12)$.

Равномерная по y ограниченность $\Omega[y]$-интеграла проверяется по аналогии с предыдущим абзацем. Вместо (46) используем само условие $(\mathrm{v})\big|_{m=p\sigma}$, а вместо $q\sigma > 1$ — условие $p\sigma > 1$. Ввиду $\mathbf{G}f = \mathbf{G}_1 f + \mathbf{G}_2 f$ и оценок (16), (19) и (45) заключаем, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}f\|_{W^{1,p}(\Omega)} &\leqslant (\alpha_P + 1)\|\nabla\mathbf{G}f\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leqslant c_{10}(\alpha_P,n,p,\sigma,\alpha[p\sigma],\vartheta,c_\varphi,\psi,\alpha_G) \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leqslant c_{10} M \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Импликация (v) $\Rightarrow$ (iii) и теорема 1 доказаны. $\square$

3. Класс областей $\mathcal{A}^\mu$, характеристическая постоянная и теорема Карлемана–Хубера

Интегральное условие $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$ тесно связано со степенным убыванием функции U при стремлении к границе. В данном параграфе собраны сведения об этом вопросе, преимущественно известные. Обозначение $\mathcal{A}^\mu$ взято в честь работ Х. Айкавы [5], Ю.А. Алхутова [8] и А. Анкона [11].

Определение 3. *Пусть Ω — ограниченная липшицева область и $0 < \mu \leqslant 1$. Скажем, что $\Omega \in \mathcal{A}^\mu$, если для некоторого $U \in U_\Omega$*

$$(47)\qquad (\exists \alpha > 1)\ (\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \operatorname{diam}\Omega))\ (\forall \gamma \in (0,1))\quad \frac{\sup\limits_{B(a,\beta\gamma)\cap\Omega} U}{\sup\limits_{B(a,\beta)\cap\Omega} U} \leqslant \alpha\gamma^\mu.$$

Лемма 8. *Пусть $U \in U_\Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная липшицева область. Тогда включение $\Omega \in \mathcal{A}^\mu$ равносильно любому из условий* (47),

$$(48)\qquad (\exists \alpha > 1)\ (\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \operatorname{diam}\Omega))\quad \frac{\sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} \varrho^{-\mu} U}{\sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U} \leqslant \alpha\beta^{-\mu},$$

$$(49)\quad (\exists \alpha > 1)\ (\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \operatorname{diam}\Omega))\ (\forall \gamma \in (0,1))\quad \sup_{B(a,\beta\gamma)\cap\Omega} \omega^a_\beta \leqslant \alpha\gamma^\mu,$$

где $\omega^a_\beta(x) = \omega(x, \partial B(a,\beta)\cap\Omega, B(a,\beta)\cap\Omega)$.

Доказательство. Эквивалентность $\Omega \in \mathcal{A}^\mu \Leftrightarrow$ (47) вытекает из последнего утверждения леммы 4.

Пусть верно (47). Возьмем любые $a \in \partial\Omega$, $0 < \beta < \operatorname{diam}\Omega$ и $x \in B(a,\beta)\cap\Omega$. Найдем $\mathbf{a} \in \partial\Omega$ с $|x - \mathbf{a}| = \varrho(x) \leqslant |x - a| < \beta$. Тогда по (47) и (27)

$$\begin{aligned} U(x) &\leqslant \alpha \left(\frac{|x-\mathbf{a}|}{\beta}\right)^\mu \sup_{B(\mathbf{a},\beta)\cap\Omega} U \\ &\leqslant \alpha \left(\frac{\varrho(x)}{\beta}\right)^\mu \sup_{B(a,3\beta)\cap\Omega} U \leqslant \alpha c(\Omega,U) \left(\frac{\varrho(x)}{\beta}\right)^\mu \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U. \end{aligned}$$

Значит, имеет место (48). Обратно, если верно (48), то

$$\sup_{B(a,\beta\gamma)\cap\Omega} U \leqslant (\beta\gamma)^\mu \sup_{B(a,\beta\gamma)\cap\Omega} \varrho^{-\mu} U \leqslant \alpha\gamma^\mu \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U.$$

Это доказывает (47). Поэтому $\Omega \in \mathcal{A}^\mu \Leftrightarrow (47) \Leftrightarrow (48)$.

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} (\partial B(a,\beta)\cap\Omega) \cup (B(a,\beta)\cap\partial\Omega) &\subset \partial(B(a,\beta)\cap\Omega) \\ &\subset (\partial B(a,\beta)\cap\Omega) \cup (\overline{B(a,\beta)}\cap\partial\Omega). \end{aligned}$$

Множество $B(a,\beta)\cap\partial\Omega$ открыто в границе $\partial(B(a,\beta)\cap\Omega)$ и в силу условия внешнего конуса состоит из ее регулярных точек. Отсюда $\omega^a_\beta\big|_{B(a,\beta)\cap\partial\Omega} = 0$ по свойству (v) из [56, § IV.3].

Пусть $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ — постоянные из леммы 4, а функция U гармоническая на $\{\varrho < \delta\}$. Допустим, что верно (47). Возьмем $a \in \partial\Omega$, $0 < \beta < \operatorname{diam}\Omega$ и $0 < \gamma < 1$. Если $\gamma < \gamma_0 = (\beta_1 \wedge (\delta/\gamma_1))/\operatorname{diam}\Omega\ (< \gamma_1^{-1})$, то по (23), (47) и $\omega^a_\beta \leqslant 1$ имеем

$$\sup_{B(a,\beta\gamma)\cap\Omega} \omega^a_\beta \leqslant \left(\sup_{B(a,\beta\gamma_0)\cap\Omega} \frac{\omega^a_\beta}{U}\right) \sup_{B(a,\beta\gamma)\cap\Omega} U$$

$$\leqslant \left(\alpha_1^2 \inf_{B(a,\beta\gamma_0)\cap\Omega} \frac{\omega_\beta^a}{U}\right) \alpha(\gamma/\gamma_0)^\mu \sup_{B(a,\beta\gamma_0)\cap\Omega} U \leqslant \alpha_1^2\alpha\gamma_0^{-\mu}\gamma^\mu.$$

Если же $\gamma \geqslant \gamma_0$, то $\sup_{B(a,\beta\gamma)\cap\Omega} \omega_\beta^a \leqslant 1 \leqslant \gamma_0^{-\mu}\gamma^\mu$. Мы доказали (49).

Обратно, пусть имеет место (49). Возьмем $a \in \partial\Omega$, $0 < \beta < \delta$, $0 < \gamma < 1$, $x \in B(a,\beta\gamma)\cap\Omega$ и построим меру δ'_x относительно множества $B(a,\beta)\cap\Omega$ (§ 1). Ассоциированность δ'_x с δ_x и условие (49) показывают, что

$$\begin{aligned} U(x) = \int_{\partial(B(a,\beta)\cap\Omega)} U\,d\delta'_x &= \int_{\partial B(a,\beta)\cap\Omega} U\,d\delta'_x \\ &\leqslant \omega_\beta^a(x) \sup_{\partial B(a,\beta)\cap\Omega} U \leqslant \alpha\gamma^\mu \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U. \end{aligned}$$

Проверка (47) при $\beta \geqslant \delta$ аналогична. Значит, $\Omega \in \mathcal{A}^\mu \Leftrightarrow (47) \Leftrightarrow (49)$. □

Свойства (47) и (48) записаны в терминах нашего нового класса U_Ω. В (49) используется функция ω_β^a, встречающаяся уже в работе [11]. В работах [5, 81] она названа локальной гармонической мерой, а (49) при достаточно малых β для не обязательно липшицевых областей — свойством LHMD убывания локальной гармонической меры. Это свойство допускает формулировку в терминах глобальной гармонической меры $\omega(x,\partial\Omega\setminus B(a,\beta),\Omega)$ и тесно связано с ограниченностью оператора гармонического продолжения из пространства Гёльдера $C^\mu(\partial\Omega)$ в пространство Гёльдера $C^\mu(\overline{\Omega})$ [5, теорема 3].

Области, удовлетворяющие условию (49) для некоторого $0 < \mu \leqslant 1$, характеризуются условием CDC на плотность емкости [5, следствие 1]. При $n = 2$ известно много эквивалентных условий: существование сильного барьера и выполнение неравенства Харди, см. [11, теорема 2] и [81, теорема 3.1], а также ряд условий типа равномерной совершенности границы [80, теоремы 2.18 и 7.1]. Последнее означает, грубо говоря, что на всех масштабах длин в области нет дыр, малых в метрическом или конформном смысле.

Для любой ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ соотношение

$$\Omega \in \bigcup_{1/2<\mu\leqslant 1} \mathcal{A}^\mu \text{ при } n = 2 \quad \text{или} \quad \Omega \in \bigcup_{0<\mu\leqslant 1} \mathcal{A}^\mu \text{ при } n \geqslant 3$$

в той или иной форме хорошо известно, см. [25, (3.1)] или [66, теорема 7]. Для доказательства легко построить барьер в круговом конусе с помощью функции Гегенбауэра (выражающейся через гипергеометрический ряд). Мы же выведем его из теоремы Карлемана–Хубера, что потребует некоторой подготовки.

Пусть $K \neq \varnothing$ — открытое подмножество единичной сферы

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\zeta \in \mathbb{R}^n \colon |\zeta| = 1\}.$$

Функция $|x|^\mu f(|x|^{-1}x)$ гармоническая в конусе $\{x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \colon |x|^{-1}x \in K\}$ тогда и только тогда, когда $\delta f = -\lambda f$ в K для $\lambda = \mu(\mu + n - 2)$, где δ — оператор Лапласа–Бельтрами в $\mathbb{S}^{n-1}$. Требования $f > 0$ и $f\big|_{\partial K} = 0$, важные при изучении класса $\mathcal{A}^\mu$, приводят к рассмотрению *основного тона* $\lambda[K]$ множества K. Главные относящиеся сюда сведения даны в [54, § 2.2]. Вместо спектральной задачи для δ мы определим $\lambda[K]$ через отношение Рэлея.

Определение 4. *Для непустого открытого $K \subset \mathbb{S}^{n-1}$ через $\mathfrak{F}(K)$ обозначим множество всех липшицевых функций $f : \mathbb{S}^{n-1} \to [0,\infty)$ со свойствами $f \not\equiv 0$*

и $f\big|_{\mathbb{S}^{n-1}\setminus K}=0$. *Пусть* σ *— поверхностная мера на* $\mathbb{S}^{n-1}$. *Положим*

$$\begin{aligned}
\lambda[K] &= \inf_{f\in\mathfrak{F}(K)} \left(\int_K f^2\,d\sigma\right)^{-1} \int_K |\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} f|^2\,d\sigma,\\
\mu[K] &= \sqrt{\lambda[K]+\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}-\frac{n-2}{2},\\
\sigma_n &= \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2),\\
K(n,s) &= \{x\in\mathbb{S}^{n-1}\colon s<x_n\leqslant 1\} \qquad (-1<s<1),\\
S(n,s) &= \frac{\sigma(K(n,s))}{\sigma_n} = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)\sqrt{\pi}} \int_0^{\arccos s} \sin^{n-2}\phi\,d\phi,\\
\mu(n,S) &= \mu[K(n,s(n,S))] \qquad\qquad (0<S<1),
\end{aligned}$$

где функция $s(n,\cdot)$ *обратна к функции* $S(n,\cdot)$.

Для любого множества $L\subset\mathbb{S}^{n-1}$ *обозначим*

$$\lambda[L]=\sup_{K\supset L}\lambda[K] \quad \& \quad \mu[L]=\sup_{K\supset L}\mu[K].$$

Величины $0\leqslant\mu[K]<\infty$ и $0\leqslant\mu[L]\leqslant\infty$ называются характеристическими постоянными множеств K и L. Основной тон $\lambda[K(n,s)]$ и характеристическая постоянная $\mu[K(n,s)]$ шара на сфере изучаются в литературе из [13, с. 274], [23, с. 50–54], [33, теоремы 2–5], литературе из [61, с. 435] и [66, теорема 2].

Лемма 9. *Если* $S=\sigma_n^{-1}\sigma(K)\in(0,1)$ *для открытого* $K\subset\mathbb{S}^{n-1}$, *то*

$$\begin{aligned}
\mu[K] &\geqslant \mu(n,S)\geqslant\mu(\infty,S)=\lim_{n\to\infty}\mu(n,S)\\
&\geqslant \phi_\infty(S)=\begin{cases}\frac12\ln\frac{1}{4S}+\frac32 & \text{при}\quad 0<S<\frac14,\\ 2(1-S) & \text{при}\quad \frac14\leqslant S<1.\end{cases}
\end{aligned}\tag{50}$$

Доказательство. Тон $\lambda[K]$ можно эквивалентным образом вычислять посредством множества $\mathfrak{F}(K)\cap C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$. Это проверяется через умножение $f\in\mathfrak{F}(K)$ на срезающую функцию и сглаживание. Теперь первая оценка в (50) вытекает из того, что оператор симметризации

$$\mathfrak{F}(K)\cap C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})\to\mathfrak{F}(K(n,s(n,S)))$$

из [79] сохраняет интеграл $\int f^2\,d\sigma$ и не увеличивает интеграл $\int|\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}}f|^2\,d\sigma$, см. [79, с. 325].

Вторая оценка в (50) следует из теоремы 2 в [33].

Третья оценка в (50) следует из теоремы 3 в [33]. Отметим, что эта теорема опирается на некоторое свойство нулей функций параболического цилиндра, доказанное в [42] с привлечением ЭВМ. Аналитическое доказательство свойства дано в [30, § 8], а построенный в [30] график функции $\mu(\infty,S)$ показывает близость функций $\mu(\infty,S)$ и $\phi_\infty(S)$. □

Теоремой Карлемана–Хубера мы называем дифференциальную оценку

$$r^2m''+(N+1)rm'\geqslant\{\mu^2+\mu N\}m \qquad \text{(А. Хубер [47, (21)])}\tag{51}$$

или ее «интегральные» следствия, где $N=n-2$, а $m(r)$ и $\mu(r)$ — L^2-среднее и характеристическая постоянная на сфере $\partial B(a,r)$, отвечающие некоторой функции $u \geqslant 0$ с $\Delta u \geqslant 0$. В терминах функций

$$\boldsymbol{m}(t) = m(e^t) \quad \& \quad \boldsymbol{\mu}(t) = \mu(e^t) \quad \& \quad \nu(t) = \ln \boldsymbol{m}(t) = \ln m(e^t)$$

оценка (51) принимает формы

$$\begin{gathered} \boldsymbol{m}'' + N\boldsymbol{m}' \geqslant \{\boldsymbol{\mu}^2 + \boldsymbol{\mu}N\}\boldsymbol{m}, \\ \nu'' + \nu'^2 + \nu' N \geqslant \boldsymbol{\mu}^2 + \boldsymbol{\mu}N. \end{gathered} \tag{52}$$

Метод восходит к Т. Карлеману [21] (см. также [39, § 6]), доказавшему аналог оценки $(52)\big|_{N=0}$ для интегралов от u^2 по параллельным прямым на плоскости. Темой также занимались А. Дингхас, Х. Келлер, А. Пфлюгер, М. Хайнс и М. Цудзи, см. библиографию в [41, § 8.1], [47] и особенно в [39, § 6]. Отметим, что работа [47], высоко оцененная в [33], в книге [41] даже не упоминается.

