S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 2122–2130 (2020) УДК 517.92

DOI 10.33048/semi.2020.17.142 MSC 34C07, 34D30

О ТИПИЧНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОКРУЖНОСТИ

В.Ш. РОЙТЕНБЕРГ

Abstract. The paper considers second-order differential equations whose right-hand sides are polynomials with respect to the first derivative with periodic continuously differentiable coefficients and corresponding dynamical systems on a cylindrical phase space. The leading coefficient of the polynomial is assumed to be unequal to zero. The concept of a rough equation is introduced – an equation for which the topological structure of the phase portrait does not change when pass to an equation with "close"coefficients. It is proved that the equations for which all singular points and closed trajectories are hyperbolic and there are no trajectories going from saddle to saddle are rough and form an open everywhere dense set in the space of all the considered equations. In addition, we prove that for any natural numbers N and n>1, there is a rough equation whose right side is a polynomial of degree n, and the number of limit cycles that are not homotopy to zero on the phase cylinder is greater than N.

Keywords: differential equation of second order, polynomial right-hand side, cylindrical phase space, rough equation, limit cycle.

1. Введение

Будем рассматривать дифференциальные уравнения второго порядка

$$a : \ddot{x} = a(x, \dot{x}), \tag{1}$$

с правой частью

$$a(x, \dot{x}) = a_n(x)\dot{x}^n + \cdots + a_1(x)\dot{x} + a_0(x),$$

Roitenberg, V.Sh., On generic polinomial differential equations of second order on the circle.

Поступила 10 июня 2020 г., опубликована 22 декабря 2020 г.

являющейся полиномом степени $\le n$ относительно $\dot{x}$ с ω-периодическими непрерывно дифференцируемыми коэффициентами $a_k(x), x \in \mathbb{R}$. Такого вида уравнения возникают в ряде технических задач (см, например, [1, 2]) Можно считать, что уравнение (1) задано на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$. Обозначим A^n_ω множество таких уравнений. Пусть $C^1(\mathbb{S}^1)$ – банахово пространство непрерывно дифференцируемых ω-периодических функций с C^1-нормой

$$\|g\|_{C^1} = \max_{x\in\mathbb{R}} \max\{|g(x)|, |g'(x)\}.$$

Уравнение (1) естественно отождествляется с упорядоченным набором его коэффициентов $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, а множество A^n_ω с прямой суммой

$$\underbrace{C^1(\mathbb{S}^1) \oplus \dots \oplus C^1(\mathbb{S}^1)}_{n+1}$$

с нормой

$$\|a\| = \max_{i=0,1,\dots,n} \|a_i\|_{C^1}.$$

Пространство A^k_ω при $k < n$ можно рассматривать как подпространство A^n_ω.

Обозначим через $A^{n,+}_\omega$ открытое множество в A^n_ω, состоящее из уравнений, для которых $\forall x \in \mathbb{R}$ имеем $a_n(x) \ne 0$.

Уравнение $a \in A^n_\omega$ определяет на фазовом пространстве $\Phi = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ векторное поле $y\partial/\partial x + a(x, y)\partial/\partial y$, которое будем обозначать $\vec{a}$. Его траектории будем называть траекториями уравнения a (в фазовом пространстве Φ).

Для некоторых конкретных уравнений с правыми частями, являющимися полиномами первой и второй степени, фазовые портреты исследованы в [1, 2]. В статьях [3, 4, 5] фазовые портреты уравнений из A^k_ω, $k = 1, 2$, рассматривались на фазовом пространстве $\bar{\Phi} = \mathbb{S}^1 \times \bar{\mathbb{R}}$, где $\bar{\mathbb{R}}$ – двухточечная компактификация числовой прямой $\mathbb{R}$. В частности, было исследовано рождение предельных циклов из «бесконечности».

Принято считать, что индивидуальное уравнение, описывающее реальный процесс, должно быть «грубым» – топологическая структура его фазового портрета не должна меняться при «малых» изменениях его коэффициентов [12]. В разделе 2 настоящей работы мы даем точное определение грубости в пространстве $A^{n,+}_\omega$ и выделяем в $A^{n,+}_\omega$ открытое и всюду плотное множество Σ, состоящее из грубых уравнений. Таким образом, грубые уравнения в $A^{n,+}_\omega$ типичны.

