S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 2105–2121 (2020) УДК 519.65

DOI 10.33048/semi.2020.17.141 MSC 65T60

АЛГОРИТМ С РАСЩЕПЛЕНИЕМ ДЛЯ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТОВ С ДВУМЯ НУЛЕВЫМИ МОМЕНТАМИ НА ОТРЕЗКЕ

Б.М. ШУМИЛОВ

Abstract. This paper deals with the use of the first two vanishing moments for constructing cubic spline-wavelets meeting orthogonality conditions to polynomials of the first degree. A decrease in the supports of these wavelets is shown in comparison with the classical semiorthogonal wavelets. For splines with homogeneous Dirichlet boundary conditions of the first order, an algorithm of the shifted wavelet transform is obtained in the form of a solution of tridiagonal systems of linear algebraic equations with a strict diagonal dominance. Results of numerical experiments on data processing are presented.

Keywords: B-splines, wavelets, implicit decomposition relations.

1. Введение

В теории кратномасштабного анализа вейвлеты составляют базис множества, заполняющего разность между аппроксимирующими пространствами на густой и разреженной сетках [1, стр. 16]. В классическом случае аппроксимации на равномерной сетке, бесконечно продолженной в обоих направлениях, такой базис порождается сжатиями и смещениями одной волновой функции, имеющей вид короткого или быстро убывающего всплеска, которая и называется вейвлетом. Благодаря сжатию вейвлеты могут определять разницу в характеристиках измеряемого сигнала с разной степенью подробности. Благодаря смещению они могут анализировать свойства сигнала в разных точках на всем интервале исследования. При анализе нестационарных сигналов свойство

Shumilov, B.M., Splitting algorithm for cubic spline-wavelets with two vanishing moments on the interval.

Поступила 30 декабря 2018 г., опубликована 21 декабря 2020 г.

локальности вейвлетов обеспечивает преимущество перед преобразованием Фурье, которое предоставляет только глобальную информацию о свойствах изучаемого сигнала, поскольку используемые базисные функции (синусы и косинусы) имеют бесконечные носители. Поскольку вейвлеты преобразуют систему базисных функций с распределенными параметрами в систему с сосредоточенными параметрами, такой базис применяется для улучшения обусловленности и сходимости в численном анализе [2, стр. 478-481].

Основой для построения вейвлетов является наличие так называемых масштабных (калибровочных) соотношений, таких что каждая базисная функция на разреженной сетке выражается как линейная комбинация базисных функций на густой сетке. В частности, таким свойством обладают сплайны – гладкие функции, склеенные из кусков многочленов степени m, на последовательности вложенных сеток.

Характерным свойством полуортогональных вейвлетов, которое иногда [3] используется в качестве основы для численного метода построения вейвлет-преобразований, является то, что вейвлет-разложение обеспечивает наилучшее среднеквадратическое приближение сплайнов на густой сетке посредством сплайнов на разреженной сетке. Это свойство дает преимущество при сжатии дискретной числовой информации. Однако это преимущество нивелируется в силу довольно больших носителей из $2m + 1$ шагов сетки результирующих сплайн-вейвлетов. Некоторый прогресс в этом отношении был достигнут путем построения сплайн-вейвлетов с первыми r моментами, равными нулю [4], при условии длин носителей $(m+r+1)/2$. Поскольку полуортогональные вейвлеты имеют $m + 1$ нулевых моментов, идея сокращения носителей вейвлетов путем замены свойства ортогональности для пространства сплайнов на разреженной сетке ортогональностью для степенных многочленов кажется привлекательной. Действительно, с точки зрения скорости приближения гладких функций [5, стр. 52, 156], эти два типа вейвлетов эквивалентны, а ортогональность многочленам обеспечивает локально максимальное "сходство" с наилучшим среднеквадратическим приближением. В то же время в статистических приложениях ортогональность многочленам высокой степени не требуется [6], в отличие, например, от задачи численного дифференцирования [7]. Это обеспечивает бóльшую универсальность неортогонального подхода. В случае кубических сплайнов вейвлет третьей степени, для которого выполнены условия ортогональности всем многочленам первой степени, давно известен [8]. Этот вейвлет имеет очень простую структуру, в частности, длина носителя много меньше, чем длина носителя классического полуортогонального сплайн-вейвлета третьей степени, а именно $3 < 7$. Более того, он образует базис Рисса [9].

С другой стороны, в работах автора [10, 11] был исследован случай кубических вейвлетов Эрмита, ортогональных всем многочленам третьей степени. Был предложен оригинальный метод четно-нечетного расщепления системы уравнений смещенного вейвлет-преобразования Эрмита на параллельное решение двух тридиагональных систем линейных уравнений вчетверо меньшей размерности со строгим диагональным преобладанием. Вейвлет-преобразование на основе сплайнов Эрмита имеет свои недостатки. Во-первых, в задаче обработки измерительной информации необходимо сначала вычислить приближенные значения производных в узлах наиболее густой сетки с приемлемой точностью [12], и только затем могут применяться алгоритмы вейвлет-преобразования. Во-вторых, с точки зрения сжатия данных количество вейвлет-коэффициентов в этом случае больше, чем в методах, основанных на B-сплайнах. Поэтому в разделе 3 рассматривается идея использования четно-нечетного расщепления для случая сдвинутого вейвлет-преобразования обычных кубических сплайнов.

Следует отметить, что полученный в результате алгоритм значительно отличается от ранее известного быстрого алгоритма [13, 14] дискретного вейвлет-преобразования, поскольку он основан на вейвлетах с двумя нулевыми моментами вместо последовательности решений задачи интерполяции на вложенных сетках. Достоинствами нового алгоритма являются его свойство устойчивости и простота использования в программах, поскольку на каждом этапе решается одна система линейных уравнений (вместо двух систем в известном алгоритме) с матрицей, имеющей строгое диагональное преобладание. Кроме того, у полученной схемы вейвлет-обработки отсутствует недостаток, присущий интерполяционным вейвлетам. А именно, см. [15, стр. 123], при выполнении анализа данных с помощью интерполяционных вейвлетов грубое приближение получается из более точного путем исключения вершин, соответствующих четным узлам. Следовательно, самое грубое приближение зависит только от нескольких начальных вершин, и оно может оказаться очень плохим приближением исходной функции.

Четно-нечетное разбиение матрицы вейвлет-преобразования было независимо использовано в [9] для доказательства обратимости матрицы; однако там не было представлено четких указаний на то, что это может быть полезно при вычислениях на практике.

