

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

*Том 17, стр. 2068–2083 (2020)*

УДК 517.968

DOI 10.33048/semi.2020.17.138

MSC 45D05

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ  
УРАВНЕНИЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Б.Т. КАЛИМБЕТОВ, В.Ф. САФОНОВ, О.Д. ТУЙЧИЕВ

**Abstract.** The article considers a singularly perturbed integral equation with a slowly varying kernel and a rapidly oscillating coefficient. The main idea with which the construction of asymptotic solutions of such problems is carried out is the transition (by differentiating the original system with respect to the independent variable) to an equivalent integro-differential equation and the subsequent application of the S.A. Lomov's regularization method. In this paper, we have implemented the case of a singular perturbed integral equation containing (along with a slowly varying kernel and a slowly varying inhomogeneity) a rapidly varying coefficient of an unknown function. Previously, such integral equations were not considered from the standpoint of the regularization method. The presence of a rapidly oscillating coefficient significantly complicates the structure of the solution space for the corresponding iterative problems, which contain (in contrast to problems with slowly varying coefficients) nonlinear exponents of regularizing functions. Therefore, the study of the solvability of iterative problems must be carried out in the presence of both nonresonant and resonant spectral relations. All these issues are reflected in this work.

**Keywords:** singular perturbation, integral equation, rapidly oscillating coefficients, regularization, the space for solving iterative problems.

---

KALIMBETOV, B.T., SAFONOV, V.F., TUYCHIEV, O.D., SINGULAR PERTURBED INTEGRAL EQUATIONS WITH RAPIDLY OSCILLATION COEFFICIENTS.

© 2020 Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф., Туйчиев О.Д.

The work is supported by MES RK (grant AP05133858).

Received February, 14, 2020, published December, 15, 2020.

**§1. Постановка задачи и сведение уравнения (1) к интегро-дифференциальной задаче**

Рассмотрим сингулярно возмущенное семейство интегральных уравнений

$$L_\varepsilon y(t, \varepsilon) \equiv \varepsilon y - \int_{t_0}^t K(t, s)y(s, \varepsilon)ds - \varepsilon^2 g(t) \cos \frac{\beta(t)}{\varepsilon} y = h(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр,  $h(t)$ ,  $K(t, s)$  — известные функции,  $y(t)$  — неизвестная функция, а известные скалярные функции  $g(t)$ ,  $\beta(t)$  удовлетворяют условиям:  $g(t)|_{t=t_0} = 0, \beta'(t) > 0 (\forall t \in [t_0, T])$ . Наличие второй степени малого параметра при быстро осциллирующем коэффициенте обусловлено возможностью разрешимости итерационных задач развиваемого ниже алгоритма построения асимптотических решений уравнения (1). При развитии такого алгоритма важную роль играют существенно особые сингулярности в решении данного уравнения. Для описания их продифференцируем уравнение<sup>1</sup> (1) по  $t$ ; будем иметь

$$L_\varepsilon y(t, \varepsilon) \equiv \varepsilon y' - K(t, t)y - \int_{t_0}^t \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} y(s, \varepsilon)ds - \varepsilon^2 g'(t) \cos \frac{\beta(t)}{\varepsilon} y + \varepsilon g(t)\beta'(t) \sin \frac{\beta(t)}{\varepsilon} y = h'(t), \quad y(t_0, \varepsilon) = \frac{h(t_0)}{\varepsilon}. \quad (2)$$

Обозначим  $\lambda_1(t) \equiv K(t, t)$ ,  $G(t, s) \equiv \frac{\partial K(t, s)}{\partial t}$ , частоту быстро осциллирующего косинуса — через  $\beta'(t)$ . Тогда задачу (2) можно переписать в следующем виде:

$$L_\varepsilon y(t, \varepsilon) \equiv \varepsilon y' - \lambda_1(t)y - \int_{t_0}^t G(t, s)y(s, \varepsilon)ds - \varepsilon^2 g'(t) \cos \frac{\beta(t)}{\varepsilon} y + \varepsilon g(t)\beta'(t) \sin \frac{\beta(t)}{\varepsilon} y = h'(t), \quad y(t_0, \varepsilon) = \frac{h(t_0)}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Таким образом, уравнение (1) эквивалентно сингулярно возмущенной задаче для интегро-дифференциального уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами. Исследования таких задач проводились методом регуляризации [1-3], методам расщепления [4-8] (для обыкновенных дифференциальных уравнений). Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами были изучены в работах [9-15].