Имеется ряд работ, например [6, 7, 8, 9, 10], где для полиномиальных уравнений и полиномиальных векторных полей разного рода даются оценки числа замкнутых траекторий. В разделе 3 показано, что при фиксированном n грубое уравнение из $A^{n,+}_\omega$ может иметь сколь угодно предельных циклов, как гомотопных нулю, так и негомотопных нулю на цилиндре Φ.

2. Грубые уравнения

Определение 1. *Уравнения a и $\tilde{a}$ из $A^{n,+}_\omega$ топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h : \Phi \to \Phi$, переводящий ориентированные траектории уравнения $\tilde{a}$ в ориентированные траектории уравнения a.*

Определение 2. *Уравнение $a \in A^{n,+}_\omega$ называется грубым, если существует такая его окрестность $U(a)$, что a и любое уравнение $\tilde{a} \in U(a)$ топологически эквивалентны.*

Обозначим $\Sigma = \Sigma A^{n,+}_{\omega}$ множество уравнений из $A^{n,+}_{\omega}$, у которого все особые точки и замкнутые траектории гиперболические и нет траекторий, идущих из седла в седло. (По поводу использованной терминологии см. [13]).

Теорема 1. *Множество $\Sigma A^{n,+}_{\omega}$ открыто и всюду плотно в $A^{n,+}_{\omega}$. Уравнения из $\Sigma A^{n,+}_{\omega}$ грубые.*

Доказательство. Докажем, что Σ – открытое множество, а уравнения из Σ грубые.

Пусть уравнение $a \in \Sigma$. Так как $\forall x \in \mathbb{R}\ a_n(x) \neq 0$, то существуют такие числа $\varepsilon_0 > 0$ и $R > 0$, что

$$(2) \qquad a^*(x,y) \neq 0 \text{ при } a^* \in A^{n,+}_{\omega},\ \|a^* - a\| < \varepsilon_0,\ x \in \mathbb{R},\ |y| \geq R.$$

Тогда векторное поле $\vec{a}^*$ трансверсально окружностям $\mathbb{S}^1 \times \{\rho\}$, $\rho \geq R$.

Пусть $\mathfrak{X}^1$ – банахово пространство C^1-векторных полей $v = v_1\partial/\partial x + v_2\partial/\partial y$ на цилиндре $\Phi_R = \mathbb{S}^1 \times [-R, R]$ с нормой

$$\|v\|_1 = \max_{(x,y)\in\Phi_R} \max_{k=1,2} \{|v_k(x,y)|, |\partial v_k(x,y)/\partial x|, |\partial v_k(x,y)/\partial y|\}.$$

Множество $A^{n,+}_{\omega}$ можно рассматривать и как подмножество в $\mathfrak{X}^1$. Соответствующее уравнению $a \in \Sigma$ векторное поле $\vec{a}$, рассматриваемое на Φ_R, является грубым в $\mathfrak{X}^1$ [12, 13]. Поэтому найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, что для уравнения $a^* \in A^{n,+}_{\omega}, \|a^* - a\|_1 < \varepsilon_1$, соответствующее векторное поле $\vec{a}^*|_{\Phi_R}$ трансверсально $\partial\Phi_R$, имеет только гиперболические особые точки и замкнутые траектории, не имеет траекторий, идущих из седла в седло, и существует гомеоморфизм $h_R : \Phi_R \to \Phi_R,\ h_R(\mathbb{S}^1 \times \{\pm R\}) = \mathbb{S}^1 \times \{\pm R\}$, переводящий траектории поля $\vec{a}^*|_{\Phi_R}$ в траектории поля $\vec{a}|_{\Phi_R}$. Мы можем выбрать число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ так, что для любого уравнения $a^* \in A^{n,+}_{\omega}, \|\ a^* - a\| < \varepsilon$, имело место неравенство $|a^* - a\|_1 < \varepsilon_1$. Ввиду (2) соответствующее векторное поле $\vec{a}^*$ имеет только гиперболические особые точки и замкнутые траектории, не имеет траекторий, идущих из седла в седло, а гомеоморфизм h_R, можно продолжить до гомеоморфизма $h : \Phi \to \Phi$, переводящего траектории поля $\vec{a}^*$ в траектории поля $\vec{a}$. Поэтому Σ – открытое множество в $A^{n,+}_{\omega}$, а уравнение $a \in \Sigma$ грубое в Φ.