2. Построение кубических сплайн-вейвлетов с двумя нулевыми моментами на конечном отрезке

2.1. **Основные определения.** Пусть V_L обозначает пространство кубических сплайнов гладкости C^2 на отрезке $[a,b]$ с равномерной сеткой, состоящей из узлов $\Delta^L : x_i = a + h \cdot i$, $i = 0, 1, \dots, 2^L$, $h = (b-a)/2^L$, а базисные функции $N_i^L(v) = \varphi_3(v-i)\forall i$, где $v = (x-a)/h$, с центрами в целых числах, образованы посредством сжатий и смещений функции вида [16, стр. 89]:

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{6}\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}(-1)^j(t-j)_+^3,$$

где $t_+^n = (\max\{t,0\})^n$. Известно [1, стр. 91], что эти функции удовлетворяют калибровочному соотношению:

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\varphi_3(2t-k). \tag{1}$$

Пусть на функции накладываются дополнительные условия: $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$. Тогда крайняя левая базисная функция отличается от $\varphi_3(t)$, и она имеет вид [13]

$$\varphi_b(t) = \frac{3}{2}t_+^2 - \frac{11}{12}t_+^3 + \frac{3}{2}(t-1)_+^3 - \frac{3}{4}(t-2)_+^3,$$

удовлетворяя калибровочному соотношению

$$\varphi_b(t) = \frac{1}{4}\varphi_b(2t) + \frac{11}{16}\varphi_3(2t) + \frac{1}{2}\varphi_3(2t-1) + \frac{1}{8}\varphi_3(2t-2). \tag{2}$$

На правом конце отрезка базисная функция представляет зеркальное отражение функции $\varphi_b(t)$. На сетке Δ^L, $L \geq 2$, сплайн третьей степени можно представить в виде

$$S^L(v) = C_{-1}^L \varphi_b(v) + \sum_{i=0}^{2^L-4} C_i^L \varphi_3(v-i) + C_{2^L-3}^L \varphi_b(2^L - v), \tag{3}$$
$$0 \leq v \leq 2^L, \mathrm{Dim}(V_L) = 2^L - 1,$$

где коэффициенты $C_i^L \forall i$ являются решением, например, следующей интерполяционной задачи:

$$S^L(i) = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, 2^L - 1.$$

Если сетка Δ^{L-1}, $L \geq 3$, получается из Δ^L удалением каждого второго узла, то соответствующее пространство V_{L-1} с базисом из функций $N_i^{L-1}(v)$, носители которых в два раза больше по ширине и центры находятся в четных узлах сетки Δ^L, вложено в V_L. Суть вейвлет-преобразования можно сформулировать следующим образом: оно позволяет иерархически разложить заданную функцию на ряд грубых приближенных представлений V_{L-1} и локальных уточняющих деталей $W_{L-1} = V_L - V_{L-1}$.

Для построения одного из возможных базисов в W_{L-1} используются кубические вейвлеты, ортогональные всем многочленам первой степени [8, 9],

$$w_{31}(t) = -\frac{1}{2}\varphi_3(2t) + \varphi_3(2t-1) - \frac{1}{2}\varphi_3(2t-2), \tag{4}$$

$$w_{b1}(t) = \varphi_b(2t) - 1.35\varphi_3(2t) + 0.6\varphi_3(2t-1). \tag{5}$$

У них, соответственно, по два нулевых момента

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k w_{31}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k w_{b1}(x)dx = 0,\ k = 0, 1,$$

кроме того, у этих вейвлетов уменьшены носители:

$$\mathrm{supp}\, w_{31} = [0, 3],\ \mathrm{supp}\, w_{b1} = [0, 2.5].$$

В отличие от случая кубических полуортогональных сплайн-вейвлетов, у которых центры носителей располагаются в четных узлах, будем располагать центры носителей кубических вейвлетов, ортогональных многочленам первой степени, со сдвигом – в нечетных узлах. Ясно, что $\mathrm{Dim}(W_{L-1}) = 2^{L-1}$. Тогда выполняется условие дополнения размерностей рассматриваемых пространств, т.е.

$$\mathrm{Dim}(V_L) = \mathrm{Dim}(V_{L-1}) + \mathrm{Dim}(W_{L-1}).$$

2.2. **Построение блока фильтров.** Запишем базисные сплайн-функции в виде однострочной матрицы,

$$\varphi^L(\cdot) = \left[\varphi_b(\cdot), \varphi_3(\cdot), \varphi_3(\cdot - 1), \ldots, \varphi_3(\cdot - 2^L + 4), \varphi_b(2^L - \cdot)\right].$$

Введя обозначение для вектора, состоящего из коэффициентов сплайна $C^L = \left[C_{-1}^L, C_0^L, \ldots, C_{2^L-3}^L\right]^T$, запишем формулу (3) в векторном виде

$$S^L(\cdot) = \varphi^L(\cdot) C^L.$$

Точно так же мы можем записать базисные сдвинутые вейвлет-функции с центрами в нечетных целых числах в виде матрицы-строки

$$\psi^L(\cdot) = \left[w_{b1}(\cdot), w_{31}(\cdot), w_{31}(\cdot - 1), \ldots, w_{31}(\cdot - 2^L + 3), w_{b1}(2^L - \cdot)\right].$$

Соответствующие вейвлет-коэффициенты аппроксимации на уровне разложения L обозначим через

$$D_i^L, \ i = -1, 0, \ldots, 2^L - 2,$$

и введем вектор-строку

$$D^L = \left[D_{-1}^L, D_0^L, \ldots, D_{2^L-2}^L\right]^T.$$

Поскольку пространства V_{L-1} и W_{L-1} по определению являются подпространствами V_L, можно представить функции $\varphi^{L-1}(\cdot)$ и $\psi^{L-1}(\cdot)$ в виде линейных комбинаций масштабирующих функций $\varphi^L(\cdot)$:

$$\varphi^{L-1}(\cdot) = \varphi^L(\cdot) P^L \text{ и } \psi^{L-1}(\cdot) = \varphi^L(\cdot) Q^L,$$

где столбцы матрицы P^L составлены из коэффициентов соотношений (1) и (2), поскольку каждая широкая базисная функция в интервале аппроксимации может быть построена из пяти узких базисных функций, а каждая широкая базисная функция на концах интервала может быть построена из четырех узких базисных функций; элементы столбцов матрицы Q^L составлены из коэффициентов соотношений (4) и (5).