При выводе из (51) оценки на m обычно сначала получают неравенство для производной $\frac{d}{dr} r^N m^2$, см. [41, § 8.1] и [47, § 2] для $n = 2$ или [47, § 2], [33, следствие теоремы D] и [74, § 2] для $n \geqslant 3$. Мы же применим следующую лемму, позволяющую трактовать случаи $n = 2$ и $n \geqslant 3$ единым образом.

Лемма 10. *Пусть функции $\boldsymbol{\mu} \in L^\infty[t_0, t_1]$, $\nu \in C^2[t_0, t_1]$ $(-\infty < t_0 < t_1 < \infty)$ и целое число $N \geqslant 0$ таковы, что ν не убывает и почти всюду на $[t_0, t_1]$*

$$\nu'' + \nu'^2 + \nu' N \geqslant \boldsymbol{\mu}^2 + \boldsymbol{\mu}N, \tag{53}$$

$$\boldsymbol{\mu} \in \{0\} \cup [1/2, \infty) \ \textit{при}\ N = 0 \quad \textit{или} \quad \boldsymbol{\mu} \geqslant 0 \ \textit{при}\ N \geqslant 1. \tag{54}$$

Тогда выполнены неравенства

$$(\forall t\colon t_0 \leqslant t \leqslant t_1 - 2) \quad \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mu}(s)\, ds + \nu(t_0) \leqslant \nu(t + 2) \qquad (N = 0), \tag{55}$$

$$\Big(\forall t\colon t_0 \leqslant t \leqslant t_1 - \frac{1}{2}\Big) \quad \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mu}(s)\, ds + \nu(t_0) \leqslant \nu\Big(t + \frac{1}{2}\Big) + \ln 2 \quad (N \geqslant 0). \tag{56}$$

Доказательство. Зададим липшицеву в $[t_0, t_1]$ функцию

$$\lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \{\boldsymbol{\mu}(s) - \nu'(s)\}\, ds = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mu}(s)\, ds + \nu(t_0) - \nu(t).$$

Пусть $N = 0$. Покажем, что $L \geqslant \lambda$ для липшицевой функции

$$L(t) = \begin{cases} \ln(1 + 2\nu'(t)) & \text{при} \quad \nu'(t) \leqslant 1/2, \\ \ln\sqrt{8\nu'(t)} & \text{при} \quad \nu'(t) > 1/2. \end{cases}$$

Имеем $L(t_0) \geqslant 0 = \lambda(t_0)$, поэтому достаточно проверить, что $L' \geqslant \lambda'$ почти всюду в $[t_0, t_1]$. В силу (53) и (54) почти всюду при $\nu' \leqslant 1/2$

$$L' = \frac{2\nu''}{1 + 2\nu'} \geqslant \frac{\boldsymbol{\mu} + \nu'}{(1/2) + \nu'}\{\boldsymbol{\mu} - \nu'\} \geqslant \boldsymbol{\mu} - \nu' = \lambda'.$$

Аналогично, почти всюду при $\nu' > 1/2$

$$L' = \frac{\nu''}{2\nu'} \geqslant \frac{\boldsymbol{\mu} + \nu'}{2\nu'}\{\boldsymbol{\mu} - \nu'\} \geqslant \boldsymbol{\mu} - \nu' = \lambda'.$$

Оценка $L \geqslant \lambda$ установлена.

Пусть $t \leqslant t_1 - 2$. Если $\lambda(t) \leqslant 0$, то ввиду $\nu(t) \leqslant \nu(t + 2)$ имеет место (55), поэтому считаем, что $\lambda(t) > 0$ и, значит, $\nu'(t) > 0$. Из (53) выводим

$$\nu'' \geqslant \boldsymbol{\mu}^2 - \nu'^2 \geqslant -\nu'^2,$$

$$(\forall s>t)\quad \nu'(s)\geqslant \frac{1}{s-t+\frac{1}{\nu'(t)}},$$
$$\nu(t+2)-\nu(t)\geqslant \int_t^{t+2}\frac{ds}{s-t+\frac{1}{\nu'(t)}}=\ln(1+2\nu'(t))\geqslant L(t)\geqslant \lambda(t).$$

Мы доказали (55). Если же $t\leqslant t_1-\frac12$ и $\lambda(t)>0$, то

$$\nu\Big(t+\frac12\Big)-\nu(t)\geqslant \int_t^{t+1/2}\frac{ds}{s-t+\frac{1}{\nu'(t)}}=\ln\Big(1+\frac{\nu'(t)}{2}\Big),$$
$$\nu'(t)\leqslant 1/2\quad\Rightarrow\quad \ln\Big(1+\frac{\nu'(t)}{2}\Big)=L(t)+\ln\frac{1+\nu'(t)/2}{1+2\nu'(t)}\geqslant \lambda(t)+\ln\frac12,$$
$$\nu'(t)>1/2\quad\Rightarrow\quad \ln\Big(1+\frac{\nu'(t)}{2}\Big)=L(t)+\ln\frac{1+\nu'(t)/2}{\sqrt{8\nu'(t)}}\geqslant \lambda(t)+\ln\frac12.$$

Мы доказали (56) для $N=0$.

Пусть $N\geqslant 1$. Положим

$$L(t)=\ln\sqrt{1+\frac{2\nu'(t)}{N}},\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1.$$

Как выше, в силу (53), (54) и простых вычислений получаем

$$\begin{aligned}
&L(t_0)\geqslant 0=\lambda(t_0),\\
&L'=\frac{\nu''}{N+2\nu'}\geqslant \frac{\boldsymbol{\mu}+\nu'+N}{N+2\nu'}\{\boldsymbol{\mu}-\nu'\}\geqslant \boldsymbol{\mu}-\nu'=\lambda',\\
&L\geqslant\lambda,\\
&\nu''\geqslant \boldsymbol{\mu}^2+\boldsymbol{\mu}N-\nu'^2-\nu'N\geqslant -\nu'^2-\nu'N,
\end{aligned}$$
$$(\forall s>t)\quad \nu'(s)\geqslant \frac{N}{\big(1+\frac{N}{\nu'(t)}\big)e^{N(s-t)}-1}\quad (\text{при } \lambda(t)>0),$$
$$\begin{aligned}
\nu\Big(t+\frac12\Big)-\nu(t)&\geqslant \ln\Big(1+\frac{1-e^{-N/2}}{N}\nu'(t)\Big)\\
&\geqslant \ln\Big(1+\frac{\nu'(t)}{4N}\Big)\\
&=L(t)+\ln\frac{1+\nu'(t)/(4N)}{\sqrt{1+2\nu'(t)/N}}\geqslant \lambda(t)+\ln\frac12.
\end{aligned}$$

Неравенство (56) и лемма 10 доказаны. □

Перейдем к изложению нашего варианта теоремы Карлемана–Хубера.

Определение 5. *Функция* $u:\Omega\to[-\infty,\infty)$ *в открытом множестве* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *называется субгармонической, если она полунепрерывна сверху и для любого шара* $\overline{B(x,r)}\subset\Omega$

$$u(x)\leqslant \sigma_n^{-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u(x+r\zeta)\,d\sigma(\zeta).$$

Полунепрерывность u сверху означает, что множество $\{x\in\Omega\colon u(x)<\tau\}$ открыто для любого вещественного τ. О субгармонических функциях см. [40], [41], [43, гл. 4], [45, § 4.1], [46, § 16.1] и [56, § I.2].

Теорема 2. *Пусть задана субгармоническая функция*

$$u:\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n\colon |x-a|<R_\Omega\}\to[0,\infty),$$

где $a\in\mathbb{R}^n$ *и* $0<R_\Omega\leqslant\infty$. *Для* $0<r<R_\Omega$ *обозначим*

$$L(u,r)=\{\zeta\in\mathbb{S}^{n-1}\colon u(a+r\zeta)>0\}.$$

Тогда

$$\mu(r)=\lim_{\tau\to 0+}\mu[L(u-\tau,r)]\geqslant\mu[L(u,r)]\geqslant 2\sigma_n^{-1}\sigma(\mathbb{S}^{n-1}\setminus L(u,r)). \tag{57}$$

Пусть $0<r<R<R_\Omega$. *Тогда выполнены неравенства*

$$m(r)=\sqrt{\sigma_n^{-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u^2(a+r\zeta)\,d\sigma(\zeta)}$$

$$\leqslant 2\exp\left(-\int_r^{R/\sqrt{e}}\frac{\mu(\rho)\,d\rho}{\rho}\right)m(R)\qquad(\textit{при } r<R/\sqrt{e}), \tag{58}$$

$$m(r)\leqslant M(r)=\sup_{\partial B(a,r)}u=\sup_{\overline{B(a,r)}}u\leqslant\sqrt{\frac{1+(r/R)^2}{\{1-(r/R)^2\}^{n-1}}}m(R), \tag{59}$$

$$M(r)\leqslant 3(4/3)^{n-2}\exp\left(-\int_{r\sqrt{e}}^{R/\sqrt{e}}\frac{\mu(\rho)\,d\rho}{\rho}\right)M(R)\qquad(\textit{при } r<R/e) \tag{60}$$

$$\leqslant 3(4/3)^{n-2}\exp\left(-\frac{2}{\sigma_n}\int_{r\sqrt{e}<|x-a|<R/\sqrt{e}\ \&\ u(x)=0}\frac{dx}{|x-a|^n}\right)M(R). \tag{61}$$

Предел в (57) существует ввиду неубывания функции $\tau\mapsto\mu[L(u-\tau,r)]$. Множество $L(u,r)$ является измеримым как объединение замкнутых множеств $\{\zeta\in\mathbb{S}^{n-1}\colon u(a+r\zeta)\geqslant 1/j\}$, $j\in\mathbb{N}$. Пример в [41, с. 537] показывает, что $L(u,r)$ может иметь положительную меру и пустую внутренность.

Из замкнутости $\{x\in\Omega\colon u(x)\geqslant\tau\}$ в Ω легко получить, что функция

$$r\mapsto\mu[\{\zeta\in\mathbb{S}^{n-1}\colon u(a+r\zeta)\geqslant\tau\}]$$

полунепрерывна снизу. Поэтому функция $\mu:(0,R_\Omega)\to[0,\infty]$ измерима.

При $n=2$ оценки вида (58) и (60) обычно связывают с именем М. Цудзи, см. теоремы 8.2 и 8.3 в [41]. Определение величины $\mu(r)$ и способ регуляризации в [41] сложнее, чем у нас.

При $n=2$ метод Карлемана конкурирует с оценками Альфорса [39, (2.3)]. Оценки «в обратную сторону» для гармонических функций требуют некоторой гладкости областей определения (отдельные ссылки см. в [73, §1]).

Для $n\geqslant 3$ оценка (58) почти идентична следствию теоремы D в [33], однако приписывание самой теоремы D работе [47] представляется некорректным, т.к. в [47] постановка задачи другая, а характеристическая постоянная $\mu[\cdot]$ определена только для открытых множеств. Значение теоремы 2 мы видим в прояснении этого вопроса и единой трактовке случаев $n=2$ и $n\geqslant 3$.

Субгармоничность функции u^2 и интеграл Пуассона для $u^2\big|_{\partial B(a,R)}$ сразу доставляют неравенство (59) с большей постоянной $\sqrt{\frac{1+r/R}{\{1-r/R\}^{n-1}}}$.

Функция (61) сходна с функцией $\exp S$ из [73, §1]. В работах [33] и [74], соединяющих оценки (50) и (51), подобные выражения еще не появились.

Доказательство. Вложение $L(u-\tau,r)\subset L(u,r)$ $(\tau>0)$ влечет левую оценку в (57). Ввиду регулярности меры Лебега $\sigma(L(u,r))=\inf_{\text{открытое } K\supset L(u,r)}\sigma(K)$. С учетом (50) имеем правое неравенство в (57) при $\sigma(L(u,r))<\sigma_n$. В противном случае правое неравенство в (57) очевидно.

Пусть $0<e^{t_0}=r<R/\sqrt{e}<R=e^{t_1}<R_\Omega$. Для $\tau>0$ и $0<\varepsilon<R_\Omega-R$ положим

$$(u-\tau)_+=(u-\tau)\vee 0 \quad \& \quad \psi_\varepsilon=\varepsilon^{-n}\psi(\cdot/\varepsilon) \quad \& \quad u_\varepsilon=(u-\tau)_+*\psi_\varepsilon,$$

где функция $0\leqslant\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет носитель в $B(0,1)$, интеграл $\int\psi\,dx=1$ и зависит только от $|x|$. Функция $(u-\tau)_+$ субгармонична по следствию 16.1.5 в [46], откуда по теореме 4.1.8 в [45] и ее доказательству свертка u_ε имеет смысл, неотрицательна, класса C^∞ и субгармонична ($\Delta u_\varepsilon\geqslant 0$) при $|x-a|<R_\Omega-\varepsilon$, причем $u_\varepsilon\downarrow(u-\tau)_+$ всюду в $\overline{B(a,R)}$ при $\varepsilon\to 0$.

Для $\rho\in[r,R]$ положим $L=\{\zeta\in\mathbb{S}^{n-1}\colon u(a+\rho\zeta)\geqslant\tau\}$. Оценим $\mu[L]$ сверху. Возьмем непустое открытое множество $K\supset L$. Допустим, что

$$(\forall j\in\mathbb{N}\colon j>(R_\Omega-R)^{-1})\ (\exists\zeta[j])\quad \zeta[j]\in L(u_{1/j},\rho)\setminus K. \tag{62}$$

Существует предельная точка $\zeta\in\mathbb{S}^{n-1}$ последовательности $(\zeta[j])$. Свойство $u_{1/j}(a+\rho\zeta[j])>0$ показывает, что в некоторой точке шара $B(a+\rho\zeta[j],1/j)$ выполнена оценка $(u-\tau)_+>0$. Замкнутость множества $\{x\in\Omega\colon u(x)\geqslant\tau\}$ в Ω дает, что $u(a+\rho\zeta)\geqslant\tau$, т.е. $\zeta\in L\subset K$. Однако это противоречит открытости множества K и условиям $\zeta[j]\notin K$. Поэтому (62) ложно, так что

$$(\exists\varepsilon)\quad L(u_\varepsilon,\rho)\subset K \quad \& \quad \mu[K]\leqslant\mu_\varepsilon(\rho)=\mu[L(u_\varepsilon,\rho)].$$

Отсюда $\mu[K]\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon(\rho)$ и $\mu[L]=\sup_K\mu[K]\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon(\rho)$.

Для $\rho\in[r,R]$ пусть $m_\varepsilon(\rho)$ — это L^2-среднее по сфере $\partial B(a,\rho)$ функции u_ε. Предположим, что установлено неравенство

$$m_\varepsilon(r)\leqslant 2\exp\left(-\int_r^{R/\sqrt{e}}\frac{\mu_\varepsilon(\rho)\,d\rho}{\rho}\right)m_\varepsilon(R). \tag{63}$$

Переходя здесь к пределу сначала при $\varepsilon\to 0$ (предыдущие два абзаца) и затем при $\tau\to 0$, получаем неравенство (58).

При выводе (63) можем считать, что $m_\varepsilon(r)>0$. В силу неравенства Коши функция u_ε^2 субгармонична, откуда $m_\varepsilon(\rho)\geqslant m_\varepsilon(r)>0$ (теорема 4.1.8 в [45]), поэтому на отрезке $[t_0,t_1]$ имеют смысл функции

$$\boldsymbol{\mu}(t)=\mu_\varepsilon(e^t) \quad \& \quad \nu(t)=\ln m_\varepsilon(e^t).$$

Проверим для них и для $N=n-2$ выполнение условий леммы 10.