Докажем плотность Σ в $A^{n,+}_{\omega}$. Пусть $a \in A^{n,+}_{\omega}$. Зададим число $\varepsilon > 0$ и найдем такое уравнение $\tilde{a} \in \Sigma$, что $|\tilde{a} - a\| < \varepsilon$. Так как по теореме Вейерштрасса о приближении аналитические функции всюду плотны в $C^1(\mathbb{S}^1)$, то без ограничения общности можно считать, что у уравнения a коэффициенты $a_k(x)$ – аналитические функции, причем $a_0(x)$ – непостоянная функция.

Рассмотрим семейство уравнений $a^{\mu,\nu} : \ddot{x} = a^{\mu,\nu}(x, \dot{x})$, где

$$a^{\mu,\nu}(x,y) = a(x,y) + \mu y + \nu.$$

Выберем число $\delta_1 > 0$ так, чтобы $\|a^{\mu,\nu} - a\| < \varepsilon$. при $|\mu\ | < \delta_1$, Все особые точки векторного поля $\vec{a}^{\,0,\nu}$ имеют вид $(x_0, 0)$, где x_0 – нуль функции $a_0(x) + \nu$. Так как $a_0(x)$ – непостоянная аналитическая функция, то она имеет конечное число нулей конечной кратности. Поэтому $\nu_0 \in (0, \delta_1)$ можно считать выбранным так, что $a_0(x) + \nu_0$ имеет только простые нули. Пусть это точки $x_k \in \mathbb{S}^1$, $k = 1, ..., K$. Уравнение a^{μ,ν_0} имеет те же особые точки, что и уравнение a^{0,ν_0}.

Характеристическое уравнение в особой точке $S_k = (x_k, 0)$ поля $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}$ имеет вид $\lambda^2 - (a_1(x_k) + \mu)\lambda - a_0'(x_k) = 0$. Так как $a_0'(x_k) \neq 0$, то все его корни отличны от нуля. Выбрав число $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ достаточно малым, будем иметь $a_1(x_k) + \mu \neq 0$ для всех $k = 1, ..., K$ и $\mu \in (0, \delta_2)$. Поэтому при всех $\mu \in (0, \delta_2)$

любая особая точка S_k векторного поля $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}$ гиперболическая и имеет один и тот же тип (узел, фокус, седло).

Пусть $\mu_0 \in (0, \delta_2)$. Для каждого седла S_k поля $\vec{a}^{\,\mu_0,\nu_0}$ выберем окружность T_k с центром в точке S_k, трансверсально пересекающую все сепаратрисы этого седла. Пусть L_0 – входящая (выходящая) сепаратриса седла S_k. Мы можем выбрать столь малое $\delta > 0$, что $0 < \mu_0 - \delta < \mu_0 + \delta < \delta_2$ и для $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$ существует единственная точка $l(\mu) \in T_k$, непрерывно зависящая от μ, через которую проходит входящая (выходящая) сепаратриса $L(\mu)$ седла S_k поля $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}$, совпадающая при $\mu = 0$ с L_0. Будем называть $L(\mu)$ продолжением по параметру μ сепаратрисы L_0. Так как сепаратрис конечное число, то δ можно считать выбранным так, что для всех сепаратрис седел поля $\vec{a}^{\,\mu_0,\nu_0}$ определены их продолжения по параметру $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$.