Следовательно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \varphi^L(\cdot) C^L = {} & \varphi^{L-1}(\cdot) C^{L-1} + \psi^{L-1}(\cdot) D^{L-1} = \\ = {} & \varphi^L(\cdot) P^L C^{L-1} + \varphi^L(\cdot) Q^L D^{L-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть известны коэффициенты C^{L-1} и D^{L-1}. Тогда коэффициенты C^L могут быть получены из C^{L-1} и D^{L-1} следующим образом

$$C^L = P^L C^{L-1} + Q^L D^{L-1}$$

или, используя обозначения для блочных матриц,

$$C^L = \left[P^L \mid Q^L\right] \left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}}\right]. \tag{7}$$

В следующем примере показано, какой вид имеет блочная матрица $\left[P^L \mid Q^L\right]$ при $L = 3$ (случай трех базисных сплайн-функций из V_2, четырех базовых вейвлетов из W_2 и семи базисных функций из V_3:

$$
\left[P^3 \mid Q^3\right] = \left[\begin{array}{ccc|cccc}
\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{11}{16} & \frac{1}{8} & 0 & -1.35 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0.6 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0.6 \\
0 & \frac{1}{8} & \frac{11}{16} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1.35 \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]. \tag{8}
$$

Определим блочную матрицу, обратную матрице $\left[P^L \mid Q^L\right]$:

$$
\left[\frac{A^L}{B^L}\right] = \left[P^L \mid Q^L\right]^{-1}.
$$

Тогда процесс создания версии с грубым разрешением, C^{L-1}, характеризуемой меньшим количеством коэффициентов, можно выразить матричным равенством

$$
C^{L-1} = A^L C^L,
$$

где A^L – матрица размерности $\left(2^{L-1} - 1\right) \times \left(2^L - 1\right)$. В этом случае потерянные части собираются в другом векторе D^{L-1}, определяемом выражением

$$
D^{L-1} = B^L C^L,
$$

где B^L – матрица размерности $2^{L-1} \times \left(2^L - 1\right)$. Матрицы A^L и B^L называются фильтрами анализа, а матрицы P^L и Q^L – фильтрами синтеза [2, стр. 198], [15, стр. 95].

Процедура разбиения коэффициентов C^L на грубую версию C^{L-1} и уточняющие коэффициенты D^{L-1} может быть применена рекурсивно к самой этой части C^{L-1}. Следовательно, начальные коэффициенты могут быть представлены в виде иерархии грубых версий $C^2, C^3, ..., C^{L-1}$ и уточнений $D^2, D^3, ..., D^{L-1}$. Подобный рекурсивный процесс называется блок-фильтром [15, стр. 95]. И обратно, коэффициенты C^L можно восстановить из свернутой последовательности $C^2, D^2, D^3, ..., D^{L-1}$. Кроме того, по значениям вейвлет-коэффициентов $D^j, j = 2, 3, ..., L-1$, можно судить о значимости соответствующих деталей уточнения. Незначимые детали удаляются с целью сжатия информации.

Из представлений (1), (2), (4) и (5) видно, что матрицы $\left[P^L \mid Q^L\right]$ разрежены. Однако, матрицы, обратные к $\left[P^L \mid Q^L\right]$, как правило, теряют разреженную структуру. Суть подхода, предложенного в [15, стр. 96] для таких случаев, заключается в том, что C^{L-1} и D^{L-1} могут быть вычислены из C^L путем решения системы линейных уравнений (7). Более того, было предложено преобразовать матрицу $\left[P^L \mid Q^L\right]$ в ленточную матрицу, просто изменив порядок неизвестных так, чтобы столбцы матриц P^L и Q^L чередовались.

Таким образом, операция вейвлет-разложения может выполняться без явного представления и использования блока фильтров. Тем не менее, хотя разрешимость полученной системы гарантируется линейной независимостью базисных функций, вопрос о ее хорошей обусловленности остается открытым. Как правило, результирующая система уравнений не имеет диагонального преобладания, что может усложнить вейвлет-анализ данных большого размера.

3. Алгоритм с применением расщепления

Пусть для уровней разрешения $L \geq 4$, матрица G^L размера $\left(2^L - 1\right) \times \left(2^L - 1\right)$ имеет вид

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
8 & -4 & -\frac{296}{3} & 0 & & & & & \\
0 & 9 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
12 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 54 & 3 & 10 & 3 & 3 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 10 & 3 & 3 \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 3 & 3 & 10 & 3 & 54 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 12 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\
 & & & & & 0 & -\frac{296}{3} & -4 & 8
\end{array}\right],
$$

тогда как матрица R^L составлена из двух блоков согласно $2^{L-1} - 1$ базисным сплайн-функциям из V_{L-1} и 2^{L-1} базовым вейвлетам из W_{L-1}:

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
12 & 4 & -108 & 0 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 72 & 4 & 4 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & 0 & 0 & 4 & 4 & 72 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & -108 & 4 & 12 \\
\hline
5 & -5 & -\frac{215}{3} & 0 & 0 & 0 & & & \\
3 & 1 & 63 & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 18 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & 0 & 1 & 1 & 6 & 1 & 18 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 1 & 63 & 1 & 3 \\
 & & & & 0 & 0 & -\frac{215}{3} & -5 & 5
\end{array}\right],
$$

Здесь диагональные точки означают, что в первом случае предыдущие две строки повторяются соответствующее количество раз, каждый раз перемещаясь на две позиции вправо, а во втором случае – что предыдущая строка повторяется соответствующее количество раз при переходе вправо на две позиции; пустые позиции строк матриц равны нулю.

Теорема 1. *Определитель матрицы* $\det G^L \neq 0$.

Доказательство. Теорема 1 будет доказана ближе к концу данной статьи.

Опираясь на существование обратной матрицы $(G^L)^{-1}$, предлагается выполнять расчеты на основе разработанной нами ранее процедуры [17, 18] четно-нечетного расщепления сдвинутого вейвлет-разложения вида (6), связывающего базисные функции пространства сплайнов на густой сетке, базисные функции на разреженной сетке и сдвинутые вейвлеты конечными неявными соотношениями разложения с тремя непустыми диагоналями и строгим диагональным преобладанием. Для случая кубических сплайн-вейвлетов с двумя нулевыми моментами справедливы аналогичные результаты, которые, используя введенные выше обозначения, могут быть представлены в следующей форме.