Множества $L(u_\varepsilon,\rho)\neq\varnothing$ открыты, поэтому $0\leqslant\boldsymbol{\mu}<\infty$. Измеримость этой функции очевидна, а ограниченность будет следовать из (53). Гладкость u_ε показывает, что $m_\varepsilon\in C^\infty[r,R]$ и $\nu\in C^\infty[t_0,t_1]$. Неубывание m_ε влечет неубывание ν. При $n=2$ либо $L(u_\varepsilon,\rho)=\mathbb{S}^1$, когда $\mu_\varepsilon(\rho)=0$, либо $L(u_\varepsilon,\rho)$ является не более чем счетным объединением открытых дуг. Рассматривая каждую дугу с помощью неравенства Виртингера, получаем $\lambda[L(u_\varepsilon,\rho)]\geqslant 1/4$ и $\mu_\varepsilon(\rho)\geqslant 1/2$, что доказывает (54).

Установим (53), воспроизведя (в целях полноты) выкладку из [47]. Дифференцирование и неравенство Коши показывают, что

$$m'_\varepsilon(\rho)=\frac{1}{m_\varepsilon(\rho)\sigma_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\rho}\right)(a+\rho\zeta)\,d\sigma(\zeta) \tag{64}$$

$$\leqslant \left(\sigma_n^{-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2(a+\rho\zeta)\,d\sigma(\zeta)\right)^{1/2}. \tag{65}$$

Число $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\rho}(a+\rho\zeta)=\frac{\partial\{u_\varepsilon(a+\rho\zeta)\}}{\partial\rho}$ в то же время равно скалярному произведению $\nabla u_\varepsilon(a+\rho\zeta)\cdot\zeta$. Пусть dS — элемент площади на $\partial B(a,\rho)$. В силу (64), формулы Гаусса–Остроградского и неравенств $u_\varepsilon\geqslant 0$ и $\Delta u_\varepsilon\geqslant 0$ получаем

$$\begin{aligned}
m_\varepsilon(\rho)m_\varepsilon'(\rho)&=\frac{1}{\sigma_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B(a,\rho)}(u_\varepsilon\nabla u_\varepsilon)(x)\cdot\frac{x-a}{\rho}\,dS(x)\\
&=\frac{1}{\sigma_n\rho^{n-1}}\int_{B(a,\rho)}\{|\nabla u_\varepsilon|^2+u_\varepsilon\Delta u_\varepsilon\}\,dx,\\
(\rho^{n-1}m_\varepsilon(\rho)m_\varepsilon'(\rho))'&=\sigma_n^{-1}\int_{\partial B(a,\rho)}\{|\nabla u_\varepsilon|^2+u_\varepsilon\Delta u_\varepsilon\}\,dS\\
&\geqslant\frac{\rho^{n-1}}{\sigma_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left\{\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2(a+\rho\zeta)+\frac{|\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}}f(\zeta)|^2}{\rho^2}\right\}d\sigma(\zeta),
\end{aligned}$$

где $f\in\mathfrak{F}(L(u_\varepsilon,\rho))$, $f(\zeta)=u_\varepsilon(a+\rho\zeta)$. Из (65) и отношения Рэлея имеем

$$\begin{aligned}
(\rho^{n-1}m_\varepsilon(\rho)m_\varepsilon'(\rho))'&\geqslant\rho^{n-1}m_\varepsilon'^2(\rho)+\rho^{n-3}\lambda[L(u_\varepsilon,\rho)]m_\varepsilon^2(\rho),\\
\rho^2m_\varepsilon''(\rho)+(n-1)\rho m_\varepsilon'(\rho)&\geqslant\lambda[L(u_\varepsilon,\rho)]m_\varepsilon(\rho)\\
&=\{\mu_\varepsilon^2(\rho)+\mu_\varepsilon(\rho)N\}m_\varepsilon(\rho).
\end{aligned}$$

Получили неравенство вида (51). Из него легко выводится (53).

Итак, условия леммы 10 проверены. Применяя (56) с $t=t_1-\frac12$, после замены переменных получаем (63). Оценка (58) доказана.

Первое неравенство в (59) тривиально, а равенство двух супремумов следует из принципа максимума [45, теорема 4.1.8].

При проверке последнего неравенства в (59) можно, пользуясь аппроксимацией $u*\psi_\varepsilon$, считать функцию u непрерывной на $\overline{B(a,R)}$. Лемма 16.1.3 и предложение 16.1.4 в [46], а затем неравенство Коши показывают, что

$$\begin{aligned}
(\forall x\in\partial B(a,r))\quad u(x)&\leqslant\frac{(R^2-r^2)R^{n-2}}{\sigma_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{u(a+R\zeta)\,d\sigma(\zeta)}{|x-a-R\zeta|^n}\\
&\leqslant(R^2-r^2)R^{n-2}\sqrt{\sigma_n^{-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\sigma(\zeta)}{|x-a-R\zeta|^{2n}}}\,m(R).
\end{aligned}$$

Для $y=(1-\cos\phi)/2$, где ϕ — угол между векторами $x-a$ и ζ, имеем

$$\begin{aligned}
I=\sigma_n^{-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\sigma(\zeta)}{|x-a-R\zeta|^{2n}}&=\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_0^\pi\frac{\sin^{n-2}\phi\,d\phi}{(r^2+R^2-2rR\cos\phi)^n}\\
&=\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\frac{2^{n-2}}{(4rR)^n}\int_0^1\frac{y^{\frac{n-3}{2}}(1-y)^{\frac{n-3}{2}}\,dy}{\left\{y+\frac{(r-R)^2}{4rR}\right\}^n}.
\end{aligned}$$

Известно (см. [32], гл. 14, § 5), что для $\alpha,\beta,\gamma>0$

$$\int_0^1\frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy}{(y+\gamma)^{\alpha+\beta}}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)(1+\gamma)^\alpha\gamma^\beta}.$$

Дифференцируя по γ и применяя формулу удвоения, находим

$$\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy}{(y+\gamma)^{\alpha+\beta+1}} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)(1+\gamma)^{\alpha+1}\gamma^{\beta+1}}\,\frac{\alpha\gamma+\beta(1+\gamma)}{\alpha+\beta},$$

$$I = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)\sqrt{\pi}}\,\frac{2^{n-2}}{(4rR)^n}\,\frac{\Gamma^2\big(\frac{n-1}{2}\big)}{\Gamma(n-1)}\left(\frac{4rR}{R^2-r^2}\right)^{n+1}\frac{r^2+R^2}{4rR} = \frac{r^2+R^2}{(R^2-r^2)^{n+1}}.$$

Отсюда следует (59).

Оценка (60) вытекает из неравенств (58), (59), $\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} < \frac{3}{2}$ и $\sqrt{\frac{e}{e-1}} < \frac{4}{3}$.

Неравенство (61) получается из (57) переходом к сферическим координатам $x-a=\rho\zeta$, $dx=\rho^{n-1}\,d\rho\,d\sigma(\zeta)$. Теорема 2 доказана. $\square$

Сформулируем приложение теоремы 2 к включению $\Omega\in\mathcal{A}^\mu$.

Теорема 3. *Для ограниченной липшицевой области* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *пусть*

$$L(a,\beta)=\{\zeta\in\mathbb{S}^{n-1}\colon a+\beta\zeta\in\Omega\},\quad a\in\partial\Omega\ \&\ \beta>0.$$

Тогда при $0<\mu\leqslant 1$ *любое из условий*

(66) $$(\exists\beta_0>0)\ (\forall a\in\partial\Omega)\ (\forall\beta\in(0,\beta_0))\quad \mu[L(a,\beta)]\geqslant\mu,$$

$$(\exists\alpha>0)\ (\exists\beta_0>0)\ (\forall a\in\partial\Omega)\ (\forall\beta\in(0,\beta_0))\ (\forall\gamma\in(0,1))$$

(67) $$\frac{2}{\sigma_n}\int_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega\colon\ \beta\gamma<|x-a|<\beta}|x-a|^{-n}\,dx\geqslant\mu\ln\frac{1}{\gamma}-\alpha$$

достаточно для включения $\Omega\in\mathcal{A}^\mu$. *Выполнено соотношение*

(68) $$\Omega\in\bigcup_{1/2<\mu\leqslant1}\mathcal{A}^\mu\ \text{при}\ n=2\quad\text{или}\quad\Omega\in\bigcup_{0<\mu\leqslant1}\mathcal{A}^\mu\ \text{при}\ n\geqslant3.$$

Включение $\Omega\in\mathcal{A}^1$ связано с условиями на $\partial\Omega$ типа условия Ляпунова–Дини. Ряд относящихся сюда ссылок собран в [71, п. 4.3].

Доказательство. Возьмем $U\in U_\Omega$. Пусть выполнено (66). Уменьшая β_0, если нужно, можем считать U гармонической на $B(a,\beta_0)\cap\Omega$ при $a\in\partial\Omega$. Возьмем любые $a\in\partial\Omega$, $\beta\in(0,\beta_0)$ и $\gamma\in(0,1/e)$. В теореме 2 положим $R_\Omega=\beta_0$ и

$$u=\begin{cases}U & \text{на } B(a,\beta_0)\cap\Omega,\\ 0 & \text{на } B(a,\beta_0)\setminus\Omega.\end{cases}$$

Функция u непрерывна и при любом $x\in B(a,\beta_0)$ удовлетворяет неравенству из определения 5 для всех достаточно малых $r<r_x$. Известно (см. пункт (ii) предложения 16.1.4 в [46]), что это дает субгармоничность u. На основе (60), первого неравенства (57) и условия (66) выводим

$$\sup_{B(a,\beta\gamma)\cap\Omega}U = M(\beta\gamma)\leqslant 3(4/3)^{n-2}\exp\left(-\mu\int_{\beta\gamma\sqrt{e}}^{\beta/\sqrt{e}}\frac{d\rho}{\rho}\right)M(\beta)$$
$$= 3(4/3)^{n-2}e^\mu\gamma^\mu\sup_{B(a,\beta)\cap\Omega}U.$$

При $1/e\leqslant\gamma<1$ имеем $M(\beta\gamma)\leqslant M(\beta)\leqslant e^\mu\gamma^\mu M(\beta)$. Мы доказали оценку (47) при $\beta<\beta_0$. Для $\beta\geqslant\beta_0$ она выводится обычным образом. Значит, $\Omega\in\mathcal{A}^\mu$.

Импликация (67) $\Rightarrow\Omega\in\mathcal{A}^\mu$ проверяется аналогично на основе (60) и (61).

Область Ω удовлетворяет условию внешнего конуса Пуанкаре, поэтому

$$(\exists S \in (0,1))\ (\exists \beta_0 > 0)\ (\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0,\beta_0))\quad \sigma(L(a,\beta)) \leqslant \sigma_n S.$$

При $n = 2$ первая оценка (50) показывает, что $\mu[L(a,\beta)] \geqslant \mu(2,S) = 1/(2S)$, так что верно (66) для $\mu = 1/(2S) > 1/2$. Отсюда $\Omega \in \mathcal{A}^\mu$. При $n \geqslant 3$ точно так же $\mu[L(a,\beta)] \geqslant \mu = 2(1-S) > 0$ и $\Omega \in \mathcal{A}^\mu$. Теорема 3 доказана. □

4. Сопоставление основного критерия с литературой

Наш основной критерий (§ 2) сводит проблему $W^{1,p}$-корректности к проверке интегрального условия $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$. Довольно общий результат относительно включения $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$ получается при сочетании поточечного условия $\Omega \in \mathcal{A}^\mu$ на $U \in U_\Omega$ (§ 3) с интегральной оценкой (72) из следующей теоремы.

Теорема 4. *Рассмотрим надграфик*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_n > \omega(x')\}$$

липшицевой функции $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ *(*$n \geqslant 2$*) с* $|\omega(\xi) - \omega(\eta)| \leqslant \theta|\xi - \eta|$ *и* $\omega(0) = 0$. *Существует единственная функция* $U_\omega \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *со свойствами*

$$U_\omega > 0 \quad \& \quad \Delta U_\omega = 0 \quad \& \quad U_\omega\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \& \quad U_\omega(e_n) = 1. \tag{69}$$

Для $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\sigma > 0$ *и* $\rho(x) = x_n - \omega(x')$ *имеем*

$$(\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta,\gamma) \quad c(n,\theta) \leqslant \frac{\int_{x' \in Q(a',\beta)\ \&\ \gamma < \rho(x) < 2\gamma} U_\omega^2\,dx}{\beta^{n-3}(\beta \wedge \gamma)^2 \gamma U_\omega^2(a + (\beta \vee \gamma)e_n)} \leqslant c(n,\theta), \tag{70}$$

$$(\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta,\sigma) \qquad \frac{\int_{x' \in Q(a',\beta)\ \&\ 0 < \rho(x) < 2\beta} \rho^{\sigma-3} U_\omega^2\,dx}{\beta^{n+\sigma-3} U_\omega^2(a + \beta e_n)} \leqslant c(n,\theta,\sigma), \tag{71}$$

где $Q(a',\beta) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} \colon |\xi - a'|_\infty < \beta\}$ *— это* $(n-1)$*-мерный куб.*

Если $U \in U_\Omega$ *(*$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченная липшицева область) и* $\sigma > 0$, *то*

$$(\exists \alpha > 0)\ (\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \operatorname{diam}\Omega)) \quad \frac{\int_{B(a,\beta)\cap\Omega} \varrho^{\sigma-3} U^2\,dx}{\beta^{n+\sigma-3} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^2} \leqslant \alpha. \tag{72}$$

Функция U_ω введена, чтобы рассматривать произвольные a, β и γ.

Доказательство теоремы близко к замкнутому, что соответствует характеру остальной части статьи. Доказательство можно упростить за счет известных фактов. Во-первых, свойство (70) можно вывести из теорем Дальберга о гармонической мере граничных шаров ([24, лемма 1] или [20, лемма 2.2]) и о квадратичной суммируемости ядра Пуассона, т.е. производной Радона–Никодима гармонической меры по поверхностной мере, см. [24, теорема 3] или [50, теорема 1]. Наш вывод свойства (70) сходен с [24], но сама формулировка (70) представляется новой и имеющей самостоятельный интерес. Во-вторых, неравенства (71) и (72) аналогичны лемме 7.1 препринта [76] и, как и она, вытекают из принадлежащей Дальбергу квадратичной суммируемости нетангенциальной максимальной функции градиента гармонической функции.

Доказательство. Первое утверждение теоремы с помощью преобразования Кельвина (см. [43, § 2.6] или [54, с. 40]) сводится к замечанию 2.7 и лемме 3.7 в [48], однако для дальнейшего нам нужно доказательство, основанное на аппроксимации.

Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ равна 1 на шаре $\{|\xi| < 1\}$. Функции

$$\xi \mapsto \omega(\xi)\varphi(\xi/N) \quad (N \in \mathbb{N})$$

финитны и имеют равномерно ограниченные постоянные Липшица. Их усреднения по Соболеву $\omega[N]$ с радиусами $1/N$ обладают этими же свойствами и при $N \to \infty$ сходятся к ω равномерно на компактах. Из [72] (теорема 3 и лемма 4) для любого N следует существование функции $U_{\omega[N]}$ со свойствами (69). Неравенство Гарнака и теоремы Гарнака позволяют переходом к подпоследовательности $(U_{\omega[N_k]})$, сходящейся равномерно на компактах в Ω, построить функцию U_∞, удовлетворяющую первому, второму и четвертому условиям в (69). Она удовлетворяет и третьему условию ввиду оценки степенного убывания $U_{\omega[N_k]}$ вблизи границы, доказываемой так же, как теорема 3.