В дальнейшем функции  $\lambda_2(t) = -i\beta'(t)$ ,  $\lambda_3(t) = +i\beta'(t)$  будем называть спектром быстро осциллирующего коэффициента, а совокупность функций  $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)\}$  — спектром задачи (1).

Задачу (3) будем рассматривать при следующих предположениях:

- 1)  $g(t), \beta(t), h(t) \in C^\infty([t_0, T], \mathbb{R}^1)$ ,  $K(t, s) \in C^\infty(t_0 \leq s \leq t \leq T, \mathbb{R}^1)$ ;
- 2)  $g(t_0) = 0$ ,  $\lambda_1(t) \equiv K(t, t) < 0$ ,  $\beta'(t) > 0 \forall t \in [t_0, T]$ .

Поскольку все функции, входящие в уравнение (3) действительные, то спектр  $\{\lambda_j(t)\}$  удовлетворяет только следующим резонансным соотношениям ( $\mathbb{Z}_+$  —

---

<sup>1</sup> В работе [17] существенно особые сингулярности выделяются без применения операции дифференцирования. Однако в данном случае применение техники этой работы приводит к сложным выкладкам.

множество целых неотрицательных чисел):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 m_j \lambda_j(t) \equiv \lambda_i(t), i \in \{1, 2, 3\}, \\ \sum_{j=1}^3 m_j \lambda_j(t) \equiv 0, \\ |m| \equiv m_1 + m_2 + m_3 \geq 2, m_j \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n+1)\lambda_2(t) + n\lambda_3(t) = \lambda_2(t), n\lambda_2(t) + (n+1)\lambda_3(t) = \lambda_3(t), \\ \lambda_1(t) + n\lambda_2(t) + n\lambda_3(t) = \lambda_1(t), \\ n\lambda_2(t) + n\lambda_3(t) = 0 (n \in \mathbb{N}, \forall t \in [t_0, T]), \end{cases}$$

поэтому множества резонансных мультииндексов имеют вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{m = (m_1, m_2, m_3) : m = (1, n, n), n \in \mathbb{N}\}, \\ \Gamma_2 &= \{m = (m_1, m_2, m_3) : m = (0, n+1, n), n \in \mathbb{N}\}, \\ \Gamma_3 &= \{m = (m_1, m_2, m_3) : m = (0, n, n+1), n \in \mathbb{N}\}, \\ \Gamma_0 &= \{m = (m_1, m_2, m_3) : m = (0, n, n), n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Перейдем к разработке алгоритма, позволяющего строить регуляризованные [1,2] асимптотические решения интегро-дифференциальной задачи (3) (а значит, и исходного уравнения (1)).

## §2. Регуляризация задачи (3) и построение расширенной системы

Обозначим через  $\sigma_j = \sigma_j(\varepsilon)$ , не зависящие от  $t$  величины  $\sigma_1 = e^{-\frac{i}{\varepsilon}\beta(t_0)}$ ,  $\sigma_2 = e^{+\frac{i}{\varepsilon}\beta(t_0)}$ . Введем регуляризирующие переменные:

$$\tau_i = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_i(s) ds \equiv \frac{\psi_i(t)}{\varepsilon}, \quad i = \overline{1, 3},$$

по спектру  $\{\lambda_j(t)\}$  и вместо задачи (3) будем рассматривать следующую задачу для функции  $\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)$  большего числа переменных:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon \tilde{y}(t, \tau, \varepsilon) &\equiv \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_i} - \lambda_1(t) \tilde{y} - \int_{t_0}^t G(t, s) \tilde{y}(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon) ds - \\ &- \varepsilon^2 \frac{g'(t)}{2} (e^{\tau_2} \sigma_1 + e^{\tau_3} \sigma_2) \tilde{y} + \varepsilon \frac{g(t) \beta'(t)}{2i} (e^{\tau_2} \sigma_1 - e^{\tau_3} \sigma_2) \tilde{y} = h'(t), \\ \tilde{y}(t_0, 0, \varepsilon) &= \frac{h(t_0)}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ ,  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ , причем  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  наряду  $t$  являются независимыми переменными. Ясно, что если  $\tilde{y} = \tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)$  — решение задачи (4), то вектор-функция  $y = \tilde{y}(t, \psi(t)/\varepsilon, \varepsilon)$  является точным решением задачи (3), поэтому задача (4) является расширенной по отношению к задаче (3). Однако ее нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не произведена регуляризация интегрального члена

$$J(\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon) |_{t=s, \tau=\psi(s)/\varepsilon}) = \int_{t_0}^t G(t, s) \tilde{y}(s, \psi(s)/\varepsilon, \varepsilon) ds.$$

Для регуляризации интегрального оператора введем класс  $M_\varepsilon$ , асимптотически инвариантный относительно оператора  $J$  (см. [1], стр. 62). Напомним соответствующее понятие.