Лемма 1. *Базисные функции пространства кубических сплайнов на густой сетке, базисные функции на разреженной сетке и сдвинутые вейвлеты удовлетворяют матричному равенству*

$$\varphi^L(\cdot)G^L = \left[\varphi^{L-1}(\cdot) \mid \psi^{L-1}(\cdot)\right] R^L, L \geq 4. \tag{9}$$

Доказательство. Согласно построению, на левом конце интервала $[a, b]$ внутри носителя первых двух широких базисных функций перекрываются 3 вейвлета и 6 узких базисных функций. Таким образом, используя калибровочные соотношения (1), (2), (4) и (5), мы можем записать следующее конечное неявное соотношение декомпозиции с пока неопределенными коэффициентами:

$$\begin{gathered} C^L_{-1}\varphi_b(v) + \textstyle\sum_{i=0}^4 C^L_i \varphi_3(v-i) = \\ = C^{L-1}_{-1}\left(\tfrac{1}{4}\varphi_b(v) + \tfrac{11}{16}\varphi_3(v) + \tfrac{1}{2}\varphi_3(v-1) + \tfrac{1}{8}\varphi_3(v-2)\right) + \\ + C^{L-1}_0\left(\tfrac{1}{8}\textstyle\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k}\varphi_3(v-k)\right) + \\ + D^{L-1}_{-1}\left(\varphi_b(v) - 1.35\varphi_3(v) + 0.6\varphi_3(v-1)\right) + \\ + \textstyle\sum_{j=0}^1 D^{L-1}_j\left(-\tfrac{1}{2}\varphi_3(v-j) + \varphi_3(v-j-1) - \right. \\ \left. -\tfrac{1}{2}\varphi_3(v-j-2)\right), 0 \leq v \leq 8. \end{gathered} \tag{10}$$

Поскольку по обе стороны от знака равенства в (10) представлены кубические сплайны, для их совпадения достаточно равенства соответствующих коэффициентов разложения по B-сплайнам на густой сетке. Тогда для вычисления неопределенных коэффициентов в соотношении (10), мы имеем, соответственно, следующие соотношения для каждого из B-сплайнов с номерами $i = -1, 0, \ldots, 4$

$$\begin{aligned} C^L_{-1} &= \frac{1}{4}C^{L-1}_{-1} + D^{L-1}_{-1}, \\ C^L_0 &= \frac{11}{16}C^{L-1}_{-1} + \frac{1}{8}C^{L-1}_0 - 1.35D^{L-1}_{-1} - \frac{1}{2}D^{L-1}_0, \\ C^L_1 &= \frac{1}{2}C^{L-1}_{-1} + \frac{1}{2}C^{L-1}_0 + 0.6D^{L-1}_{-1} + D^{L-1}_0, \\ C^L_2 &= \frac{1}{8}C^{L-1}_{-1} + \frac{3}{4}C^{L-1}_0 - \frac{1}{2}D^{L-1}_0 - \frac{1}{2}D^{L-1}_1, \\ C^L_3 &= \frac{1}{2}C^{L-1}_0 + D^{L-1}_1, \\ C^L_4 &= \frac{1}{8}C^{L-1}_0 - \frac{1}{2}D^{L-1}_1. \end{aligned}$$

Попытаемся найти вариант соотношения (10), включающий только коэффициенты разложения для нечетных номеров (случай, когда $C_0^L = C_2^L = C_4^L = 0$). Несложно проверить, что полученная система имеет нетривиальное решение, для которого:

$$C_{-1}^L = -\frac{296}{3},\ C_1^L = 2,\ C_3^L = 54.$$

При этом $C_{-1}^{L-1} = -108,\ C_0^{L-1} = 72$, и $D_{-1}^{L-1} = -\frac{215}{3},\ D_0^{L-1} = 63,\ D_1^{L-1} = 18$.

Есть еще одно нетривиальное решение, связывающее коэффициенты разложения для номеров -1 и 1:

$$C_{-1}^L = 8,\ C_1^L = 12,\ C_3^L = 0.$$

При этом $C_{-1}^{L-1} = 12,\ C_0^{L-1} = 0$, и $D_{-1}^{L-1} = 5,\ D_0^{L-1} = 3,\ D_1^{L-1} = 0$.

Попытаемся найти вариант соотношения (10), включающий коэффициенты разложения для трех соседних номеров. В случае, когда $C_{-1}^L = C_0^L = C_4^L = 0$, получаем:

$$C_1^L = C_3^L = 3,\ C_2^L = 2.$$

При этом $C_{-1}^{L-1} = 0,\ C_0^{L-1} = 4$, и $D_{-1}^{L-1} = 0,\ D_0^{L-1} = D_1^{L-1} = 1$.

Есть еще одно нетривиальное решение, связывающее коэффициенты разложения для номеров -1 и 0:

$$C_{-1}^L = -4,\ C_0^L = 9,\ C_1^L = C_2^L = C_3^L = 0.$$

При этом $C_{-1}^{L-1} = 4,\ C_0^{L-1} = 0$, и $D_{-1}^{L-1} = -5,\ D_0^{L-1} = 1,\ D_1^{L-1} = 0$.

Далее, согласно построению, внутри интервала $[a, b]$ в носителе каждых двух широких базисных функций перекрываются 3 вейвлета и 7 узких базисных функций. Например, на отрезке $[x_0, x_{10}]$ мы можем записать следующее конечное неявное соотношение декомпозиции также с пока неопределенными коэффициентами:

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{i=0}^{6} C_i^L \varphi_3(v-i) = \\ = \textstyle\sum_{j=0}^{1} C_j^{L-1} \left(\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\varphi_3(v-j-k)\right) + \\ + \textstyle\sum_{j=0}^{2} D_j^{L-1}\left(-\frac{1}{2}\varphi_3(v-j) + \varphi_3(v-j-1) - \right. \\ \left. -\frac{1}{2}\varphi_3(v-j-2)\right), 0 \le v \le 10.\end{gathered} \tag{11}$$