Лемма 1. *Пусть векторное поле $\vec{a}^{\,\mu_1,\nu_0}$, $\mu_1 \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$, имеет выходящую сепаратрису L_1 седла S^1, идущую в седло S^2 (не исключено, что $S^1 = S^2$). Пусть $L_1(\mu)$ – ее продолжение по параметру μ. Тогда существует такой интервал $(\mu_1, \mu_1 + \sigma) \subset (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$, что для любого $\mu \in (\mu_1, \mu_1 + \sigma)$ сепаратриса $L_1(\mu)$ не идет в седло S^2.*

Доказательство. Согласно [11] существует единственная последовательность сепаратрис $L_1, L_2, ..., L_m$ такая, что при $i = 1, ..., m-1$ сепаратриса L_i идет из седла в седло, а L_{i+1} является ω-продолжением L_i с положительной стороны и либо

1) все сепаратрисы в этой последовательности различны, а L_m не является входящей сепаратрисой седла,

либо

2) $L_i \neq L_j$ при $i, j \in \{1, ..., m-1\}, i \neq j$, $L_m = L_1$, а сепаратрисный контур $L = \bar{L}_1 \cup \cdots \cup \bar{L}_{m-1}$ является или

(а) предельным множеством для траекторий поля $\vec{a}^{\,\mu_1,\nu_0}$

или

(б) граничным континуумом для ячейки из замкнутых траекторий.

Рассмотрим случай 1). Пусть сначала L_m ω-предельна к узлу или фокусу или при возрастании времени трансверсально пересекает $\partial\Phi_R$. Так как определитель

$$\begin{vmatrix} y & a^{\mu_1,\nu_0}(x,y) \\ y & a^{\mu,\nu_0}(x,y) \end{vmatrix} = (\mu - \mu_1)y^2,$$

то при $\mu > \mu_1$ для любой точки $(x,y) \in \Phi_R$, $y \neq 0$, репер $(\vec{a}^{\,\mu_1,\nu_0}(x,y), \vec{a}^{\,\mu,\nu_0}(x,y))$ положительно ориентирован, и потому угол поворота вектора $\vec{a}^{\,\mu_1,\nu_0}(x,y)$ к вектору $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}(x,y)$ положителен. Отсюда следует, что найдется такой интервал $(\mu_1, \mu_1 + \sigma) \subset (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$, что для любого $\mu \in (\mu_1, \mu_1 + \sigma)$ выходящая сепаратриса $L_1(\mu)$ поля $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}$, являющаяся продолжением по параметру μ сепаратрисы L_1 седла S^1, также ω-предельна к узлу или фокусу или трансверсально пересекает $\partial\Phi_R$.

Пусть ω-предельное множество $\omega(L_m)$ сепаратрисы L_m – предельный цикл или сепаратрисный контур. Тогда через точку, принадлежащую L_m и достаточно близкую к $\omega(L_m)$ можно провести замкнутую трансверсаль T векторного поля $\vec{a}^{\,\mu_1,\nu_0}$. По теореме Жордана $\Phi \setminus T$ состоит из двух связных компонент. Седло S^2 и множество $\omega(L_m)$ принадлежат разным компонентам. Если $\mu \in (\mu_1, \mu_1 + \sigma)$, а σ выбрано достаточно малым, то T – трансверсаль и для векторного поля $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}$, а сепаратриса $L_1(\mu)$ также пересекает T. Но тогда S^2 и множество $\omega(L_1(\mu))$, если оно существует, также принадлежат разным компонентам и потому не совпадают.

В случае 2а) существует такая замкнутая трансверсаль T векторного поля $\vec{a}^{\,\mu_1,\nu_0}$, что пересекающие ее траектории либо

(i) ω-предельны к L,

либо

(ii) α-предельны к L.

Пусть G – область, ограниченная T и континуумом L. Если σ достаточно мало, то T является трансверсалью и для поля $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}$ для всех $\mu \in (\mu_1, \mu_1 + \sigma)$, причем в случае (i) в точках T траектории входят в G, а в в случае (ii) выходят из G.

В случае 2б) пусть T – одна из замкнутых траекторий ячейки. Так как при $y \neq 0$ угол поворота вектора $\vec{a}^{\,\mu_1,\nu_0}(x,y)$ к вектору $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}(x,y)$ положителен, то в этом случае в точках T траектории поля $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}$ выходят из G. По теореме Жордана $\Phi \setminus T$ состоит из двух связных компонент C_1 и C_2. Континуум L принадлежит одной из них, предположим, что компоненте C_1.