Единственность U_ω проверим по аналогии с теоремой 1.7 в [7]. Пусть $\mathcal{U}$ — множество всех функций со свойствами (69). В силу (12)

$$M = \sup_{U,V \in \mathcal{U} \ \& \ x \in \Omega} U(x)/V(x) \in [1, \infty).$$

Для любых $U, V \in \mathcal{U}$ имеем $U \leqslant MV$, $(V - U + MV)/M \in \mathcal{U}$ и $U \leqslant V - U + MV$, поэтому $U \leqslant (1+M)V/2$, $M \leqslant (1+M)/2$, $M = 1$ и $\mathcal{U} = \{U_\infty\}$.

Из единственности U_ω следует, что при $N \to \infty$

$$U_{\omega[N]} \to U_\omega$$

равномерно на компактах в Ω. Значит, при выводе (70) можно считать, что $|\omega(\xi) - \omega(\eta)| \leqslant \theta|\xi - \eta|$ и $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Тогда, как известно, $U_\omega \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

По неравенству Гарнака вдоль двухзвенной ломаной получаем

$$(\forall a \in \partial\Omega)(\forall \beta \leqslant 2\gamma) \quad \frac{\sup_{x' \in Q(a',\beta) \ \& \ \gamma < \rho(x) < 2\gamma} U_\omega(x)}{\inf_{x' \in Q(a',\beta) \ \& \ \gamma < \rho(x) < 2\gamma} U_\omega(x)} \leqslant c_1(n, \theta). \tag{73}$$

Ввиду $a' \in Q(a', \beta)$ и $\rho(a + \gamma e_n) = \gamma$ имеем оценки (70) для $\beta \leqslant \gamma$.

Обозначим $\Upsilon(\xi) = |\nabla U_\omega|(\xi, \omega(\xi))$. Эта функция равна производной от U_ω вдоль внутренней нормали к $\partial\Omega$. Допустим, что

$$(\forall a \in \partial\Omega) \ (\forall \beta > 0) \quad c_2(n, \theta) \leqslant \frac{\int_{Q(a',\beta)} \Upsilon^2 \, d\xi}{\beta^{n-3} U_\omega^2(a + \beta e_n)} \leqslant c_3(n, \theta). \tag{74}$$

Возьмем любые $a \in \partial\Omega$ и $\beta > \gamma > 0$. Найдем целое $N \geqslant 0$ со свойствами

$$\gamma < \beta_N = 2^{-N}\beta \leqslant 2\gamma$$

и такое множество $A \subset \partial\Omega$ из $2^{(n-1)N}$ точек, чтобы кубы $Q(\mathbf{a}', \beta_N)$ с $\mathbf{a} \in A$ образовали разбиение куба $Q(a', \beta)$ с точностью до подмножеств их границ. В силу оценок (73) и (74) имеем

$$\begin{aligned}
\int_{x' \in Q(a',\beta) \ \& \ \gamma < \rho(x) < 2\gamma} U_\omega^2 \, dx &\leqslant [2\beta_N]^{n-1} \gamma c_1^2 \sum_{\mathbf{a} \in A} U_\omega^2(\mathbf{a} + \beta_N e_n) \\
&\leqslant 2^{n-1} c_1^2 c_2^{-1} \beta_N^2 \gamma \sum_{\mathbf{a} \in A} \int_{Q(\mathbf{a}',\beta_N)} \Upsilon^2 \, d\xi \\
&\leqslant 2^{n+1} c_1^2 c_2^{-1} \gamma^3 \int_{Q(a',\beta)} \Upsilon^2 \, d\xi \\
&\leqslant 2^{n+1} c_1^2 c_2^{-1} c_3 \beta^{n-3} \gamma^3 U_\omega^2(a + \beta e_n).
\end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\int_{x'\in Q(a',\beta)\ \&\ \gamma<\rho(x)<2\gamma} U_\omega^2\,dx \geqslant 2^{n-1}c_1^{-2}c_2c_3^{-1}\beta^{n-3}\gamma^3U_\omega^2(a+\beta e_n).$$

Неравенства (70) доказаны.

Приступим к проверке (74). Возьмем $a\in\partial\Omega$ и $\beta>0$. Построим область Ω_0 класса C^∞ такую, что

$$\{x\in\mathbb{R}^n\colon x'\in Q(a',4\beta)\ \&\ \omega(x')<x_n<\omega(x')+2\beta\theta+10\beta\}\subset\Omega_0,$$
$$\Omega_0\subset\{x\in\mathbb{R}^n\colon x'\in Q(a',5\beta)\ \&\ \omega(x')<x_n<\omega(x')+2\beta\theta+10\beta\}.$$

Пусть $X=a+8\beta e_n\in\Omega_0$, $Y=a+\beta e_n\in\Omega_0$, F_X — ассоциированная с мерой δ_X мера на $\partial\Omega_0$, G — функция Грина для Ω_0, а H — гармоническая мера

$$H(x)=\omega(x,A,\Omega_0),\quad A=\{(\xi,\omega(\xi))\colon\xi\in Q(a',\beta)\}\subset\partial\Omega_0.$$

Формула Грина дает хорошо известную формулу $dF_X/dS=|\nabla_yG(X,\cdot)|$ для производной Радона–Никодима меры F_X по поверхностной мере. Отсюда

$$H(X)=F_X(A)=\int_A dF_X=\int_A|\nabla_yG(X,\cdot)|\,dS.$$

Масштабируя граничный принцип Гарнака (12) в β раз, имеем

$$H(X)\leqslant c(n,\theta)\frac{G(X,Y)}{U_\omega(Y)}\int_A|\nabla U_\omega|\,dS.$$

Легко проверяется, что $G(X,Y)\leqslant c(n,\theta)\beta^{2-n}$ и $H(X)\geqslant c(n,\theta)H(Y)$.

Пусть $H_1(x)=\omega(x,A_1,\Omega_1)$, где A_1 — нижняя грань параллелепипеда

$$\Omega_1=Q(a',\beta/\sqrt{n})\times(a_n-\beta\theta-\beta,a_n+\beta\theta+2\beta).$$

Очевидно, что $H,H_1\in C(\overline{\Omega_0\cap\Omega_1})$ и $H\geqslant H_1$ на $\partial(\Omega_0\cap\Omega_1)$. Принцип максимума, масштабирование в β раз, сильный принцип максимума и неравенство Коши показывают, что

$$H(Y)\geqslant H_1(Y)=c(n,\theta),$$
$$U_\omega(Y)\leqslant c(n,\theta)\beta^{2-n}\int_{Q(a',\beta)}\Upsilon\,d\xi\leqslant c(n,\theta)\beta^{\frac{3-n}{2}}\left(\int_{Q(a',\beta)}\Upsilon^2\,d\xi\right)^{1/2}.$$

Левое неравенство в (74) доказано.

Очевидно, что $A\subset B(a,\beta\gamma)$ для $\gamma=\sqrt{n-1}\sqrt{\theta^2+1}$. Существуют функции $\varphi,\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $0\leqslant\varphi\leqslant1$, $0\leqslant\psi\leqslant1$,

$$\varphi\big|_{B(a,\beta\gamma)}\equiv1\quad\&\quad\operatorname{supp}\varphi\subset B(a,2\beta\gamma)\quad\&\quad|D^\alpha\varphi|\leqslant c(n,\theta)\beta^{-|\alpha|}\quad(|\alpha|\leqslant2),$$
$$\psi\big|_{B(a,2\beta\gamma)}\equiv1\quad\&\quad\operatorname{supp}\psi\subset B(a,3\beta\gamma)\quad\&\quad|\nabla\psi|\leqslant c_4(n,\theta)\beta^{-1}\psi^{1/2}.$$

Обозначим $V=D_nU_\omega$. В области Ω ввиду $\Delta V=0$ имеем

$$\operatorname{div}\{\varphi U_\omega\nabla V-\nabla(\varphi U_\omega)V\}=-\Delta(\varphi U_\omega)V.$$

Формула Гаусса–Остроградского, свойства $U_\omega\big|_{\partial\Omega}=0$, $V\big|_{\partial\Omega}\geqslant0$ и $\frac{|\nabla U_\omega|}{V}=\frac{dS}{d\xi}$, неравенство Коши и интегрирование по частям показывают, что

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \varphi|\nabla U_\omega| V\,dS &= -\int_\Omega \Delta(\varphi U_\omega) V\,dx \\
&= -\int_\Omega \{(\Delta\varphi)U_\omega + 2\nabla\varphi\cdot\nabla U_\omega\} V\,dx, \\
\int_{Q(a',\beta)} \Upsilon^2\,d\xi &\leqslant \int_{\partial\Omega} \varphi|\nabla U_\omega| V\,dS \\
&\leqslant c_5(n,\theta)\beta^{-2}\sqrt{\int_{B(a,2\beta\gamma)\cap\Omega} U_\omega^2\,dx}\sqrt{W} + c_6(n,\theta)\beta^{-1}W, \\
W &= \int_\Omega \psi|\nabla U_\omega|^2\,dx \\
&= -\int_\Omega U_\omega \operatorname{div}(\psi\nabla U_\omega)\,dx \\
&= -\int_\Omega U_\omega \nabla\psi\cdot\nabla U_\omega\,dx \\
&\leqslant c_4\beta^{-1}\sqrt{\int_{B(a,3\beta\gamma)\cap\Omega} U_\omega^2\,dx}\sqrt{W}.
\end{aligned}$$

По оценке Карлесона (11), неравенству Гарнака и свойству $W<\infty$

$$\int_{B(a,3\beta\gamma)\cap\Omega} U_\omega^2\,dx \leqslant c_7(n,\theta)\beta^n U_\omega^2(a+\beta e_n),$$

$$\int_{Q(a',\beta)} \Upsilon^2\,d\xi \leqslant c_4\{c_5+c_4c_6\}c_7\beta^{n-3}U_\omega^2(a+\beta e_n).$$

Правая оценка в (74) доказана, а с ней и неравенства (70).

Для любых $a\in\partial\Omega$ и $\beta,\sigma>0$ по (70) получаем (71):

$$\begin{aligned}
\int_{x'\in Q(a',\beta)\ \&\ 0<\rho(x)<2\beta} \rho^{\sigma-3}U_\omega^2\,dx &= \sum_{k=0}^\infty \int_{x'\in Q(a',\beta)\ \&\ 1<\frac{\rho(x)}{\beta 2^{-k}}<2} \rho^{\sigma-3}U_\omega^2\,dx \\
&\leqslant c_8(n,\theta,\sigma)\sum_{k=0}^\infty (\beta 2^{-k})^{\sigma-3}\beta^{n-3}(\beta 2^{-k})^3 U_\omega^2(a+\beta e_n) \\
&= \frac{c_8}{1-2^{-\sigma}}\beta^{n+\sigma-3}U_\omega^2(a+\beta e_n).
\end{aligned}$$

Пусть Ω — ограниченная липшицева область. Любому $a\in\partial\Omega$ по первому абзацу доказательства леммы 4 отвечает тройка (β_0,D,ω) с

$$|\omega(\xi)-\omega(\eta)|\leqslant\theta_0|\xi-\eta|$$

такая, как в определении 1. Продолжим функцию ω на $\mathbb{R}^{n-1}$ с сохранением липшицевости (например, см. [83], теорема 11.2), обеспечим свойство $\omega(0)=0$ добавлением к ω константы и построим функцию U_ω. Ввиду (23) и (71) это дает условие (72) для достаточно малых β. Случай остальных значений β разбирается по аналогии с (30). Свойство (72) и теорема 4 доказаны. □

Докажем обещанный результат о связи между классами $\mathcal{W}^{1,p}$ и $\mathcal{A}^\mu$.

Теорема 5. *Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\{p \in [2,\infty)\colon \Omega \in \mathcal{W}^{1,p}\} = [2, J), \quad 2 < J \leqslant \infty. \tag{75}$$

Параметр $J = \sup p$ обладает свойствами

$$0 < \mu \leqslant 1 \;\&\; \Omega \in \mathcal{A}^\mu \quad \Rightarrow \quad J \geqslant (3-2\mu)/(1-\mu), \tag{76}$$

$$J > 4 \text{ при } n = 2 \quad \& \quad J > 3 \text{ при } n \geqslant 3, \tag{77}$$

$$\Omega \in \bigcap_{0<\mu<1} \mathcal{A}^\mu \quad \Leftrightarrow \quad J = \infty. \tag{78}$$

По модулю теоремы 1 новое здесь — только свойство (76). Его доказательство сходно с доказательством леммы 5 в [25], почти совпадающей с (77). В отличие от [25] мы используем (72), а не квадратичную суммируемость нетангенциальной максимальной функции градиента гармонической функции.

Доказательство. Множество слева в (75) не пусто, так как содержит $p = 2$ в силу соотношения $(72)\big|_{\sigma=1}$. Пусть $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$ с соответствующей функцией $U \in U_\Omega$. Из доказательства теоремы 1 известно, что выполнено свойство (41). Отсюда для любых $a \in \partial\Omega$ и $0 < \beta < \operatorname{diam}\Omega$

$$\begin{aligned}\int_{B(a,\beta)\cap\Omega} \left(\frac{U}{\varrho}\right)^{p+\varepsilon} dx &\leqslant \beta^{-\varepsilon} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^\varepsilon \int_{B(a,\beta)\cap\Omega} \left(\frac{U}{\varrho}\right)^p \left(\frac{\beta}{\varrho}\right)^\varepsilon dx \\ &\leqslant \alpha_\star \beta^{n-p-\varepsilon} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^{p+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Значит, $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p_\star}$ для $p_\star = p + \varepsilon > p$. При $2 < p_* < p_\star$ включение $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p_*}$ выводится с помощью неравенства Гёльдера, как в (46), что дает (75).

Пусть $\Omega \in \mathcal{A}^\mu$, откуда выполнено (48). Возьмем $2 < p < (3-2\mu)/(1-\mu)$, так что для $\sigma = 3 - 2\mu - (1-\mu)p > 0$ верно (72) (с постоянной $\alpha = \alpha_\sigma$). Поэтому

$$\begin{aligned}\int_{B(a,\beta)\cap\Omega} \left(\frac{U}{\varrho}\right)^p dx &\leqslant \int_{B(a,\beta)\cap\Omega} \left(\frac{U}{\varrho}\right)^2 \left\{\frac{\alpha}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{\beta}\right)^\mu \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U\right\}^{p-2} dx \\ &= \alpha^{p-2}\beta^{(2-p)\mu} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^{p-2} \int_{B(a,\beta)\cap\Omega} \varrho^{\sigma-3} U^2\, dx \\ &\leqslant \alpha_\sigma \alpha^{p-2} \beta^{n-p} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^p.\end{aligned}$$

Отсюда $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$ и $J > p$. Устремляя $p \to (3-2\mu)/(1-\mu)$, получаем (76).

Свойство (77) непосредственно следует из (68) и (76).

Если $\Omega \in \bigcap_{0<\mu<1} \mathcal{A}^\mu$, то $J = \infty$ ввиду (76).