Поскольку по обе стороны от знака равенства в (11) представлены кубические сплайны, для их совпадения достаточно равенства соответствующих коэффициентов разложения по B-сплайнам на густой сетке. Тогда для вычисления неопределенных коэффициентов в соотношении (11) имеем, соответственно, следующие соотношения для каждого из B-сплайнов с номерами $i = 0, 1, \ldots, 6$

$$\begin{aligned}
C_0^L &= \frac{1}{8}C_0^{L-1} - \frac{1}{2}D_0^{L-1},\\
C_1^L &= \frac{1}{2}C_0^{L-1} + D_0^{L-1},\\
C_2^L &= \frac{3}{4}C_0^{L-1} + \frac{1}{8}C_1^{L-1} - \frac{1}{2}D_0^{L-1} - \frac{1}{2}D_1^{L-1},\\
C_3^L &= \frac{1}{2}C_0^{L-1} + \frac{1}{2}C_1^{L-1} + D_1^{L-1},\\
C_4^L &= \frac{1}{8}C_0^{L-1} + \frac{3}{4}C_1^{L-1} - \frac{1}{2}D_1^{L-1} - \frac{1}{2}D_2^{L-1},\\
C_5^L &= \frac{1}{2}C_1^{L-1} + D_2^{L-1},\\
C_6^L &= \frac{1}{8}C_1^{L-1} - \frac{1}{2}D_2^{L-1}.
\end{aligned}$$

Для $C_3^L = 10$ попытаемся найти вариант соотношения (11), включающий коэффициенты разложения для нечетных номеров (случай, когда $C_0^L = C_2^L = C_4^L = C_6^L = 0$). Несложно проверить, что полученная система имеет единственное нетривиальное решение, для которого

$$C_1^L = C_5^L = 3.$$

При этом $C_0^{L-1} = C_1^{L-1} = 4$, и $D_0^{L-1} = D_2^{L-1} = 1,\ D_1^{L-1} = 6$.

Есть еще два решения, связывающие коэффициенты разложения для трех соседних узлов. В случае, когда $C_0^L = C_4^L = C_5^L = C_6^L = 0$, решение совпадает с одним из полученных выше решений: $C_1^L = C_3^L = 3,\ C_2^L = 2,\ C_0^{L-1} = 4,\ C_1^{L-1} = 0$, и $D_0^{L-1} = D_1^{L-1} = 1,\ D_{-1}^{L-1} = 0$.

В случае, когда $C_0^L = C_1^L = C_2^L = C_6^L = 0$, решение симметрично:

$$C_3^L = C_5^L = 3,\ C_4^L = 2.$$

При этом $C_0^{L-1} = 0,\ C_1^{L-1} = 4$, и $D_1^{L-1} = D_2^{L-1} = 1,\ D_0^{L-1} = 0$.

Такие же решения справедливы для всех последующих пар широких базисных функций.

На правом конце интервала $[a, b]$ решения зеркально отражают решения, полученные выше, т.е. коэффициенты разложения для нечетных номеров (случай, когда $C_{2^L-4}^L = C_{2^L-6}^L = C_{2^L-8}^L = 0$) равны:

$$C_{2^L-3}^L = -\frac{296}{3},\ C_{2^L-5}^L = 2,\ C_{2^L-7}^L = 54.$$

При этом $C_{2^{L-1}-3}^{L-1} = -108,\ C_{2^{L-1}-4}^{L-1} = 72$, и $D_{2^{L-1}-2}^{L-1} = -\frac{215}{3},\ D_{2^{L-1}-3}^{L-1} = 63,\ D_{2^{L-1}-4}^{L-1} = 18$.

Есть еще одно нетривиальное решение, связывающее коэффициенты разложения для номеров $2^L - 3$ и $2^L - 5$:

$$C_{2^L-3}^L = 8,\ C_{2^L-5}^L = 12,\ C_{2^L-5}^L = 0.$$

При этом $C_{2^{L-1}-3}^{L-1} = 12,\ C_{2^{L-1}-4}^{L-1} = 0$, и $D_{2^{L-1}-2}^{L-1} = 5,\ D_{2^{L-1}-3}^{L-1} = 3,\ D_{2^{L-1}-4}^{L-1} = 0$.

В случае, когда $C_{2^L-3}^L = C_{2^L-4}^L = C_{2^L-8}^L = 0$, решение совпадает с одним из полученных решений на предпоследней паре широких базисных функций для трех соседних номеров: $C^L_{2^L-5} = C^L_{2^L-7} = 3,\ C^L_{2^L-6} = 2,\ C^{L-1}_{2^{L-1}-3} = 0,\ C^{L-1}_{2^{L-1}-4} = 4$, и $D^{L-1}_{2^{L-1}-3} = D^{L-1}_{2^{L-1}-4} = 1,\ D^{L-1}_{2^{L-1}-2} = 0$.

И есть еще одно нетривиальное решение, которое связывает коэффициенты разложения для номеров 2^L-3 и 2^L-4:

$$C^L_{2^L-3} = -4,\ C^L_{2^L-4} = 9,$$

$$C^L_{2^L-5} = C^L_{2^L-6} = C^L_{2^L-7} = 0.$$

При этом $C^{L-1}_{2^{L-1}-3} = 4,\ C^{L-1}_{2^{L-1}-4} = 0$, и $D^{L-1}_{2^{L-1}-2} = -5,\ D^{L-1}_{2^{L-1}-3} = 1,\ D^{L-1}_{2^{L-1}-4} = 0$.

Коэффициенты левой и правой частей полученных разложений составляют соответствующие блоки матриц G^L и R^L, которые были введены в условиях леммы 1. □

Следствие 1. *Для любого уровня разрешения $L \geq 4$, матрица сдвинутого вейвлет-разложения кубических сплайнов удовлетворяет равенству*

$$\left[P^L \mid Q^L\right] R^L = G^L. \tag{12}$$

Доказательство. Из определения матрицы сдвинутого вейвлет-разложения следует, что

$$\left[\varphi^{L-1}(\cdot) \mid \psi^{L-1}(\cdot)\right] = \varphi^L(\cdot)\left[P^L \mid Q^L\right].$$

Подставляя полученное разложение в равенство (9) и учитывая линейную независимость базисных сплайнов, приходим к утверждению следствия 1. □

Предложение 1. *Для $L = 3$ равенство (12) проверяется прямым вычислением с использованием примера (8) и определений*

$$G^3 = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -\frac{296}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 2 & 12 & 54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 12 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{296}{3} & -4 & 8 \end{bmatrix},$$

$$R^3 = \left[\begin{array}{ccccccc} 12 & 4 & -108 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 72 & 16 & 72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -108 & 4 & 12 \\ \hline 5 & -5 & -\frac{215}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 63 & 8 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 4 & 63 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{215}{3} & -5 & 5 \end{array}\right].$$

После этого решение системы уравнений (7) можно записать в матричной форме как:

$$\left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}}\right] = \left[P^L \mid Q^L\right]^{-1} C^L = R^L \left(G^L\right)^{-1} C^L.$$

Таким образом, вместо того, чтобы непосредственно решать систему вида (7), мы можем решить систему

$$G^L \Xi^L = C^L \tag{13}$$

относительно некоторых значений Ξ^L и после этого просто вычислить значения C^{L-1} и D^{L-1} с использованием линейного преобразования $\left[\dfrac{C^{L-1}}{D^{L-1}}\right] = R^L \Xi^L$.