В случае 2а) при условии (i) сепаратриса $L_1(\mu)$ лежит в G и потому ω-предельна к замкнутой траектории, а в случаях 2а) при условии (ii) и 2б) выходит из G, и тогда ее возможное ω-предельное множество принадлежит компоненте C_2 и отлично от седла S^2. □

Лемма 2. *Существует такой интервал $I \subset (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$, что векторные поля $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}$, $\mu \in I$, не имеют сепаратрис, идущих из седла в седло.*

Доказательство. Пусть векторное поле $\vec{a}^{\,\mu_0,\nu_0}$ имеет m седел. Пронумеруем числами $1, 2, ..., N = 4m^2$ все упорядоченные пары (L^+, L^-), где L^+ (L^-) – выходящая (входящая) сепаратриса какого-нибудь седла. Зададим по индукции интервалы I_k, $k = 1, 2, ..., N$.

Пусть (L^+, L^-) – пара сепаратрис с номером 1. Если на интервале $I \subset (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$ нет значений параметра μ, при котором совпадают сепаратрисы $L^+(\mu)$ и $L^-(\mu)$, являющиеся продолжениями по параметру соответственно сепаратрис L^+ и L^-, то положим $I_1 = (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$. Если такое значение параметра μ_1 есть, то согласно лемме 1 найдется такой интервал $I_1 = (\mu_1, \mu_1 + \sigma) \subset (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$, что $\forall \mu \in I_1$ $L^+(\mu) \neq L^-(\mu)$.

Пусть существует такой интервал $I_s \subset (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$, $1 \leq s < N$, что $\forall \mu \in I_s$ $L^+(\mu) \neq L^-(\mu)$ для всех пар сепаратрис (L^+, L^-) с номерами $\leq s$. Пусть (L^+, L^-) – пара сепаратрис с номером $s+1$. Если на интервале I_s нет значений параметра μ, при котором совпадают сепаратрисы $L^+(\mu)$ и $L^-(\mu)$, являющиеся продолжениями по параметру соответственно сепаратрис L^+ и L^-, то положим $I_s = I_s$. Если такое значение μ_s параметра есть, то по лемме 1 найдется интервал $I_{s+1} = (\mu_s, \mu_s + \sigma) \subset I_s$, для всех значений параметра μ из которого $L^+(\mu) \neq L^-(\mu)$.

По индукции получаем, что существует интервал $I = I_N \subset (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$ такой, что для любого $\mu \in I$ векторное поле $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}$ не имеет сепаратрис, идущих из седла в седло. □

Пусть $\mu_* \in I$. Так как векторное поле $\vec{a}^{\,\mu_*,\nu_0}$ имеет только гиперболические особые точки, не имеет сепаратрис, идущих из седла в седло, а все его замкнутые траектории лежат в Φ_R, то число замкнутых траекторий конечно. Пусть Γ

– замкнутая траектория периода τ, а $x = \xi(t), y = \eta(t), t \in [0, \tau]$ – её уравнения. Выберем аналитическое отображение $g : (-1, 1) \to \Phi$, $g(0) = (\xi(0), \eta(0))$, трансверсальное к Γ в нуле, так, чтобы репер $(\vec{a}^{\,\mu_*,\nu_0}(g(0)), g'(0))$ был положительно ориентирован. При u и μ достаточно близких соответственно к нулю и μ_* определено отображение последования по траекториям поля $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}$ на трансверсали: $g(u) \mapsto g(P(u, \mu))$, $P(0, \mu_*) = 0$.