Обратно, пусть $J = \infty$. Тогда $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$ с $p = n/(1-\mu)$ для любого $0 < \mu < 1$. Пусть $a \in \partial\Omega$, $0 < \beta < \operatorname{diam}\Omega$, $0 < \gamma < 1/2$, $x \in B(a, \beta\gamma) \cap \Omega$ и $B = B(x, \varrho(x)/2)$ ($\subset B(a,\beta) \cap \Omega$). С учетом (26) и (40) имеем

$$\begin{aligned}U^p(x) \leqslant c(\Omega, U, p) \inf_B U^p &\leqslant c_1(\Omega, U, p)\varrho(x)^{p-n} \int_{B(a,\beta)\cap\Omega} (U/\varrho)^p\, dx \\ &\leqslant \alpha c_1 \gamma^{p-n} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^p = \alpha c_1 \gamma^{\mu p} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^p.\end{aligned}$$

Получили (47), откуда $\Omega \in \mathcal{A}^\mu$. Свойство (78) и теорема 5 доказаны. □

Разберем с помощью теорем 1, 3, 4 и 5 известные факты о $W^{1,p}$-корректности, изложенные во введении. В соответствии с теоремой 1 не будем явно различать $W^{1,p}$-корректность и включение $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$. Как обычно, Ω — это ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$.

Включение $\Omega \in \mathcal{W}^{1,2}$ следует из теоремы Рисса. Оно также идентично соотношению $(72)\big|_{\sigma=1}$ и содержится в более общем свойстве (75).

Напомним, что по определению 1 любому $a \in \partial\Omega$ отвечает тройка (β, D, ω). По причине компактности $\partial\Omega$ имеет смысл постоянная Липшица области Ω:

$$\begin{aligned}\operatorname{Lip}[\Omega] &= \sup_a \inf_{\beta,D,\omega} \sup_{\xi,\eta\in B(a',\beta):\ \xi\neq\eta} \frac{|\omega(\xi)-\omega(\eta)|}{|\xi-\eta|} \\ &= \lim_{\beta\to 0} \sup_a \inf_{D,\omega} \sup_{\xi,\eta\in B(a',\beta):\ \xi\neq\eta} \frac{|\omega(\xi)-\omega(\eta)|}{|\xi-\eta|} < \infty.\end{aligned}$$

Для произвольного $\gamma > \operatorname{Lip}[\Omega]$ существует $\beta_0 > 0$ такое, что

$$(\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0,\beta_0))\ (\exists D,\omega)\ (\forall \xi \in B(a',\beta)) \quad a_n - \omega(\xi) \leqslant \gamma|\xi - a'|.$$

Для любого $\zeta \in L(a,\beta)$ (см. теорему 3) точка $z = D(a+\beta\zeta)$ принадлежит к $\partial B(a,\beta)\cap D(\Omega)$. Имеем $a_n - z_n \leqslant |a_n - z_n| = \sqrt{\beta^2 - |z'-a'|^2}$ ввиду $z \in \partial B(a,\beta)$. Кроме того, точка z является предельной для некоторой последовательности в $B(a,\beta)\cap D(\Omega)$, поэтому $z_n \geqslant \omega(z')$ по определению 1. Отсюда

$$a_n - z_n \leqslant \sqrt{\beta^2 - |z'-a'|^2} \wedge (\gamma|z'-a'|) \leqslant \beta\gamma/\sqrt{\gamma^2+1}.$$

Неравенство здесь на самом деле строгое ввиду открытости множества $L(a,\beta)$ в $\mathbb{S}^{n-1}$. Значит, $L(a,\beta)$ содержится в повороте множества $K = K(n, -\gamma/\sqrt{\gamma^2+1})$, поэтому верно (66) для $\mu = \mu[K]$. С учетом теоремы 3 и (76) получаем

$$(79) \qquad (\forall\Omega) \quad \Omega \in \bigcap_{2\leqslant p<(3-2\mu)/(1-\mu)} \mathcal{W}^{1,p}, \quad \mu = \mu\left[K\left(n, -\frac{\operatorname{Lip}[\Omega]}{\sqrt{\operatorname{Lip}[\Omega]^2+1}}\right)\right].$$

Отсюда $\Omega \in \bigcap_{2\leqslant p<\infty} \mathcal{W}^{1,p}$ для областей Ω класса C^1, поскольку $\operatorname{Lip}[\Omega] = 0$, а характеристическая постоянная $\mu[K(n,0)]$ полусферы равна единице.

Хорошо известно [2, п. 9.1], что выпуклые ограниченные области липшицевы. Для выпуклой области Ω множества $L(a,\beta)$ содержатся в полусферах, что доказывает $(66)\big|_{\mu=1}$. Для области Ω, удовлетворяющей равномерному условию внешнего шара из [68, с. 2537–2539], легко проверить свойство $(67)\big|_{\mu=1}$. В каждом из этих случаев теорема 3 и свойство (76) показывают, что $\Omega \in \mathcal{A}^1$ и $\Omega \in \bigcap_{2\leqslant p<\infty} \mathcal{W}^{1,p}$. Можно аналогично уточнить утверждение (79), заменяя $\operatorname{Lip}[\Omega]$ на соответствующий параметр конуса из условия внешнего конуса Пуанкаре. Указанное уточнение допускает дальнейшее усиление, если вместо внешнего конуса применить «внешний гибкий конус». Действительно, введем величину

$$\operatorname{Ext}[\Omega] = \varlimsup_{\beta\to 0} \sup_a \inf_{D,\omega} \sup_{B(a',\beta)} \frac{\sqrt{\beta^2 - |\cdot - a'|^2} \wedge (a_n - \omega)}{\beta} \leqslant \frac{\operatorname{Lip}[\Omega]}{\sqrt{\operatorname{Lip}[\Omega]^2+1}} < 1.$$

Повторяя доказательство утверждения (79), имеем

$$(80) \qquad (\forall\Omega) \quad \Omega \in \bigcap_{2\leqslant p<(3-2\mu)/(1-\mu)} \mathcal{W}^{1,p}, \quad \mu = \mu\big[K(n, -\operatorname{Ext}[\Omega])\big].$$

Отсюда снова выводим $\Omega \in \bigcap_{2\leqslant p<\infty} \mathcal{W}^{1,p}$ для выпуклых областей и областей с равномерным условием внешнего шара, т.к. в этих случаях $\mathrm{Ext}[\Omega] = 0$.

Очевидно, что $\mu[K(n,s)] \to 1$ при $s \to 0$. В силу (80) получаем корректность для областей с малым $\mathrm{Ext}[\Omega]$:

$$(\forall p \geqslant 2)\ (\exists \gamma = \gamma(n,p) > 0)\ (\forall \Omega) \qquad \mathrm{Ext}[\Omega] \leqslant \gamma \quad \Rightarrow \quad \Omega \in \mathcal{W}^{1,p}. \tag{81}$$

В частности, это дает корректность для областей с малым $\mathrm{Lip}[\Omega]$.

Устойчивость по p включения $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$ [75, с. 176] содержится в (75).

Знаменитый результат (4) Д. Джерисона и К. Кенига совпадает с (77) при отождествлении $W^{1,p}$-корректности с включением $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$. Без этого отождествления (77) почти совпадает с леммой 5 в [25].

Легко построить примеры областей $\Omega \notin \mathcal{W}^{1,p}$, см. § 5 или [25, с. 167].

Для липшицевых областей утверждение (5) с фиксированным μ совпадает с включением $\Omega \in \mathcal{A}^\mu$ ввиду леммы 8. Поэтому для липшицевых областей критерий $\Omega \in \bigcap_{2\leqslant p<\infty} \mathcal{W}^{1,p} \Leftrightarrow$ (5) Ю.А. Алхутова совпадает с (78). Опять по лемме 8 замечание после теоремы 4 в [8] можно записать в виде

$$\Omega \in \mathcal{A}^\mu \ \&\ 2 < p < 1/(1-\mu) \quad \Rightarrow \quad \Omega \in \mathcal{W}^{1,p}.$$

Иначе говоря, $J \geqslant 1/(1-\mu)$. Очевидно, что (76) улучшает этот результат.

Грубо говоря, происхождение параметра $1/(1-\mu)$ связано с тем, что если $U = O(\varrho^\mu)$ и $p < 1/(1-\mu)$, то $(U/\varrho)^p = O(\varrho^{(\mu-1)p})$ и $(\mu-1)p > -1$. В работе [70, с. 336 и с. 378] в сходном утверждении без доказательства появился параметр $1+1/(1-\mu)$, промежуточный между $1/(1-\mu)$ и $(3-2\mu)/(1-\mu)$. Препринт [26] это значение параметра приписывает диссертации К. Нистрёма.

Из соотношения (81) и неравенства

$$\mathrm{Ext}[\Omega] \leqslant \varlimsup_{\beta\to 0} \sup_a \inf_{D,\omega} \sup_{B(a',\beta)} \frac{a_n - \omega}{\beta}$$

вытекает ряд результатов по $W^{1,p}$-корректности в областях классов BMO_1, VMO_1 и Райфенберга. Базовые сведения по этим классам содержатся в [44]: определение классов BMO и VMO на пространстве однородного типа (с. 2601–2602), формула для расстояния от функции из BMO до VMO (с. 2611–2615), определение классов областей BMO_1 и VMO_1 (с. 2622–2625), вложения

$$\mathrm{BMO}_1(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda_*(\mathbb{R}^n) \quad \& \quad \mathrm{VMO}_1(\mathbb{R}^n) \subset \lambda_*(\mathbb{R}^n)$$

в пространства Зигмунда и эквивалентные нормы в указанных пространствах (с. 2635–2637), определение областей Райфенберга (с. 2687–2688) и связь между условиями Зигмунда и Райфенберга (с. 2727–2728; см. также [71, п. 4.1]). Мы не будем входить в детали по следующим причинам.

- Мы не хотим утяжелять изложение этим техническим вопросом.
- Классы областей BMO_1, VMO_1 и Райфенберга все равно не учитывают асимметрию между Ω и $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ в проблеме корректности.
- Определение области Райфенберга не требует локального представления границы графиком функции. Рассмотрение областей Райфенберга приводит к открытой проблеме обобщения нашего основного критерия корректности на нелипшицевы области, например, на нетангенциально достижимые области Джерисона и Кенига. Это позволило бы охватить области Райфенберга (см. [44, с. 2688]) и усилить описываемый ниже результат К. Нистрёма.

Результат Нистрёма относится к более слабому свойству, чем $W^{1,p}$-корректность. Пусть $p > n/(n-1)$, $q = p/(p-1)$ и $Q = np/(n+p)$. Теорема вложения Соболева $W_0^{1,q}(\Omega) \subset L^{Q/(Q-1)}(\Omega)$ дает, что $L^Q(\Omega) \subset W^{-1,p}(\Omega)$. Значит, если имеет место $W^{1,p}$-корректность, то

$$(\exists C > 0)\ (\forall f \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \|\mathbf{G}f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^Q(\Omega)}. \tag{82}$$

Предельный переход доказывает эту оценку для всех $f \in L^Q(\Omega)$. Оценка (82) и сходная оценка слабого типа для $p = n/(n-1)$ изучены в работе [25], где появилось утверждение о $\sup p$ вида (77). Нистрём в [70] рассмотрел обобщение этих результатов на нетангенциально достижимые области. Он доказал, что свойство (82) (или оценка слабого типа при $Q = 1$) выполнено, если

$$(\exists \alpha > 0)\ (\exists \beta_0 > 0)\ (\exists y_0 \in \Omega)\ (\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \beta_0))$$

$$\int_{B(a,\beta)\cap\Omega} \left(\frac{G(\cdot, y_0)}{\varrho}\right)^p dx \leqslant \alpha \operatorname{mes}^{1-p}(B(a,\beta)\cap\Omega) \left(\int_{B(a,\beta)\cap\Omega} \frac{G(\cdot, y_0)}{\varrho} dx\right)^p. \tag{83}$$

Правая часть в (83) сравнима с $\beta^{n-p} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^p$ для липшицевой Ω, малых значений β и $U = G(\cdot, y_0) \wedge 1$ по лемме 4 и соотношению $(72)\big|_{\sigma=1}$. Отсюда

$$(83) \Leftrightarrow \Omega \in \mathcal{W}^{1,p} \text{ в липшицевом случае при } p \geqslant 2,$$

так что теорема 1 содержит основной результат из [70] применительно к липшицевой области и $p \geqslant 2$. Вероятно, что условие $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$ для общих p впервые появилось именно в работе [70].

Проведенные сопоставления показывают, что в нашей статье наибольшей новизной обладают теорема 1 и соотношения (31a), (56), (70) и (76), а основные известные результаты по $W^{1,p}$-корректности в липшицевых областях, кроме критерия З. Шена (см. (6)), по существу содержатся в теоремах 1, 3 и 5. У нас не получилось вывести, что $(6) \Leftrightarrow \Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$. В оставшейся части параграфа приведены перевод критерия Шена с языка ограниченности преобразования Рисса и доказательство простой импликации $(6) \Rightarrow \Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$.

Мы знаем, что оператор $\Delta = \Delta_2 : W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ — изоморфизм. Оператор $(-\Delta_2)^{-1}\big|_{L^2(\Omega)}$ компактен, самосопряжен и положителен в $L^2(\Omega)$, а потому по теореме Гильберта–Шмидта обладает ортонормированным базисом $(\phi_k)_{k=1}^\infty$ из собственных векторов, $-\Delta\phi_k = \lambda_k\phi_k$ ($\lambda_k > 0$). Положим

$$D(A) = \left\{ u = \sum_{k=1}^\infty a_k\phi_k \in L^2(\Omega)\colon\ \sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k^2 < \infty \right\},$$

$$Au = \sum_{k=1}^\infty \sqrt{\lambda_k} a_k \phi_k \quad \text{для} \quad u = \sum_{k=1}^\infty a_k\phi_k \in D(A).$$

Оператор A не зависит от выбора базиса $(\phi_k)_{k=1}^\infty$ и называется квадратным корнем из $-\Delta$.

Очевидная комплексификация операторов и функциональных пространств позволяет применить к A результаты из [51]. Замечание 7.3 из [51] гласит, что $D(A) = W_0^{1,2}(\Omega)$ и $A : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ — изоморфизм. Пусть $2 \leqslant p < \infty$. Теорема 7.5(b) из [51] гарантирует, что

$$A_p = A\big|_{W_0^{1,p}(\Omega)} : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \text{ — ограниченный линейный оператор.}$$

Лемма 11. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная липшицева область и $2 \leqslant p < \infty$. Тогда $W^{1,p}$-корректность равносильна тому, что A_p — изоморфизм.*

Условие (6) *из введения влечет включение $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$.*

Свойство изоморфизма оператора A_p означает, что оператор

$$\nabla A^{-1}\big|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to L^2(\Omega) \times \cdots \times L^2(\Omega)$$

на самом деле непрерывно действует в $L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)$. Тем самым первое утверждение леммы показывает, что равносильность между условием (6) и L^p-ограниченностью преобразования Рисса ∇A^{-1} в [75, теорема B] является также критерием $W^{1,p}$-корректности.