Тем не менее, нам еще нужно разделить систему (13) на четные и нечетные номера, чтобы свести алгоритм к решению трехдиагональной системы уравнений, и адаптировать результат, обеспечив строгое диагональное преобладание, что предпочтительно для устойчивости вычислений. Мы достигнем этой цели, объединив метод трехдиагональной прогонки с методом неполной редукции, изученным в [19, Гл.IV, §3].

Следующее утверждение формально описывает последовательность вычисления смещенных вейвлет-коэффициентов на основе известных коэффициентов разложения сплайна на произвольной сетке Δ^L, $L \geq 3$.

Теорема 2. *Предположим, что значения* $\Xi^L = [\xi_{-1}, \ldots, \xi_{2^L-3}]^T$ *вычислены из выражений:*

$$\xi_i = \frac{1}{9} C_i^L, \ i = 0, 2^L - 4; \tag{14}$$

$$\xi_i = \frac{1}{2} C_i^L, \ i = 2, 4, \ldots, 2^L - 6; \tag{15}$$

и из решения уравнений:
a) $L > 3$:

$$\begin{aligned}
446\xi_3 + 150\xi_5 &= 27C_{-1}^L + 12C_0^L - 18C_1^L - \\
&\quad -48C_2^L + 50C_3^L - 75C_4^L, \\
6\xi_{i-2} + 20\xi_i + 6\xi_{i+2} &= 2C_i^L - 3C_{i-1}^L - 3C_{i+1}^L, \\
&\quad i = 5, 7, \ldots, 2^L - 9, \\
150\xi_{i-2} + 446\xi_i &= 27C_{i+4}^L + 12C_{i+3}^L - 18C_{i+2}^L - \\
&\quad -48C_{i+1}^L + 50C_i^L - 75C_{i-1}^L, \\
&\quad i = 2^L - 7;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
300\xi_1 &= 2C_1^L - 3C_{-1}^L - 3C_2^L - \frac{4}{3}C_0^L - 6\xi_3, \\
300\xi_{2^L-5} &= 2C_{2^L-5}^L - 3C_{2^L-3}^L - 3C_{2^L-6}^L - \\
&\quad -\frac{4}{3}C_{2^L-4}^L - 6\xi_{2^L-7}, \\
12\xi_{-1} &= C_1^L - \frac{3}{2}C_2^L - 2\xi_1 - 3\xi_3, \\
12\xi_{2^L-3} &= C_{2^L-5}^L - \frac{3}{2}C_{2^L-6}^L - 2\xi_{2^L-5} - \\
&\quad -3\xi_{2^L-7};
\end{aligned}$$

b) $L = 3:$

$$\begin{aligned}
300\xi_1 + 108\xi_3 &= 2C_1^L - 3C_{-1}^L - 3C_2^L - \frac{4}{3}C_0^L,\\
108\xi_1 + 300\xi_3 &= 2C_3^L - 3C_5^L - 3C_2^L - \frac{4}{3}C_4^L;\\
12\xi_{-1} &= C_1^L - \frac{3}{2}C_2^L - 2\xi_1 - 54\xi_3,\\
12\xi_5 &= C_3^L - \frac{3}{2}C_2^L - 2\xi_3 - 54\xi_1.
\end{aligned}$$

Тогда вектор сплайн-коэффициентов размера $\left(2^{L-1} - 1\right)$ *на разреженной сетке* Δ^{L-1} *является результатом умножения матрицы* A^L *размера* $\left(2^{L-1} - 1\right) \times \left(2^L - 1\right)$ *на вектор* Ξ^L *размера* $\left(2^L - 1\right)$*, а вектор смещенных вейвлет-коэффициентов размера* 2^{L-1} *равен такому же произведению с матрицей* B^L *размера* $2^{L-1} \times \left(2^L - 1\right)$*.*

Доказательство. Теорема 2 доказывается прямой подстановкой в схему расщепления (12), (13). Например, умножим вторую строку матрицы $\left[P^L \mid Q^L\right]$ на первые три столбца матрицы R^L:

$$\frac{11}{16} \cdot 12 - 1.35 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 0, \ \frac{11}{16} \cdot 4 + 1.35 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 9,$$

$$\frac{11}{16} \cdot (-108) + \frac{1}{8} \cdot 72 + 1.35 \cdot \frac{215}{3} - \frac{1}{2} \cdot 63 = 0.$$

Эти равенства означают, что ξ_0 равно $\frac{1}{9}C_0^L$ в процессе решения системы (13) с матрицей G^L, полученной по формуле (12). Такие же манипуляции с первой строкой матрицы $\left[P^L \mid Q^L\right]$ дают значения

$$\frac{1}{4} \cdot 12 + 1 \cdot 5 = 8, \ \frac{1}{4} \cdot 4 - 1 \cdot 5 = -4,$$

$$\frac{1}{4} \cdot (-108) - 1 \cdot \frac{215}{3} = -\frac{296}{3}.$$

Перемещая значение $-4\xi_0 = -\frac{4}{9}C_0^L$ в правую часть получившегося уравнения, мы получаем первое уравнение системы относительно значений Ξ^L :

$$8\xi_{-1} - \frac{296}{3}\xi_1 = C_{-1}^L + \frac{4}{9}C_0^L.$$

Такие же манипуляции с четвертой строкой матрицы $\left[P^L \mid Q^L\right]$ гарантируют, что ξ_2 равно $\frac{1}{2}C_2^L$ в процессе решения системы (13) с матрицей G^L. Такие же манипуляции с третьей строкой матрицы $\left[P^L \mid Q^L\right]$ дают значения

$$\frac{1}{2} \cdot 12 + 0.6 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 12, \ \frac{1}{2} \cdot 4 - 0.6 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 0,$$

$$\frac{1}{2} \cdot (-108) + \frac{1}{2} \cdot 72 - 0.6 \cdot \frac{215}{3} + 1 \cdot 63 = 2,$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 3, \ \frac{1}{2} \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 3.$$