Из формулы (36) на с. 391 книги [12] следует, что

$$P'_\mu(0, \mu_*) = \frac{1}{\Delta} \int\limits_0^\tau \dot{\xi}(s) \frac{\partial}{\partial \mu}\Big|_{\mu=\mu_*} a^{\mu,\nu_0}(\xi(s), \eta(s)) \exp \int_s^\tau (a^{\mu_*,\nu_0})'_y(\xi(t), \eta(t)) dt\, ds =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \int\limits_0^\tau \eta^2(s) \exp \int_s^\tau (a^{\mu_*,\nu_0})'_y(\xi(t), \eta(t)) dt\, ds,$$

где $\Delta > 0$. Поэтому $P'_\mu(0, \mu_*) > 0$. Отсюда и из раздела 32.4 книги [12] получаем, что существует такой интервал $(\mu_*, \mu_* + \rho) \subset I$, что для любого значения параметра $\mu \in (\mu_*, \mu_* + \rho)$ все замкнутые траектории поля $\vec{a}^{\,\mu,\nu_0}$ являются гиперболическими.

Итак, при $\mu \in (\mu_*, \mu_* + \rho)$ уравнение a^{μ,ν_0} принадлежит Σ. Поскольку для рассматриваемых значений параметра $\|a^{\mu,\nu_0} - a\| < \varepsilon$, то тем самым доказана плотность Σ в $A^{n,+}_\omega$. □

3. Оценка числа циклов

Траектории уравнения (1) на множестве $\{(x, y) \in \Phi : y \neq 0\}$ совпадают с интегральными кривыми дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = a_n(x)y^{n-1} + \dots + a_2(x)y + a_1(x) + \frac{a_0(x)}{y}. \tag{3}$$

Если $a_0(x) \equiv 0$, то это уравнение является обобщенным уравнением Абеля

$$\frac{dy}{dx} = a_n(x)y^{n-1} + \dots + a_2(x)y + a_1(x).$$

Существует ряд работ, в которых дается оценка сверху числа периодических решений такого уравнения при разных условиях на его коэффициенты [6, 8, 9]. Из этих работ следуют соответствующие оценки для числа предельных циклов второго рода (то есть циклов, негомотопных нулю на цилиндре Φ) для уравнений с коэффициентом $a_0(x) \equiv 0$, а также с $a_0(x)$, достаточно близким к нулю.

Покажем, что уравнение вида (1) может иметь сколь угодно много предельных циклов, как второго рода, так и первого рода (гомотопных нулю на Φ).

Теорема 2. *Для любого натурального числа N существует уравнение $\tilde{a} \in A^1_\omega$, имеющее не менее N гиперболических предельных циклов второго рода.*

Для любых натуральных чисел N и $n > 1$ существует уравнение $\tilde{a} \in \Sigma A^{n,+}_\omega$, имеющее не менее N предельных циклов второго рода.

Доказательство. При $n = 1$ уравнение (3) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = a_1(x) + \frac{a_0(x)}{y}. \tag{4}$$

Сделаем в нем замену $z = 1/y$. Получим уравнение

$$\frac{dz}{dx} = -a_0(x)z^3 - a_1(x)z^2.$$

Согласно работе Нето [7] коэффициенты этого уравнения можно подобрать так, что уравнение будет иметь не менее N изолированных ненулевых ω-периодических решений. Соответственно, уравнение (4) имеет не менее N ω-периодических решений, а уравнение $\ddot{x} = a_1(x)\dot{x} + a_0(x)$ имеет $K \geq N$ предельных циклов Γ_i, $i = 1, ..., K$, задаваемых уравнениями $y = p_i(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где p_i – ω-периодические C^1-функции, не обращающиеся в нуль. Рассмотрим уравнение

$$a^\mu : \ddot{x} = (a_1(x) + \mu)\dot{x} + a_0(x)$$

и соответствующее ему уравнение (3):

$$\frac{dy}{dx} = a_1(x) + \mu + \frac{a_0(x)}{y}. \tag{5}$$

Пусть $Y(x, u, \mu)$ – решение уравнения (5) , удовлетворяющее начальному условию $Y(0, u, \mu) = u$. При u достаточно близких к $u_i = p_i(0)$, $i = 1, ..., K$, и μ достаточно близких к нулю решение $Y(x, u, \mu)$ определено для всех $x \in [0, \omega]$ и $Y(x, u_i, 0) = p_i(x)$. Производная $Y'_\mu(x, u_i, 0)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx}Y'_\mu(x, u_i, 0) = -\frac{a_0(x)}{p_i^2(x)}Y'_\mu(x, u_i, 0) + 1$$