Доказательство. Положим $q = p/(p-1)$. По теореме 7.5(a,b) в [51]

$$(\exists C > 0)\ (\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)) \quad \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)}/C \leqslant \|Au\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)}.$$

Из плотности $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $W_0^{1,q}(\Omega)$ и плотности $L^2(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ вытекает, что A продолжается до изоморфизма $A_q : W_0^{1,q}(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Оператор

$$A_q' : L^p(\Omega) \to W^{-1,p}(\Omega)$$

— тоже изоморфизм, как показывает транспонирование тождеств $A_q A_q^{-1} = \mathrm{id}$ и $A_q^{-1} A_q = \mathrm{id}$. Легко проверяется, что $A_q' A_p = -\Delta_p$. Отсюда тогда и только тогда Δ_p — изоморфизм (т.е. имеем $W^{1,p}$-корректность), когда A_p — изоморфизм.

Пусть выполнено (6). Проверка включения $\Omega \in \mathcal{W}^{1,p}$ сводится к проверке аналогичного утверждения для функции U_ω теоремы 4, если воспользоваться рассуждениями последнего абзаца доказательства этой теоремы. Достаточно из оценки

$$\int_{B(a,\beta)\cap\Omega} |\nabla U_\omega|^p\,dx \leqslant \alpha\beta^{n-np/2} \left(\int_{B(a,\beta\gamma)\cap\Omega} |\nabla U_\omega|^2\,dx \right)^{p/2},$$

где $a \in \partial\Omega$ и $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > \omega(x')\}$, вывести оценку

$$\int_{B(a,\beta)\cap\Omega} (U_\omega/\rho)^p\,dx \leqslant c(n,p,\theta,\alpha,\gamma)\beta^{n-p} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U_\omega^p, \tag{84}$$

где $\rho(x) = x_n - \omega(x')$ и $|\omega(\xi) - \omega(\eta)| \leqslant \theta|\xi - \eta|$.

Допустим, что в Ω установлено неравенство $D_n U_\omega \geqslant 0$. Тогда лемма 4 в [19] показывает, что $U_\omega \leqslant c_1(n,\theta)\rho D_n U_\omega$. Кроме того, $|\nabla U_\omega| \leqslant c_2(n,\theta) U_\omega/\rho$ ввиду неравенства Гарнака и внутренних оценок. Поэтому

$$\int_{B(a,\beta)\cap\Omega} (U_\omega/\rho)^p\,dx \leqslant c_1^p c_2^p \alpha\beta^{n-np/2} \left(\int_{B(a,\beta\gamma)\cap\Omega} (U_\omega/\rho)^2\,dx \right)^{p/2}.$$

Отсюда с помощью $(71)\big|_{\sigma=1}$ и неравенства Гарнака получаем (84).

Аппроксимация функции ω функциями $\omega[N]$ из доказательства теоремы 4 показывает, что оценку $D_n U_\omega \geqslant 0$ достаточно доказать при $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Тогда $U_\omega \in C^\infty(\overline{\Omega})$, так что $D_n U_\omega\big|_{\partial\Omega} \geqslant 0$ ввиду $U_\omega > 0$ и $U_\omega\big|_{\partial\Omega} = 0$. По асимптотической формуле теоремы 1 из [72] имеем $\varliminf_{x\to\infty} D_n U_\omega(x) > 0$. Принцип минимума для гармонической функции $D_n U_\omega$ дает требуемое неравенство $D_n U_\omega \geqslant 0$. (О подобных неравенствах см. также [3, лемма 1], [14] и [16, § 4].) Лемма 11 доказана. $\square$

5. Примеры выполнения свойств $\pi_{ijk}(\Delta_p)$

Цель данного параграфа — сделать несколько менее таинственным случай нарушения $W^{1,p}$-корректности в задаче (1). Ограничиваясь значениями $p > 2$, мы показываем, что на секторах $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и криволинейном секторе $\Omega^* \subset \mathbb{R}^2$ реализуются все четыре возможности (9) свойств $\pi_{ijk}(\Delta_p)$ для оператора

$$\Delta = \Delta_p \colon W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p}(\Omega).$$

Частично эти результаты даны без доказательства в [57], а в [58] в сущности проверена незамкнутость $R(\Delta_p)$ для исключительного раствора сектора, что доставляет пример нефредгольмова оператора Δ_p.

Основную трудность составляет проверка замкнутости $R(\Delta_p)$ в $W^{-1,p}(\Omega)$ для неисключительного раствора сектора. Ввиду инъективности Δ_p и теоремы Банаха об обратном операторе замкнутость $R(\Delta_p)$ равносильна условию

$$(\exists C > 0)\ (\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C\|\Delta u\|_{W^{-1,p}(\Omega)}. \tag{85}$$

Мы затрудняемся вывести (85) из известных результатов о задачах в областях с коническими особенностями. Так, книга [53] посвящена гильбертову случаю, в статье [62] применяются весовые пространства Соболева с «однородными» нормами, а в [63] — пространства Соболева неотрицательной гладкости. Мы доказываем (85) в довольно элементарной лемме 12 на основе «спектральной» леммы 13 о гармонических функциях. При этом разбиение Ω на слои позаимствовано из работы [62], а применение ряда Фурье — из [58].

Лемма 12. *Для любых $p > 2$ и $0 < \Pi < 2\pi$ с ограничением $\Pi \neq \pi p/(p-2)$ неравенство* (85) *выполнено для сектора*

$$\Omega = \bigl\{(r\cos\phi, r\sin\phi)\colon 0 < r < 1\ \&\ 0 < \phi < \Pi\bigr\}.$$

Доказательство. Произвольную функцию $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ считаем непрерывной по теореме вложения Соболева. Запишем $f = \Delta u = D_1 f_1 + D_2 f_2$ согласно (19), так что $\|g\|_{L^p(\Omega)} \leqslant M\|\Delta u\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$ для $g = |f_1| + |f_2|$.

Для $0 < \chi < \chi_1 < \chi_2 < 1/2$ найдем $0 < \lambda < 1$ по лемме 13. Обозначим

$$U_k = \begin{cases} \bigl\{(r\cos\phi, r\sin\phi)\colon \lambda^{1/2} < r < 1\ \&\ 0 < \phi < \Pi\bigr\} & (k = 0),\\ \bigl\{(r\cos\phi, r\sin\phi)\colon \lambda^{k+1/2} < r < \lambda^{k-1/2}\ \&\ 0 < \phi < \Pi\bigr\} & (k \geqslant 1),\end{cases}$$

$$V_k = \begin{cases} \bigl\{(r\cos\phi, r\sin\phi)\colon \lambda < r < 1\ \&\ 0 < \phi < \Pi\bigr\} & (k = 0),\\ \bigl\{(r\cos\phi, r\sin\phi)\colon \lambda^{k+1} < r < \lambda^{k-1}\ \&\ 0 < \phi < \Pi\bigr\} & (k \geqslant 1).\end{cases}$$

Область V_k липшицева и потому регулярна, так что задача

$$v_k \in C^\infty(V_k) \cap C(\overline{V_k})\colon \quad \Delta v_k = 0 \quad \& \quad v_k\big|_{\partial V_k} = u\big|_{\partial V_k}$$

однозначно разрешима. В силу леммы 13 и масштабирования имеем

$$\int_{U_k} |\nabla v_k|^p\,dx \leqslant \chi \int_{V_k} |\nabla v_k|^p\,dx$$

при $k \geqslant 1$. Для получения этой же оценки при $k = 0$ применяем дополнительно принцип отражения Шварца относительно дуги $\{x \in \partial V_0\colon |x| = 1\}$.

Каждая область V_k удовлетворяет равномерному условию внешнего шара, поэтому для нее согласно § 4 справедлива $W^{1,p}$-корректность. Функция

$$w_k = u\big|_{V_k} - v_k \in C(\overline{V_k})$$

имеет нулевой след и лапласиан $f = \Delta u$. Функция в $W_0^{1,p}(V_k)$, отвечающая f по $W^{1,p}$-корректности, обладает этими же свойствами и потому совпадает с w_k по принципу максимума. Масштабирование показывает, что

$$\int_{V_k} |\nabla w_k|^p \, dx \leqslant c_1(p, V_0, V_1) \int_{V_k} g^p \, dx.$$

Ввиду условий $0 < \chi < \chi_1 < \chi_2 < 1/2$ и $\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx < \infty$ выводим

$$\begin{aligned}
\int_{U_k} |\nabla u|^p \, dx &\leqslant \frac{\chi_1}{\chi} \int_{U_k} |\nabla v_k|^p \, dx + c_2(p, \chi, \chi_1) \int_{U_k} |\nabla w_k|^p \, dx \\
&\leqslant \chi_1 \int_{V_k} |\nabla v_k|^p \, dx + c_1 c_2 \int_{V_k} g^p \, dx \\
&\leqslant \chi_2 \int_{V_k} |\nabla u|^p \, dx + c_3(p, V_0, V_1, \chi, \chi_1, \chi_2) \int_{V_k} g^p \, dx, \\
\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx &= \sum_{k=0}^\infty \int_{U_k} |\nabla u|^p \, dx \\
&\leqslant \chi_2 \sum_{k=0}^\infty \int_{V_k} |\nabla u|^p \, dx + c_3 \sum_{k=0}^\infty \int_{V_k} g^p \, dx \\
&= 2\chi_2 \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + 2c_3 \int_\Omega g^p \, dx, \\
\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p} &\leqslant \left(\frac{2c_3}{1 - 2\chi_2} \right)^{1/p} M \|\Delta u\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

С учетом неравенства Пуанкаре (16) получаем (85). □

Лемма 13. *Для любых $p > 2$, $0 < \Pi < 2\pi$ с ограничением $\Pi \neq \pi p/(p-2)$ и $0 < \chi < 1/2$ найдется $\lambda = \lambda(p, \Pi, \chi) \in (0, 1)$ со следующим свойством: если*

$$\begin{aligned}
U &= \big\{ (r\cos\phi, r\sin\phi) \colon \lambda^{1/2} < r < \Lambda^{1/2} \ \& \ 0 < \phi < \Pi \big\}, \\
V &= \big\{ (r\cos\phi, r\sin\phi) \colon \lambda < r < \Lambda \ \& \ 0 < \phi < \Pi \big\},
\end{aligned}$$

где $\Lambda = 1/\lambda$, то для любой функции $v \in C^\infty(V) \cap C(\overline{V})$, гармонической в V и равной нулю при $\phi = 0$ и при $\phi = \Pi$, выполнено неравенство

$$\int_U |\nabla v|^p \, dx \leqslant \chi \int_V |\nabla v|^p \, dx.$$

Доказательство. Рассмотрим любое $0 < \lambda = 1/\Lambda < 1$. Обозначим $\mu = \pi/\Pi$. Из принципа отражения Шварца вытекает, что

$$\begin{aligned}
v_r \in C^\infty[0, \Pi] \quad \text{для} \quad v_r(\phi) &= v(r\cos\phi, r\sin\phi) \quad (\lambda < r < \Lambda), \\
v_r(\phi) &= \sum_{k=1}^\infty f_k(r) \sin(k\mu\phi), \\
f_k(r) = \frac{2}{\Pi} \int_0^\Pi v_r(\phi) \sin(k\mu\phi) \, d\phi &= -\frac{2\Pi}{\pi^2 k^2} \int_0^\Pi v_r''(\phi) \sin(k\mu\phi) \, d\phi, \\
f_k \in C^\infty(\lambda, \Lambda) \quad \& \quad f_k(r) &= O(k^{-3}) \quad (k \to \infty).
\end{aligned}$$

В силу равенства Парсеваля и неравенств Виртингера и Гёльдера

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(r) = \frac{2}{\Pi}\int_0^{\Pi} v_r^2\,d\phi$$

$$\leqslant \frac{2\Pi}{\pi^2}\int_0^{\Pi} v_r'^2\,d\phi \leqslant c_1(p,\Pi)\left(\int_0^{\Pi}|v_r'|^p\,d\phi\right)^{2/p},$$

$$I = \int_\lambda^\Lambda \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(r) r^{-3+\frac{4}{p}}\,dr \leqslant c_1\int_\lambda^\Lambda r^{\frac{2-p}{p}}\cdot r^{2\frac{1-p}{p}}\left(\int_0^{\Pi}|v_r'|^p\,d\phi\right)^{2/p} dr$$

$$\leqslant c_1\left\{\int_\lambda^\Lambda \frac{dr}{r}\right\}^{(p-2)/p}\left(\int_\lambda^\Lambda\int_0^{\Pi}\frac{|v_r'|^p\,d\phi\,dr}{r^{p-1}}\right)^{2/p},$$

$$|\nabla v|_{(r\cos\phi,r\sin\phi)} = \sqrt{\left(\frac{\partial v(r\cos\phi,r\sin\phi)}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{v_r'(\phi)}{r}\right)^2}, \tag{86}$$

$$I \leqslant c_1\{2\ln\Lambda\}^{(p-2)/p}\|\nabla v\|^2_{L^p(V)}.$$

Обозначим

$$\alpha_k = k\mu - 1 + \frac{2}{p},$$

$$\beta_k = k\mu + 1 - \frac{2}{p}.$$

Тогда $\alpha_1 \neq 0$ ввиду $\Pi \neq \pi p/(p-2)$, $\alpha_k > 0$ для $k \geqslant 2$ ввиду $\mu > 1/2$ и $\beta_k > 0$ ввиду $p > 2$. Формула для лапласиана в полярных координатах и двукратное интегрирование по частям показывают, что

$$f_k''(r) + \frac{1}{r}f_k'(r) - \frac{(k\mu)^2}{r^2}f_k(r) = 0,$$

$$f_k(r) = g_k r^{k\mu} + h_k r^{-k\mu} \quad (g_k, h_k \in \mathbb{R}),$$

$$I = \int_\lambda^\Lambda \sum_{k=1}^{\infty}\bigl\{g_k^2 r^{2k\mu} + 2g_k h_k + h_k^2 r^{-2k\mu}\bigr\} r^{-3+\frac{4}{p}}\,dr$$

$$= \int_\lambda^\Lambda \sum_{k=1}^{\infty}\bigl\{g_k^2 r^{2\alpha_k-1} + 2g_k h_k r^{-3+\frac{4}{p}} + h_k^2 r^{-2\beta_k-1}\bigr\}dr$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{g_k^2\frac{\Lambda^{2|\alpha_k|}-\lambda^{2|\alpha_k|}}{2|\alpha_k|} + g_k h_k\frac{\Lambda^{2(1-\frac{2}{p})}-\lambda^{2(1-\frac{2}{p})}}{1-\frac{2}{p}} + h_k^2\frac{\Lambda^{2\beta_k}-\lambda^{2\beta_k}}{2\beta_k}\right\}.$$

С другой стороны, из неравенства Минковского и (86) выводим

$$\|\nabla v\|_{L^p(U)}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left\{|g_k|k\mu\left(\Pi\int_{\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\Lambda}} r^{\alpha_k p-1}\,dr\right)^{1/p} + |h_k|k\mu\left(\Pi\int_{\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\Lambda}} r^{-\beta_k p-1}\,dr\right)^{1/p}\right\}$$

$$\leqslant \underbrace{\mu\Pi^{1/p}p^{-1/p}}_{c_2(p,\Pi)}\sum_{k=1}^{\infty}\bigl\{|g_k|k|\alpha_k|^{-1/p}\Lambda^{|\alpha_k|/2} + |h_k|k\beta_k^{-1/p}\Lambda^{\beta_k/2}\bigr\}.$$

Сравним возникшие ряды. Положим

$$\sigma = \sigma(p, \Pi) = \begin{cases} 1/2 & \text{при} \quad \alpha_1 > 0, \\ \frac{\sqrt{|\alpha_1|\beta_1}}{1-\frac{2}{p}} & \text{при} \quad \alpha_1 < 0. \end{cases}$$