Перемещая значение $3\xi_2 = \dfrac{3}{2}C_2^L$ в правую часть полученного уравнения, получаем второе уравнение системы относительно значений Ξ^L :

$$12\xi_{-1} + 2\xi_1 + 3\xi_3 = C_1^L - \frac{3}{2}C_2^L$$

и так далее. Например, следующие по порядку уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} 54\xi_1 + 10\xi_3 + 3\xi_5 &= C_3^L - \frac{3}{2}C_2^L - \frac{3}{2}C_4^L, \\ 3\xi_3 + 10\xi_5 + 3\xi_7 &= C_5^L - \frac{3}{2}C_4^L - \frac{3}{2}C_6^L, \\ &\cdots \end{aligned}$$

Последние уравнения зеркальны уравнениям, полученным выше. Преимущество полученной системы, в отличие от исходной, состоит в том, что в ней всего три непустых диагонали. Это позволяет применить к ее решению широко известный метод прогонки [19, Гл.II, §1]. Тем не менее, устойчивость этого метода не гарантируется, так как свойство диагонального доминирования не выполняется в первых трех и последних трех уравнениях. Умножим первое уравнение системы на (-3), а второе на 2 и сложим. В результате неизвестное ξ_{-1} исключается, и полученное уравнение принимает вид

$$300\xi_1 + 6\xi_3 = 2C_1^L - 3C_{-1}^L - 3C_2^L - \frac{4}{3}C_0^L.$$

Умножим полученное уравнение на (-9), а третье уравнение на 50 и сложим. В результате неизвестное ξ_1 исключается, и полученное уравнение принимает вид

$$446\xi_3 + 150\xi_5 = 50C_3^L - 48C_2^L - 75C_4^L - 18C_1^L + 27C_{-1}^L + 12C_0^L.$$

Аналогичные преобразования применяются к последним трем уравнениям системы. Таким образом, условия (14), (15) и а) теоремы 2 могут быть записаны в матричной форме как уравнение (13). В то же время полученная система имеет строгое диагональное преобладание во всех уравнениях. Следовательно, метод исключения устойчив в применении к данной системе. Случай б) немедленно следует из системы (7) с $L = 3$ после переименования переменных и перестановки слагаемых для получения формы с диагональным преобладанием. Следовательно, условия теоремы 2 дают решение системы (7). □

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать основную теорему 1. Воспользовавшись тем, что в каждой четной строке матрицы G^L содержится лишь один ненулевой элемент, будем выполнять процедуру вычисления определителя $\det G^L$ методом последовательных разложений по элементам данных строк. В результате получаем, что

$$\det G^L = 9^2 \cdot (2^{L-1} - 3) \cdot \det G'.$$

Здесь G' – матрица, полученная из матрицы G^L вычеркиванием строк и столбцов, содержащих единственный ненулевой элемент в каждой четной строке. Но матрица G' – это именно та матрица, которая получается при расщеплении системы уравнений (13) на четные и нечетные узлы, для которой мы только что доказали, что она приводится эквивалентными преобразованиями к трехдиагональной системе уравнений со строгим диагональным преобладанием. А такие матрицы, как хорошо известно [19, Гл.II, §1], не вырождены и, значит, имеют неравный нулю определитель. □

По сравнению с ранее известным быстрым алгоритмом дискретного вейвлет-преобразования [13], этот алгоритм позволяет получить сдвинутые коэффициенты вейвлет-разложения другим способом с сопоставимым количеством операций. Достоинствами нового алгоритма являются его свойство устойчивости и простота использования в программах, поскольку на каждом этапе решается одна система линейных уравнений (вместо двух систем в известном алгоритме) с матрицей, имеющей строгое диагональное преобладание.

4. Рекомендации для практического использования

В реальной ситуации вейвлет-анализа дискретного сигнала однородные граничные условия, необходимые для построения сдвинутого вейвлет-разложения, не выполняются. Следовательно, перед применением описанного выше алгоритма необходимо вычесть из сеточных значений значения кубического интерполяционного многочлена Эрмита $f(a) + (x-a)[f'(a) + t(B+tA)]$ [20], где

$$\begin{aligned} A &= -2(f(b)-f(a))/(b-a) + f'(a) + f'(b), \\ B &= -A + (f(b)-f(a))/(b-a) - f'(a), \\ t &= (x-a)/(b-a). \end{aligned}$$

После смещенного вейвлет-анализа полученных разностей и реконструкции по смещенным вейвлет-коэффициентам аппроксимирующего сплайна третьей степени к нему добавляются значения этого многочлена.

Кроме того, на первом шаге алгоритма вместо исходных коэффициентов разложения на основе B-сплайнов можно использовать сеточные значения функции, которые мало от них отличаются. В случае вейвлет-обработки данных на равномерной сетке этот прием очень популярен; в мировой литературе это называется "Wavelet Crime" [21, стр. 232], [22], [23].

5. Результаты численных экспериментов

Пусть $L = 4$ и дискретный сигнал представляется в виде 17 значений аналитической функции $f(x) = (x^2-16)^2$, заданных в точках $\Delta^4 : x = -4, -3.5, \ldots, 4$. Поскольку в точках ± 4 выполнены необходимые для построения вейвлет-разложения однородные краевые условия, есть все для того, чтобы исследовать применение построенных алгоритмов к задаче вейвлет-анализа. Заодно проверим, насколько допустимо на первом шаге алгоритма вейвлет-разложения считать левые части уравнений (7) значениями интерполяционного сплайна, т.е. что они равны самим значениям исходной функции в узлах густой сетки.

После последовательного выполнения процедуры вейвлет-анализа, на последнем этапе $L = 2$ ограничимся отбраковкой всех полученных к этому моменту коэффициентов вейвлет-разложения, достигая этим сжатие поступившего цифрового сигнала с коэффициентом $K = 17/3 = 5.7$.

Восстановление аппроксимационного сплайна осуществляется применением аналитической формулы (3):

$$S^2(v) = C^2_{-1}\varphi_b(v) + C^2_0\varphi_3(v) + C^2_1\varphi_b(4-v),\ 0 \le v \le 4. \tag{16}$$

Таблица 1. Сравнительные характеристики алгоритмов вейвлет-обработки.