и начальному условию $Y'_\mu(0, u_i, 0) = 0$. Следовательно,

$$Y'_\mu(x, u_i, 0) = \int\limits_0^x \exp \int\limits_x^\xi \frac{a_0(s)}{p_i^2(s)}\, ds\, d\xi. \tag{6}$$

Функция расхождения $d(u, \mu) = Y(\omega, u, \mu) - u$ определена и является аналитической при u достаточно близких к u_i и μ достаточно близких к нулю. Будем считать, что циклы Γ_i, $i = 1, ..., K$, пронумерованы так, что при $i = 1, ..., l$ они имеют четную кратность, а при $i = l + 1, ..., K$ – нечетную. Кратность цикла Γ_i – кратность нуля u_i функции $d(\cdot, 0)$.

Из (6) получаем

$$d'_\mu(u_i, 0) > 0,\ i = 1, ..., K. \tag{7}$$

Поскольку циклы Γ_i, $i = l+1, ..., K$, нечетной кратности, то из (7) и леммы 2 на с. 404 книги [12] следует существование такого $\mu_0 > 0$, что функция $d(\cdot, \mu)$ при $0 < |\mu| < \mu_0$ будет иметь простые нули $\tilde{u}_i(\mu)$, $i = l + 1, ..., K$, для которых $\lim_{\mu\to 0} \tilde{u}_i(\mu) = u_i$.

Пусть $2m_i$ – кратность цикла Γ_i, $i = 1, ..., l$. Мы можем выбрать $\sigma \in \{-1, 1\}$ так, чтобы при четном (нечетном) l существовало не менее $l/2$ ($(l + 1)/2$) номеров $i = 1, ..., l$, для которых $\sigma\partial^{2m_i} d(u_i, 0)/\partial u^{2m_i} < 0$. Тогда из (7) и леммы 3 на с. 404 книги [12] следует, что μ_0 можно считать столь малым, что $d(\cdot, \mu)$ при $0 < \sigma\mu < \mu_0$ будет иметь простые нули $\tilde{u}_{ij}(\mu)$, $i = 1, ..., l$, $j = 1, 2$, такие, что $\lim_{\mu\to 0} \tilde{u}_{ij}(\mu) = u_i$.

В итоге получаем, что при $0 < \sigma\mu < \mu_0$ функция $d(\cdot, \mu)$ имеет не менее N простых нулей, а уравнение a^μ имеет не менее N гиперболических предельных циклов второго рода. Поскольку $a^\mu \in A^1_\omega$, то первое утверждение теоремы доказано.

Так как гиперболические циклы грубые, то существует такая окрестность $U(a^\mu)$ уравнения a^μ в A^n_ω, $n > 1$, что любое уравнение из этой окрестности также имеет не менее N гиперболических предельных циклов второго рода. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ уравнение

$$a^* : \ddot{x} = \varepsilon \dot{x}^n + (a_1(x) + \mu)\dot{x} + a_0(x)$$

принадлежит окрестности $U(a^\mu)$. Выберем окрестность $U(a^*)$ уравнения a^* в $A^{n,+}_\omega$, содержащуюся в $U(a^\mu)$. Из теоремы 1 следует, что в $U(a^*)$ есть уравнение, принадлежащее $\Sigma A^{n,+}_\omega$. Оно имеет не менее N предельных циклов второго рода. □

Теорема 3. *Для любых натуральных чисел n и N существует уравнение $\tilde{a} \in \Sigma A^{n,+}_\omega$, имеющее не менее N устойчивых предельных циклов первого рода.*

Доказательство. Из [1, с. 363–364] следует, что уравнение

$$\ddot{x} = (\cos x - 1)\dot{x} + (1 - \mu - \sin x)$$

при достаточно малом $\mu > 0$ имеет на фазовой плоскости переменных $x, y = \dot{x}$ устойчивый гиперболический предельный цикл, лежащий в полосе $-\pi < x < \pi$. Уравнение

$$\ddot{x} = \left(\cos \frac{2\pi N}{\omega} x - 1\right)\dot{x} + \left(1 - \mu - \sin \frac{2\pi N}{\omega} x\right)\frac{\omega}{2\pi N}$$