**Определение.** Говорят, что класс  $M_\varepsilon$  асимптотически инвариантен (при  $\varepsilon \rightarrow +0$ ) относительно оператора  $P_0$ , если выполнены следующие условия:

- 1)  $M_\varepsilon \subset D(P_0)$  при каждом фиксированном  $\varepsilon \neq 0$  ( $D(P_0)$  — область определения оператора  $P_0$ );
- 2) образ  $P_0g(t, \varepsilon)$  любого элемента  $g(t, \varepsilon) \in M_\varepsilon$  разлагается в ряд

$$P_0g(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n g_n(t, \varepsilon),$$

сходящийся асимптотически при  $\varepsilon \rightarrow +0$  (равномерно по  $t \in [t_0, T]$ ).

Из этого определения видно, что класс  $M_\varepsilon$  зависит от пространства  $U$ , в котором определен оператор  $P_0$ . В нашем случае  $P_0 = J$ . Введем обозначения:

$$(m, \lambda(t)) \equiv ((m_1, m_2, m_3), (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))) \triangleq \sum_{j=1}^3 m_j \lambda_j(t),$$

$$(m, \tau) \equiv ((m_1, m_2, m_3), (\tau_1, \tau_2, \tau_3)) \triangleq \sum_{j=1}^3 m_j \tau_j, \quad |m| \triangleq \sum_{j=1}^3 m_j,$$

В качестве пространства  $U$  возьмём пространство функций  $y(t, \tau, \sigma)$ , представимых суммами<sup>2</sup>

$$y(t, \tau, \sigma) = y_0(t, \sigma) + \sum_{i=1}^3 y_i(t, \sigma) e^{\tau_i} +$$

$$+ \sum_{2 \leq |m| \leq N_y}^* y^m(t, \sigma) e^{(m, \tau)} + \sum_{1 \leq |m| \leq N_y}^* y^{e_1+m}(t, \sigma) e^{(e_1+m, \tau)}, \quad (5)$$

$$y_i(t, \sigma), y^m(t, \sigma), y^{e_1+m}(t, \sigma) \in C^\infty([t_0, T], \mathbb{C}^1),$$

где  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ , а звездочка  $*$  над знаком суммы указывает на то, что в ней суммирование происходит только по нерезонансным мультииндексам  $m = (m_1, m_2, m_3)$  (т. е.  $m = (m_1, m_2, m_3)$  с  $|m| \geq 2$  таковы, что  $m = (m_1, m_2, m_3) \notin \Gamma_j$  ( $j = 0, 2, 3$ ),  $e_1 + m = (m_1 + 1, m_2, m_3) \notin \Gamma_1$ ).

Отметим, что здесь степень  $N_z$  многочлена  $y(t, \tau, \sigma)$  относительно экспонент  $e^{\tau_i}$  зависит от элемента  $y$ . Кроме того, элементы пространства  $U$  зависят от ограниченных по  $\varepsilon > 0$  постоянных  $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon)$  и  $\sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon)$ , которые не влияют на разработку излагаемого ниже алгоритма, поэтому впредь в записи элемента (5) этого пространства  $U$  ради краткости зависимость от  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  опускаем. Принята также следующая терминология: экспоненты  $e^{(m, \tau)}$ ,  $e^{(e_1+m, \tau)}$  с мультииндексами  $m = (m_1, m_2, m_3)$ , участвующими в определении пространства  $U$ , называется *нерезонансными*, а экспоненты  $e^{(m, \tau)}$ ,  $e^{(e_1+m, \tau)}$  с мультииндексами  $m = (m_1, m_2, m_3)$  такими, что  $m = (m_1, m_2, m_3) \in \Gamma_j$  ( $j = 0, 2, 3$ ),  $e_1 + m = (m_1 + 1, m_2, m_3) \in \Gamma_1$  — *резонансными экспонентами*.

Покажем сначала, что класс  $M_\varepsilon = U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$  асимптотически инвариантен относительно оператора  $J$ . Образ оператора  $J$  на элементе (5) пространства  $U$

<sup>2</sup> В выражениях типа  $y^m(t, \sigma)$  через  $m = (m_1, m_2, m_3)$  обозначен верхний индекс; не путать с показателем степени.