Исходные данные	"Wavelet Crime"		Интерполяция	
Тип вейвлета	"2"	W	"2"	W
СКО	2.348	1.884	0.551	0.66

С учетом выражения (16) получаем, что среднеквадратическая ошибка аппроксимации оценивается выражением

$$\text{СКО} = \left(\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} \left(f(x_i) - S^2(x_i/2+2) \right)^2 \right)^{1/2}.$$

В Табл. 1 в столбцах, помеченных символом "2" , представлены варианты расчета: 1) по схеме с заданием исходных данных из сеточных значений; 2) по схеме с заданием исходных данных из решения интерполяционной задачи; для сравнения, в столбцах, помеченных символом W, представлены результаты расчета по ранее известному быстрому алгоритму дискретного вейвлет-преобразования [13].

Таким образом, использование предварительной обработки исходного цифрового материала в виде однократного решения интерполяционной задачи в обоих случаях приводит к повышению точности аппроксимации. Но для алгоритма W [13], построенного на основе интерполяции на прореженных сетках, повышение точности менее существенно и, в итоге, уступает по этому показателю изученному в статье алгоритму. Возможно, в дальнейшем потребуется исследовать построенную схему на более обширном экспериментальном материале, например, сравнить аппроксимацию производных дискретно заданной функции.

6. Заключение

Рассмотрено применение авторской процедуры четно-нечетного разбиения определяющей системы сдвинутого вейвлет-разложения на базис B-сплайнов. Процедура для случая сдвинутых вейвлетов Эрмита применяется для аппроксимации дискретно заданных функций, не требуя при этом задания значений производных, что важно для практики. Распространение предложенного подхода на сплайны высшего порядка и нулевые моменты высших порядков может обосновать новые возможности для разработки устойчивых алгоритмов построения и применения сплайн-вейвлетов.

7. Благодарности

Хотелось бы отметить в заключение стимулирующее участие рецензента.

References

[1] C.K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, Boston, 1992. Zbl 0925.42016
[2] M.W. Frazier, *An introduction to wavelets through linear algebra*, Springer-Verlag, New York, 1999. Zbl 0968.42021

[3] M. Lyche, K. Mørken, E. Quak, *Theory and algorithms for non-uniform spline wavelets*, in Dyn, N. (ed.) et al., *Multivariate approximation and applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, 152–187. Zbl 1005.42024

[4] K. Koro, K. Abe, *Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis*, Eng. Anal. Bound. Elem., **25**:3 (2001), 149–164. Zbl 0981.65160

[5] I.Y. Novikov, V.Y. Protasov, M.A. Skopina, *Wavelet Theory*, Translations of Mathematical Monographs, **239**, AMS, Providence (RI), 2011. Zbl 1213.42002

[6] M. Jansen, *Non-equispaced B-spline wavelets*, Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., **14**:6 (2016), Article ID 1650056. Zbl 1356.42026

[7] D. Ĉerná, V. Finêk, *Cubic spline wavelets with complementary boundary conditions*, Appl. Math. Comput., **219**:4 (2012), 1853–1865. Zbl 1291.42028

[8] B. Han, Z. Shen, *Wavelets with Short Support*, SIAM J. Math. Anal., **38**:2 (2006), 530–556. Zbl 1119.42016

[9] D. Ĉerná, V. Finêk, *Cubic spline wavelets with short support for fourth-order problems*, Appl. Math. Comput., **243** (2014), 44–56. Zbl 1335.42041

[10] B.M. Shumilov, *Multiwavelets of the third-degree Hermitian splines orthogonal to cubic polynomials*, Mat. Model. 25, No. 4, 17-28 (2013). Zbl 1356.42027

[11] B.M. Shumilov, *Displaced Multiwavelets and Splitting Algorithms*, in *Advanced Engineering Materials and Modeling*, eds. A. Tiwari, N.A. Murugan, R. Ahuja, John Wiley & Sons, Ltd, Hoboken, NJ, USA, 2016, 435–494.

[12] F. Aràndiga, A. Baeza, R. Donat, *Discrete multiresolution based on hermite interpolation: computing derivatives*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **9**:2 (2004), 263–273. Zbl 1165.65312

[13] J. Wang, *Cubic spline wavelet bases of Sobolev spaces and multilevel interpolation*, Appl. Comput. Harmon. Anal., **3**:2 (1996), 154–163. Zbl 0855.41006

[14] B.M. Shumilov, *Semi-orthogonal spline-wavelets with derivatives and the algorithm with splitting*, Numer. Analysis Appl., **10**:1 (2017), 90–100. Zbl 1374.65224

[15] E.J. Stollnitz, T.D. DeRose, D.H. Salesin, *Wavelets for Computer Graphics*, The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics, 1996.

[16] C. De Boor, *A practical guide to splines*, Applied Mathematical Sciences, **27**, Springer-Verlag, New York, 1978. Zbl 0406.41003

[17] B.M. Shumilov, S.M. Matanov, *Supercompact cubic multiwavelets and algorithm with splitting*, 2011 International Conference on Multimedia Technology, 2011, 2636–2639.

[18] B.M. Shumilov, *Cubic multiwavelets orthogonal to polynomials and a splitting algorithm*, Numer. Analysis Appl., **6**:3 (2013), 247–259. Zbl 1299.65020

[19] A.A. Samarskii, E.S. Nikolaev, *Numerical methods for grid equations, Vol. I: Iterative methods*, Birkhauser, Basel, 1989. Zbl 0649.65054

[20] Z.M. Sulaimanov, B.M. Shumilov, *A splitting algorithm for the wavelet transform of cubic splines on a nonuniform grid*, Comput. Math. Math. Phys., **57**:10 (2017), 1577–1591. Zbl 1383.65015

[21] G. Strang, T. Nguyen, *Wavelets and filter banks*, Cambridge Press, Wellesley, 1996. Zbl 1254.94002

[22] P. Qian, B.A. Francis, *Solution of a wavelet crime*, in D. Miller (ed.) et al., *Topics in control and its applications. A tribute to Edward J. Davison. Papers from the workshop held in Toronto, Canada, June 29-30, 1998*, Springer, London, 1999, 143–156. Zbl 0993.65156

[23] W. Rakowski, *Prefiltering in Wavelet Analysis Applying Cubic B-Splines*, International Journal of Electronics and Telecommunications, **60**:4 (2014), 331–340.

Boris Mihailovich Shumilov
Tomsk State University of Architecture and Building,
2, Solyanaya sqr.,
Tomsk, 634003, Russia
Email address: sbm@tsuab.ru