принадежит A^1_ω. В фазовом пространстве Φ оно имеет по меньшей мере N гиперболических устойчивых предельных циклов первого рода. При достаточно малом $\nu > 0$ уравнение

$$a: \ \ddot{x} = \left(\cos \frac{2\pi N}{\omega} x - 1 - \nu\right)\dot{x} + \left(1 - \mu - \sin \frac{2\pi N}{\omega} x\right)\frac{\omega}{2\pi N}$$

принадлежит $A^{1,+}_\omega$ и имеет не менее N устойчивых гиперболических предельных циклов первого рода. Так как гиперболические предельные циклы являются грубыми, то существует такая окрестность $U(a)$ уравнения a в $A^{1,+}_\omega$, что любое уравнение из этой окрестности также имеет не менее N устойчивых гиперболических предельных циклов. Из плотности множества $\Sigma A^{1,+}_\omega$ в $A^{1,+}_\omega$ следует, что в $U(a)$ есть уравнение из $\Sigma A^{1,+}_\omega$.

Как и в теореме 2 доказывается. что в некоторой окрестности уравнения a в $A^{n,+}_\omega$, $n \geq 2$, существует уравнение $\tilde{a} \in \Sigma A^{n,+}_\omega$, имеющее не менее N устойчивых предельных циклов первого рода. □

References

[1] N.N. Bautin, E.A. Leontovich, *Methods and techniques for qualitative study of dynamical systems on the plane*, Nauka, Moscow, 1990. Zbl 0785.34004

[2] E.A. Barbashin, V.A. Tabueva, *Dynamical systems with cylindrical phase space*, Nauka, Moscow, 1969. Zbl 0212.43404

[3] V.Sh. Roitenberg, *Limit cycles of Lienard equations with periodic coefficients*, Math. Methods in Ingineering and Technology, **1** (2013), 5–7.

[4] V.Sh. Roitenberg, *On limit cycles of a second-order differential equation on the circle that arise from infinity*, Bulletin of the Moscow State Regional University. Ser. Phisics and Mathematics, **2** (2017), 6–15.

[5] V.Sh. Roitenberg, *On limit cycles of some second order differential equation on the circle*, Sientifical and Technical Bulletin of the Volga Region, **1** (2017), 25–28.

[6] V.A. Pliss, *The number of periodic solutions of equations whose right-hand member is a polynomial*, Docl. Akad. Nauk SSSR, **127**:5 (1959), 965–968. Zbl 0093.09102

[7] A.L. Neto, *On the number of solutions of the equation for which x(0)=x(1)*, Invent. Math., **59**:2 (1980), 67–76.

[8] Ju. Ilyashenko, *Hilbert-type number for Abel equations, growth and zeros of holomorfic functions*, Nonlinearity, **13**:4 (2000), 1337–1342. Zbl 1016.34028

[9] A. Casull, A. Guillamon, *Limit cycles for generalized Abel equations*, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng., **16**:12 (2006), 3737–3745. Zbl 1140.34348

[10] M. Caubergh, F. Dumortier, *Hilbert's 16th problem for classical Lienard equations of even degree*, J. Differ. Equations, **244**:6 (2008), 1359–1394. Zbl 1146.34028

[11] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier, *Qualitative theory of second-order dynamical systems*, John Wiley & Sons, Jerusalem etc., 1973. Zbl 0282.34022

[12] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier, *The theory of bifurcations of dynamical systems on the plane* , Nauka, Moscow, 1967. Zbl 0257.34001

[13] J. Palis, W. Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer-Verlag, New York etc., 1982. Zbl 0491.58001

Vladimir Shleymovich Roitenberg
Yaroslavl State Technical University,
88, Moscowskij ave.,
Yaroslavl, 150023, Russia
Email address: `vroitenberg@mail.ru`