Тогда $0 < \sigma < 1$, поскольку $|\alpha_1| + \beta_1 = 2(1-\frac{2}{p})$ и $|\alpha_1| \neq \beta_1$ при $\alpha_1 < 0$. Если $\alpha_k > 0$, то $|\alpha_k| + \beta_k = 2k\mu > 2(1-\frac{2}{p})$, поэтому неравенство

$$\frac{\sqrt{|\alpha_k|\beta_k}}{1-\frac{2}{p}} \leqslant \sigma \Lambda^{|\alpha_k|+\beta_k-2(1-\frac{2}{p})}$$

выполнено для достаточно больших $\Lambda \geqslant \Lambda_1(p, \Pi) > 1$. Если же $\alpha_k < 0$, т.е. если $k = 1$ и $\alpha_1 < 0$, то оно обращается в равенство. Для $\tau = (1-\sigma)/2$ имеем

$$\lambda^{2|\alpha_k|} \leqslant \tau \Lambda^{2|\alpha_k|} \quad \& \quad \lambda^{2\beta_k} \leqslant \tau \Lambda^{2\beta_k} \quad \text{при} \quad \Lambda \geqslant \Lambda_2(p, \Pi) \geqslant \Lambda_1.$$

С участием неравенства $2xy \leqslant x^2 + y^2$ $(x, y \geqslant 0)$ получаем

$$\begin{aligned} -g_k h_k \frac{\Lambda^{2(1-\frac{2}{p})} - \lambda^{2(1-\frac{2}{p})}}{1-\frac{2}{p}} \leqslant |g_k h_k| \frac{\Lambda^{2(1-\frac{2}{p})}}{1-\frac{2}{p}} &\leqslant \sigma g_k^2 \frac{\Lambda^{2|\alpha_k|}}{2|\alpha_k|} + h_k^2 \frac{|\alpha_k| \Lambda^{4(1-\frac{2}{p})-2|\alpha_k|}}{2\sigma(1-\frac{2}{p})^2} \\ &\leqslant \sigma g_k^2 \frac{\Lambda^{2|\alpha_k|}}{2|\alpha_k|} + \sigma h_k^2 \frac{\Lambda^{2\beta_k}}{2\beta_k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ g_k^2 \frac{(1-\sigma)\Lambda^{2|\alpha_k|} - \lambda^{2|\alpha_k|}}{2|\alpha_k|} + h_k^2 \frac{(1-\sigma)\Lambda^{2\beta_k} - \lambda^{2\beta_k}}{2\beta_k} \right\} \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ g_k^2 \frac{\tau \Lambda^{2|\alpha_k|}}{2|\alpha_k|} + h_k^2 \frac{\tau \Lambda^{2\beta_k}}{2\beta_k} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда для $\gamma(p, \Pi) = |\alpha_1| \wedge \alpha_2 > 0$ по неравенству Коши

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^p(U)} &\leqslant c_2 \sqrt{2I/\tau} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left\{ |\alpha_k|^{1-\frac{2}{p}} \lambda^{|\alpha_k|} + \beta_k^{1-\frac{2}{p}} \lambda^{\beta_k} \right\}} \\ &\leqslant c_3(p, \Pi) \sqrt{I \lambda^{\gamma}} \leqslant c_1^{1/2} c_3 \{2 \ln \Lambda\}^{(p-2)/(2p)} \lambda^{\gamma/2} \|\nabla v\|_{L^p(V)}. \end{aligned}$$

Выбор достаточно малого $\lambda(p, \Pi, \chi) \leqslant 1/\Lambda_2$ доказывает лемму 13. □

Приступим к заключительному результату о свойствах $\pi_{ijk}(\Delta_p)$. Заметим, что применение к функции $(s, \omega) \mapsto s\{\Pi + \omega\} - \mathrm{tg}(\mu\omega)$ $(\mu \neq 0)$ около точки $(0, 0)$ теоремы о неявной функции дает $s_0 > 0$ и $\omega \in C^{\infty}[0, s_0]$ такие, что

$$\omega(0) = 0; \qquad (\forall s) \quad s\{\Pi + \omega(s)\} = \mathrm{tg}(\mu\omega(s)). \tag{87}$$

Теорема 6. *Для $p > 2$ и $0 < \Pi < 2\pi$ рассмотрим сектор*

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, x_2) = (r\cos\phi, r\sin\phi) \colon 0 < r < 1 \ \& \ 0 < \phi < \Pi \right\}.$$

Тогда при $\Pi < \pi p/(p-2)$, $\Pi > \pi p/(p-2)$ и $\Pi = \pi p/(p-2)$ оператор Δ_p обладает соответственно свойствами $\pi_{000}(\Delta_p)$, $\pi_{010}(\Delta_p)$ и $\pi_{001}(\Delta_p)$ из введения.

Пусть $p > 4$, $\Pi = \pi p/(p-2)$, $\mu = \pi/\Pi$ и $s_0 < (2\pi - \Pi)/(6\pi)$ в (87). Тогда корректно определение

$$\Omega^* = \left\{ (r\cos\phi, r\sin\phi) \colon 0 < r < r_0 = e^{-1/s_0} \ \& \ 0 < \phi < \Pi + \omega(1/\ln(1/r)) \right\}$$

ограниченной липшицевой области и для нее верно свойство $\pi_{011}(\Delta_p)$.

Доказательство. В любом из случаев $N(\Delta_p) \subset N(\Delta_2) = \{0\}$ ввиду $p > 2$. Для функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ со свойствами $\varphi\big|_{(-\infty,1/2]} \equiv 0$ и $\varphi\big|_{[1,\infty)} \equiv 1$ положим

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(|x|/\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1 \ \& \ x \in \Omega \quad (\text{или } x \in \Omega^*).$$

1) Пусть $\Pi < \pi p/(p-2)$, так что $\mu = \pi/\Pi > (p-2)/p$. Функция

$$x = (r\cos\phi, r\sin\phi) \mapsto u_1(x) = r^\mu \sin(\mu\phi)$$

положительна в Ω, имеет нулевой след на частях $\phi = 0$ и $\phi = \Pi$ границы $\partial\Omega$ и гармонична, что проверяется, например, через запись лапласиана в полярных координатах. Аналогично, положительная гармоническая в Ω функция

$$x = (r\cos\phi, r\sin\phi) \mapsto u_2(x) = \{r^{-\mu} - r^\mu\}\sin(\mu\phi)$$

имеет нулевой след на $\partial\Omega \setminus \{0\}$. Граничный принцип Гарнака (23) показывает, что $U/\varrho \in L^p(\Omega)$ для любой $U \in U_\Omega$. Как в доказательстве теоремы 1, отсюда вытекает, что $f = \Delta(-\mathbf{G}f) \in R(\Delta_p)$ для любого $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Ввиду леммы 3 получаем плотность $R(\Delta_p)$ в $W^{-1,p}(\Omega)$. Замкнутость же $R(\Delta_p)$ установлена в лемме 12. Свойство $\pi_{000}(\Delta_p)$ доказано.

2) Пусть $\Pi > \pi p/(p-2)$, так что $-\mu > (q-2)/q$ для $q = p/(p-1)$. Отсюда $u_2 \in W^{1,q}(\Omega)$ и $\varphi_\varepsilon u_2 \to u_2$ в $W^{1,q}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Функции $\varphi_\varepsilon u_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ имеют нулевой след на $\partial\Omega$, поэтому $u_2 \in W_0^{1,q}(\Omega)$ и $u_2 \in N(\Delta_q)$. Значит, $R(\Delta_p)$ не плотен в $W^{-1,p}(\Omega)$. С учетом леммы 12 получаем свойство $\pi_{010}(\Delta_p)$.

Отметим, что факт $u_2 \in N(\Delta_q)$ приведен в конце работы [9]. Это доставляет контрпример к ошибочной «теореме единственности гармонических функций» из предложения 5.17 в [51].

3) Пусть $p > 4$ и $\Pi = \pi p/(p-2)$. Возьмем $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Функции

$$u = -\mathbf{G}f \quad \& \quad v_\varepsilon(x) = (1 - \varphi_\varepsilon(x))u_1(x) + \varphi_\varepsilon(x)u_1(x)\frac{\ln|x|}{\ln\varepsilon}$$

непрерывны в $\overline{\Omega}$, имеют нулевой след на $\partial\Omega$ и гармоничны вблизи точки $x = 0$. Конформное отображение $z = re^{i\phi} \mapsto z^\mu$, которое переводит Ω на полукруг, и внутренние оценки производных показывают, что

$$\begin{aligned}
(\exists\alpha \in \mathbb{R}) \qquad u(x) - \alpha u_1(x) &= O(|x|^{2\mu-1}\varrho(x)) \quad \text{при} \quad x \to 0,\\
u(x) - \alpha v_\varepsilon(x) &= O(|x|^{2\mu-1}\varrho(x)) \quad \text{при} \quad x \to 0,\\
|\nabla(u - \alpha v_\varepsilon)(x)| &= O(|x|^{2\mu-1}) \qquad\quad \text{при} \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Отсюда $u - \alpha v_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и $\Delta(u - \alpha v_\varepsilon) = f - \alpha\Delta v_\varepsilon \in R(\Delta_p)$. В силу простого вычисления и неравенства (18) имеем $\Delta v_\varepsilon(x) = 0$ при $|x| \leqslant \varepsilon/2$,

$$|\Delta v_\varepsilon(x)| \leqslant c_1(\varphi, p)|\ln\varepsilon|^{-1}|x|^{\mu-2} \quad \text{при} \quad |x| \geqslant \varepsilon/2,$$

$$\frac{\|\Delta v_\varepsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega)}}{\alpha_H(q)} \leqslant \|\varrho\Delta v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leqslant c_1|\ln\varepsilon|^{-1}\left(\Pi\int_{\varepsilon/2}^1 r^{(\mu-1)p+1}\,dr\right)^{1/p}.$$

Однако $(\mu-1)p + 1 = -1$, поэтому $\|\alpha\Delta v_\varepsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega)} = O(|\ln\varepsilon|^{-1/q})$ при $\varepsilon \to 0$. С учетом плотности $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{-1,p}(\Omega)$ получаем и плотность $R(\Delta_p)$.

Для $0 < \varepsilon < 1/2$ имеем $w_\varepsilon = \varphi_\varepsilon\{1 - \varphi_1\}u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, причем

$$w_\varepsilon(x) = u_1(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1/2,$$

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \geqslant \mu \left(\Pi \int_\varepsilon^{1/2} r^{(\mu-1)p+1}\, dr \right)^{1/p} = \mu \Pi^{1/p} \left\{ \ln \frac{1}{2\varepsilon} \right\}^{1/p},$$

$$\frac{\|\Delta w_\varepsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega)}}{\alpha_H(q)} \leqslant \|\varrho \Delta w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \left(c(\varphi,p) \int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} \frac{dr}{r} + c(\varphi,p) \right)^{1/p} = c(\varphi,p).$$

Значит, (85) ложно. Незамкнутость $R(\Delta_p)$ и свойство $\pi_{001}(\Delta_p)$ доказаны.

4) Пусть $p > 4$, $\Pi = \pi p/(p-2)$, $\mu = \pi/\Pi$ и $s_0 < (2\pi - \Pi)/(6\pi)$ в (87). Тогда $\pi < \Pi < 2\pi$, $s_0 < 1/6 < \mu/3$ и $\omega \geqslant 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} (\forall s \in [0, s_0]) \qquad & \mu\omega(s) \leqslant \operatorname{tg}(\mu\omega(s)) \leqslant s\Pi + (\mu/3)\omega(s) \\ \& \quad & \omega(s) \leqslant 3\Pi^2 s/(2\pi) \leqslant 6\pi s < 2\pi - \Pi. \end{aligned}$$

Значит, определение области Ω^* корректно. При этом $\partial\Omega^*$ состоит из кривых $\{\phi = 0\colon 0 \leqslant r \leqslant r_0\}$, $\{r = r_0\colon 0 \leqslant \phi \leqslant \Pi + \omega(s_0)\}$ и

$$\{\phi = \Pi + \omega(1/\ln(1/r))\colon 0 \leqslant r \leqslant r_0\}$$

с непрерывной касательной, пересекающихся в трех точках под ненулевыми углами. Поэтому Ω^* липшицева.

Построим функцию из $N(\Delta_q) \setminus \{0\}$, аналогичную функции u_2. Положим

$$\begin{aligned} u(x) &= (1 - \varphi_{r_0}(x)) \operatorname{Im} \frac{-1}{z^\mu \ln(1/z)} \\ &= (1 - \varphi_{r_0}(x)) r^{-\mu} \operatorname{Im} \frac{e^{i\mu\phi}}{\ln(1/r) + i\phi} \\ &= (1 - \varphi_{r_0}(x)) r^{-\mu} \frac{\ln(1/r)\sin(\mu\phi) - \phi\cos(\mu\phi)}{\ln^2(1/r) + \phi^2}, \end{aligned}$$

где $x = (r\cos\phi, r\sin\phi) \in \Omega^*$ и $z = re^{i\phi}$. Легко проверяется, что

$$u \in W^{1,q}(\Omega^*) \setminus W^{1,2}(\Omega^*) \quad \& \quad \Delta u \in C^\infty(\overline{\Omega^*}).$$

Функция u имеет нулевой след на $\partial\Omega^* \setminus \{0\}$ по (87) и замене $s = \frac{1}{\ln(1/r)}$. Теперь включение $u \in W_0^{1,q}(\Omega^*)$ устанавливается так же, как включение $u_2 \in W_0^{1,q}(\Omega)$ на шаге 2. Ввиду $W^{1,2}$-корректности найдется функция $v \in W_0^{1,2}(\Omega^*)$ такая, что $\Delta v = \Delta u$. Она не равна u ввиду $u \notin W^{1,2}(\Omega^*)$. Итак, $u - v \in N(\Delta_q) \setminus \{0\}$ и линеал $R(\Delta_p)$ не плотен в $W^{-1,p}(\Omega^*)$.

Для $0 < \varepsilon < r_0/4$ обозначим

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x) &= \varphi_\varepsilon(x)\{1 - \varphi_{r_0}(x)\} \operatorname{Im}\{z^\mu \ln(1/z)\} \\ &= \varphi_\varepsilon(x)\{1 - \varphi_{r_0}(x)\} r^\mu \{\ln(1/r)\sin(\mu\phi) - \phi\cos(\mu\phi)\}. \end{aligned}$$

Как на шаге 3, имеем $w_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$,

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega^*)} \geqslant c(p) \left(\int_\varepsilon^{r_0/2} \frac{\ln^p(1/r)\, dr}{r} \right)^{1/p} \geqslant c(p, r_0) \left\{ \ln \frac{1}{\varepsilon} \right\}^{(p+1)/p},$$

$$\frac{\|\Delta w_\varepsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega^*)}}{\alpha_H(q)} \leqslant \|\varrho \Delta w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega^*)} \leqslant \left(c_2 \int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} \frac{\ln^p(1/r)\, dr}{r} + c_3 \right)^{1/p} \leqslant c_4 \ln \frac{1}{\varepsilon},$$

где $c_i = c_i(\varphi, p, r_0)$. Тем самым условие (85) нарушается. Незамкнутость $R(\Delta_p)$, свойство $\pi_{011}(\Delta_p)$ и теорема 6 доказаны. □

References

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975. Zbl 0314.46030

[2] M.S. Agranovich, *Sobolev Spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains*, Springer, Heidelberg, 2015. (Russian original: 2013) Zbl 1322.46002

[3] H. Aikawa, *Integrability of superharmonic functions and subharmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **120**:1 (1994), 109–117. Zbl 0792.31002

[4] H. Aikawa, *Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain*, J. Math. Soc. Japan, **53**:1 (2001), 119–145. Zbl 0976.31002

[5] H. Aikawa, *Hölder continuity of the Dirichlet solution for a general domain*, Bull. London Math. Soc., **34**:6 (2002), 691–702. Zbl 1036.31003

[6] H. Aikawa, *Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate*, Math. Scand., **103**:1 (2008), 61–76. Zbl 1163.35305

[7] H. Aikawa, *Potential analysis on nonsmooth domains — Martin boundary and boundary Harnack principle*, A. Boivin (ed.) et al., Complex analysis and potential theory, CRM Proc. Lect. Notes, **55** (2012), 235–253. Zbl 1316.31014

[8] Yu.A. Alkhutov, *L_p-estimates of the solution of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations*, Sb. Math., **189**:1 (1998), 3–20. Zbl 0912.35054

[9] Yu.A. Alkhutov, V.A. Kondrat'ev, *Solvability of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations in a convex region*, Differ. Equations, **28**:5 (1992), 650–662. Zbl 0834.35038

[10] A. Ancona, *Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien*, Ann. Inst. Fourier, **28**:4 (1978), 169–213. Zbl 0377.31001

[11] A. Ancona, *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in $\mathbb{R}^n$*, J. London Math. Soc. (2), **34**:2 (1986), 274–290. Zbl 0629.31002

[12] P. Auscher, M. Qafsaoui, *Observations on $W^{1,p}$ estimates for divergence elliptic equations with VMO coefficients*, Boll. Unione Mat. Ital. (8), **5-B**:2 (2002), 487–509. Zbl 1173.35419

[13] C. Bandle, R. Benguria, *The Brézis–Nirenberg problem on $\mathbb{S}^3$*, J. Diff. Equations, **178**:1 (2002), 264–279. Zbl 0995.35027

[14] H. Berestycki, L. Caffarelli, L. Nirenberg, *Monotonicity for elliptic equations in an unbounded Lipschitz domain*, Comm. Pure Appl. Math., **50**:11 (1997), 1089–1112. Zbl 0906.35035

[15] K. Bogdan, *Sharp estimates for the Green function in Lipschitz domains*, J. Math. Anal. Appl., **243** (2000), 326–337. Zbl 0971.31005

[16] K. Bogdan, T. Kulczycki, A. Nowak, *Gradient estimates for harmonic and q-harmonic functions of symmetric stable processes*, Ill. J. Math., **46**:2 (2002), 541–556. Zbl 1037.31007

[17] T.V. Burchuladze, R.V. Rukhadze, *On Green's tensors in elasticity theory*, Differ. Uravn., **10**:10 (1974), 1849–1865. (Russian) Zbl 0297.73021

[18] S. Byun, L. Wang, *Elliptic equations with BMO coefficients in Reifenberg domains*, Comm. Pure Appl. Math., **57**:10 (2004), 1283–1310. Zbl 1112.35053

[19] L.A. Caffarelli, *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. Part I: Lipschitz free boundaries are $C^{1,\alpha}$*, Rev. Mat. Iber., **3**:2 (1987), 139–162. Zbl 0676.35085

[20] L. Caffarelli, E. Fabes, S. Mortola, S. Salsa, *Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form*, Indiana Univ. Math. J., **30**:4 (1981), 621–640. Zbl 0512.35038

[21] T. Carleman, *Sur une inégalité différentielle dans la théorie des fonctions analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, **196** (1933), 995–997. Zbl 0006.31603

[22] L. Carleson, *On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables*, Ark. Mat., **4**:5 (1962), 393–399. Zbl 0107.08402

[23] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Orlando, 1984. Zbl 0551.53001

[24] B.E.J. Dahlberg, *Estimates of harmonic measure*, Arch. Ration. Mech. Anal., **65** (1977), 273–288. Zbl 0406.28009

[25] B.E.J. Dahlberg, *L^q-estimates for Green potentials in Lipschitz domains*, Math. Scand., **44** (1979), 149–170. Zbl 0418.31003

[26] A. Dekkers, A. Rozanova-Pierrat, *Dirichlet boundary value problems for linear and nonlinear wave equations on arbitrary and fractal domains*, preprint (2020), 41p.

[27] B. Davey, J. Hill, S. Mayboroda, *Fundamental matrices and Green matrices for non-homogeneous elliptic systems*, Publ. Mat. Barc., **62**:2 (2018), 537–614. Zbl 1400.35098

[28] G. Dolzmann, S. Müller, *Estimates for Green's matrices of elliptic systems by L^p theory*, Manuscr. Math., **88** (1995), 261–273. Zbl 0846.35040

[29] H. Dong, S. Kim, *Green's matrices of second order elliptic systems with measurable coefficients in two dimensional domains*, Trans. Amer. Math. Soc., **361**:6 (2009), 3303–3323. Zbl 1173.35050

[30] A. Elbert, M.E. Muldoon, *Inequalities and monotonicity properties for zeros of Hermite functions*, Proc. Royal Soc. Edinb. Sec. A., **129**:1 (1999), 57–75. Zbl 0944.33006

[31] E. Fabes, O. Mendez, M. Mitrea, *Boundary layers on Sobolev-Besov spaces and Poisson's equation for the Laplacian in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **159**:2 (1998), 323–368. Zbl 0930.35045

[32] G.M. Fichtenholz, *Differential and Integral Calculus. Vol. 2*, OGIZ, Moscow, 1948. (Russian) Zbl 0033.10703

[33] S. Friedland, W.K. Hayman, *Eigenvalue inequalities for the Dirichlet problem on spheres and the growth of subharmonic functions*, Comment. Math. Helv., **51** (1976), 133–161. Zbl 0339.31003

[34] S.J. Fromm, *Potential space estimates for Green potentials in convex domains*, Proc. Amer. Math. Soc., **119**:1 (1993), 225–233. Zbl 0789.35047

[35] F.W. Gehring, *The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping*, Acta Math., **130** (1973), 265–277. Zbl 0258.30021

[36] M. Giaquinta, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1983. Zbl 0516.49003

[37] K. Gröger, *A $W^{1,p}$-estimate for solutions to mixed boundary value problems for second order elliptic differential equations*, Math. Ann., **283**:4 (1989), 679–687. Zbl 0646.35024

[38] M. Grüter, K.-O. Widman, *The Green function for uniformly elliptic equations*, Manuscr. Math., **37**:3 (1982), 303–342. Zbl 0485.35031

[39] K. Haliste, *Estimates of harmonic measures*, Ark. Mat., **6**:1 (1965), 1–31. Zbl 0178.13801

[40] W.K. Hayman, P.B. Kennedy, *Subharmonic Functions. Vol. 1*, Academic Press, London, 1976. (Russian translation: 1980) Zbl 0419.31001

[41] W.K. Hayman, *Subharmonic Functions. Vol. 2*, Academic Press, London etc., 1989. Zbl 0699.31001

[42] W.K. Hayman, E.L. Ortiz, *An upper bound for the largest zero of Hermite's function with applications to subharmonic functions*, Proc. Royal Soc. Edinb. Sec. A., **75** (1976), 183–197. Zbl 0328.33011

[43] L.L. Helms, *Introduction to Potential Theory*, Wiley, New York, 1969. Zbl 0188.17203

[44] S. Hofmann, M. Mitrea, M. Taylor, *Singular integrals and elliptic boundary problems on regular Semmes–Kenig–Toro domains*, Int. Math. Res. Not., **2010**:14 (2010), 2567–2865. Zbl 1221.31010

[45] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer, Berlin, 1983. (Russian translation: 1986) Zbl 0521.35001

[46] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. II: Differential Operators with Constant Coefficients*, Springer, Berlin, 1983. (Russian translation: 1986) Zbl 0521.35002

[47] A. Huber, *Über Wachstumseigenschaften gewisser Klassen von subharmonischen Funktionen*, Comment. Math. Helv., **26**:2 (1952), 81–116. Zbl 0049.05901

[48] R.A. Hunt, R.L. Wheeden, *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Trans. Amer. Math. Soc., **147**:2 (1970), 507–527. Zbl 0193.39601

[49] T. Iwaniec, *The Gehring lemma*, P. Duren (ed.) et al., Quasiconformal mappings and analysis, Springer, New York (1998), 181–204. Zbl 0888.30017

[50] D.S. Jerison, C.E. Kenig, *An identity with applications to harmonic measure*, Bull. Amer. Math. Soc. New Ser., **2**:3 (1980), 447–451. Zbl 0436.31002

[51] D. Jerison, C.E. Kenig, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **130**:1 (1995), 161–219. Zbl 0832.35034

[52] N.J. Kalton, I.E. Verbitsky, *Nonlinear equations and weighted norm inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc., **351**:9 (1999), 3441–3497. Zbl 0948.35044

[53] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, J. Rossmann, *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*, AMS, Providence, 1997. Zbl 0947.35004

[54] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, J. Rossmann, *Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations*, AMS, Providence, 2001. Zbl 0965.35003

[55] G.A. Kuznetsov, *On the number of solutions for the biharmonic equation in domains with angular points in Sobolev spaces*, Vestn. ChelGU, **3** (1996), 69–77. (Russian)

[56] N.S. Landkof, *Foundations of Modern Potential Theory*, Springer, Berlin, 1972. (Russian original: 1966) Zbl 0253.31001

[57] V.N. Maslennikova, M.E. Bogovskii, *Elliptic boundary value problems in unbounded domains with noncompact and nonsmooth boundaries*, Rend. Semin. Mat. Fis. Milano, **56** (1986), 125–138. Zbl 0659.35030

[58] V.N. Maslennikova, M.E. Bogovskii, *On non-closure of range of values of elliptic operator for a plane angle*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sc. Mat., **39** (1993), 65–75. Zbl 0835.35026

[59] V.G. Maz'ya, *Index of the closure of the operator of the Dirichlet problem in a domain with an irregular boundary*, J. Sov. Math., **10** (1978), 886–908. (Russian original: 1975) Zbl 0406.35015

[60] V. Maz'ya, M. Mitrea, T. Shaposhnikova, *The Dirichlet problem in Lipschitz domains for higher order elliptic systems with rough coefficients*, J. Anal. Math., **110** (2010), 167–239. Zbl 1199.35080

[61] V.G. Maz'ya, S.A. Nazarov, B.A. Plamenevskii, *On singularities of solutions of the Dirichlet problem in the exterior of a thin cone*, Mat. Sb. New Ser., **122(164)**:4(12) (1983), 435–457. (Russian) Zbl 0543.35026

[62] V.G. Maz'ya, B.A. Plamenevskii, *Estimates in L_p and in Hölder classes and the Miranda–Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **123** (1984), 1–56. (Russian original: 1978) Zbl 0554.35035

[63] V.G. Maz'ya, B.A. Plamenevskii, *Weighted spaces with nonhomogeneous norms and boundary value problems in domains with conical points*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **123** (1984), 89–107. (Russian original: 1978) Zbl 0554.35037

[64] V.G. Maz'ya, T.O. Shaposhnikova, *Theory of Multipliers in Spaces of Differentiable Functions*, Pitman, Boston, 1985. (Russian translation: 1986) Zbl 0645.46031

[65] V.G. Maz'ya, T.O. Shaposhnikova, *Theory of Sobolev Multipliers. With Applications to Differential and Integral Operators*, Springer, Berlin, 2009. Zbl 1157.46001

[66] K. Miller, *Extremal barriers on cones with Phragmén–Lindelöf theorems and other applications*, Ann. Mat. Pura Appl. IV Ser., **90** (1971), 297–329. Zbl 0231.35004

[67] D. Mitrea, I. Mitrea, *On the regularity of Green functions in Lipschitz domains*, Comm. Partial Diff. Equations, **36** (2011), 304–327. Zbl 1223.35124

[68] D. Mitrea, M. Mitrea, L. Yan, *Boundary value problems for the Laplacian in convex and semiconvex domains*, J. Funct. Anal., **258** (2010), 2507–2585. Zbl 1201.35095

[69] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Academia, Prague, 1967. (English translation: 2012) Zbl 1225.35003

[70] K. Nyström, *Integrability of Green potentials in fractal domains*, Ark. Mat., **34**:2 (1996), 335–381. Zbl 0860.31002

[71] A.I. Parfenov, *Weighted a priori estimate in straightenable domains of local Lyapunov-Dini type*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9** (2012), 65–150. (Russian) Zbl 1330.35090

[72] A.I. Parfenov, *Error bound for a generalized M.A. Lavrentiev's formula via the norm of a fractional Sobolev space*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 335–377. (Russian) Zbl 1330.35070

[73] A.I. Parfenov, *Discrete Hölder estimates for a certain kind of parametrix. II*, Ufa Math. J., **9**:2 (2017), 62–91.

[74] P.J. Rippon, *A generalisation of Widman's theorem on comparison domains for harmonic measures*, Ark. Mat., **17** (1979), 39–50. Zbl 0422.31004

[75] Z. Shen, *Bounds of Riesz transforms on L^p spaces for second order elliptic operators*, Ann. Inst. Fourier, **55**:1 (2005), 173–197. Zbl 1068.47058

[76] Z. Shen, *Weighted L^2 estimates for elliptic homogenization in Lipschitz domains*, preprint (2020), 26p.

[77] C.G. Simader, *On Dirichlet's Boundary Value Problem. An L^p-Theory Based on a Generalization of Gårding's Inequality*, Springer, Berlin, 1972. Zbl 0242.35027

[78] A.A. Solov'ev, *On the index of an operator for the Dirichlet problem in a domain with either piecewise-smooth or Radon boundaries*, Sov. Math., **35**:11 (1991), 61–66. Zbl 0783.35012

[79] E. Sperner jr., *Zur Symmetrisierung von Funktionen auf Sphären*, Math. Z., **134** (1973), 317–327. Zbl 0283.26015

[80] T. Sugawa, *Various domain constants related to uniform perfectness*, Complex Variables Th. Appl., **36**:4 (1998), 311–345. Zbl 0915.30039

[81] T. Sugawa, *On boundary regularity of the Dirichlet problem for plane domains*, preprint (1999), 37p. `http://www.cajpn.org/pp99/9904.pdf`

[82] G. Sweers, *Positivity for a strongly coupled elliptic system by Green function estimates*, J. Geom. Anal., **4**:1 (1994), 121–142. Zbl 0792.35048

[83] J.H. Wells, L.R. Williams, *Embeddings and Extensions in Analysis*, Springer, Berlin, 1975. Zbl 0324.46034

[84] I. Wood, *Maximal L^p-regularity for the Laplacian on Lipschitz domains*, Math. Z., **255** (2007), 855–875. Zbl 1122.35028

[85] J.-M.G. Wu, *Comparison of kernel functions, boundary Harnack principle and relative Fatou theorem on Lipschitz domains*, Ann. Inst. Fourier, **28**:4 (1978), 147–167. Zbl 0368.31006

[86] K. Yosida, *Functional Analysis. 6th ed.*, Springer, Berlin, 1980. Zbl 0435.46002

Anton Igorevich Parfenov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: `parfenov@math.nsc.ru`