имеет вид

$$\begin{aligned}
 J(y(t, \tau, \sigma) |_{t=s, \tau=\psi(s)/\varepsilon}) &= \int_{t_0}^t G(t, s) y(s, \psi(s)/\varepsilon, \sigma) ds = \int_{t_0}^t G(t, s) y_0(s, \sigma) ds + \\
 &+ \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^t G(t, s) y_i(s, \sigma) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s \lambda_i(\theta) d\theta} ds + \\
 &+ \sum_{2 \leq |m| \leq N_y}^* \int_{t_0}^t G(t, s) y^m(s, \sigma) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (m, \lambda(\theta)) d\theta} ds + \\
 &+ \sum_{1 \leq |m| \leq N_y}^* \int_{t_0}^t G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (e_1+m, \lambda(\theta)) d\theta} ds.
 \end{aligned}$$

Для каждого слагаемого первой суммы будем иметь:

$$\begin{aligned}
 J_i(t, \varepsilon) &\equiv \int_{t_0}^t G(t, s) y_i(s, \sigma) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s \lambda_i(\theta) d\theta} ds = \varepsilon \int_{t_0}^t \frac{G(t, s) y_i(s, \sigma)}{\lambda_i(s)} d e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s \lambda_i(\theta) d\theta} = \\
 &= \varepsilon \left( \frac{G(t, s) y_i(s, \sigma)}{\lambda_i(s)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s \lambda_i(\theta) d\theta} \right) \Bigg|_{s=t_0}^{s=t} - \varepsilon \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{G(t, s) y_i(s, \sigma)}{\lambda_i(s)} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s \lambda_i(\theta) d\theta} ds = \\
 &= \varepsilon \left[ \frac{G(t, t) y_i(t, \sigma)}{\lambda_i(t)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_i(s) ds} - \frac{G(t, t_0) y_i(t_0, \sigma)}{\lambda_i(t_0)} \right] - \\
 &\quad - \varepsilon \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{G(t, s) y_i(s, \sigma)}{\lambda_i(s)} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s \lambda_i(\theta) d\theta} ds.
 \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс далее, получим разложение

$$\begin{aligned}
 J_i(t, \varepsilon) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \left[ \left( I_i^\nu (G(t, s) y_i(s, \sigma)) \right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_i(\theta) d\theta} - \right. \\
 &\quad \left. - \left( I_i^\nu (G(t, s) y_i(s, \sigma)) \right)_{s=t_0} \right],
 \end{aligned}$$

где  $I_i^0 = \frac{1}{\lambda_i(s)}$ ,  $I_i^\nu = \frac{1}{\lambda_i(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_i^{\nu-1}$  ( $\nu \geq 1$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ).

Применяя операцию интегрирования по частям к интегралам

$$\begin{aligned}
 J_m(t, \varepsilon) &\equiv \int_{t_0}^t G(t, s) y^m(s, \sigma) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (m, \lambda(\theta)) d\theta} ds, \\
 J_{e_1+m}(t, \varepsilon) &\equiv \int_{t_0}^t G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (e_1+m, \lambda(\theta)) d\theta},
 \end{aligned}$$

отметим, что для всех нерезонансных мультииндексов  $m = (m_1, m_2, m_3)$  выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
 (m, \lambda(t)) &\equiv m_1 \lambda_1(t) + m_2 \lambda_2(t) + m_3 \lambda_3(t) \neq 0, \\
 (e_1 + m, \lambda(t)) &\equiv (m_1 + 1) \lambda_1(t) + m_2 \lambda_2(t) + m_3 \lambda_3(t) \neq 0,
 \end{aligned}$$

поэтому интегрирование по частям в интегралах  $J_m(t, \varepsilon)$ ,  $J_{e_1+m}(t, \varepsilon)$  возможно. Выполнив его, будем иметь:

$$\begin{aligned} J_m(t, \varepsilon) &= \int_{t_0}^t G(t, s) y^m(s, \sigma) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (m, \lambda(\theta)) d\theta} ds = \\ &= \varepsilon \int_{t_0}^t \frac{G(t, s) y^m(s, \sigma)}{(m, \lambda(s))} de^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (m, \lambda(\theta)) d\theta} = \\ &= \varepsilon \frac{G(t, s) y^m(s, \sigma)}{(m, \lambda(s))} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (m, \lambda(\theta)) d\theta} \Big|_{s=t_0}^{s=t} - \\ &\quad - \varepsilon \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{G(t, s) y^m(s, \sigma)}{(m, \lambda(s))} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (m, \lambda(\theta)) d\theta} ds = \\ &= \varepsilon \left[ \frac{G(t, t) y^m(t, \sigma)}{(m, \lambda(t))} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (m, \lambda(\theta)) d\theta} - \frac{G(t, t_0) y^m(t_0, \sigma)}{(m, \lambda(t_0))} \right] - \\ &\quad - \varepsilon \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{G(t, s) y^m(s, \sigma)}{(m, \lambda(s))} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (m, \lambda(\theta)) d\theta} ds. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс далее, получим разложение

$$J_m(t, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \left[ (I_m^\nu (G(t, s) y^m(s, \sigma)))_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (m, \lambda(\theta)) d\theta} - (I_m^\nu (G(t, s) y^m(s, \sigma)))_{s=t_0} \right],$$

где  $I_m^0 = \frac{1}{(m, \lambda(s))}$ ,  $I_m^\nu = \frac{1}{(m, \lambda(s))} \frac{\partial}{\partial s} I_m^{\nu-1} (\nu \geq 1, |m| \geq 2)$ .

Та же операция приводит к следующим вычислениям:

$$\begin{aligned} J_{e_1+m}(t, \varepsilon) &= \int_{t_0}^t G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (e_1+m, \lambda(\theta)) d\theta} ds = \\ &= \varepsilon \int_{t_0}^t \frac{G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma)}{(e_1+m, \lambda(s))} de^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (e_1+m, \lambda(\theta)) d\theta} = \\ &= \varepsilon \left[ \frac{G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma)}{(e_1+m, \lambda(s))} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (e_1+m, \lambda(\theta)) d\theta} \Big|_{s=t_0}^{s=t} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma)}{(e_1+m, \lambda(s))} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (e_1+m, \lambda(\theta)) d\theta} ds \right] = \\ &= \varepsilon \left[ \frac{G(t, t) y^{e_1+m}(t, \sigma)}{(e_1+m, \lambda(t))} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (e_1+m, \lambda(\theta)) d\theta} - \frac{G(t, t_0) y^{e_1+m}(t_0, \sigma)}{(e_1+m, \lambda(t_0))} \right] - \\ &\quad - \varepsilon \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma)}{(e_1+m, \lambda(s))} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s (e_1+m, \lambda(\theta)) d\theta} ds. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс далее, получим разложение

$$J_{e_1+m}(t, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \left[ \left( I_m^\nu \left( G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma) \right) \right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (e_1+m, \lambda(\theta)) d\theta} - \right. \\ \left. - \left( I_m^\nu \left( G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma) \right) \right)_{s=t_0} \right],$$

где  $I_{e_1+m}^0 = \frac{1}{(e_1+m, \lambda(s))}$ ,  $I_m^\nu = \frac{1}{(e_1+m, \lambda(s))} \frac{\partial}{\partial s} I_{e_1+m}^{\nu-1}$  ( $\nu \geq 1$ ,  $|m| \geq 1$ ),

Значит, образ оператора  $J$  на элементе (5) пространства  $U$  представляется в виде ряда

$$J(y(t, \tau, \sigma)|_{t=s, \tau=\psi(s)/\varepsilon}) = \int_{t_0}^t G(t, s) y_0(s, \sigma) ds + \\ + \sum_{i=1}^3 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \left[ \left( I_i^\nu \left( G(t, s) y_i(s, \sigma) \right) \right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_i(\theta) d\theta} - \right. \\ \left. - \left( I_i^\nu \left( G(t, s) y_i(s, \sigma) \right) \right)_{s=t_0} \right] + \\ + \sum_{2 \leq |m| \leq N_y}^* \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \left[ \left( I_m^\nu \left( G(t, s) y^m(s, \sigma) \right) \right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (m, \lambda(\theta)) d\theta} - \right. \\ \left. - \left( I_m^\nu \left( G(t, s) y^m(s, \sigma) \right) \right)_{s=t_0} \right] + \\ + \sum_{1 \leq |m| \leq N_y}^* \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \left[ \left( I_{e_1+m}^\nu \left( G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma) \right) \right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (e_1+m, \lambda(\theta)) d\theta} - \right. \\ \left. - \left( I_{e_1+m}^\nu \left( G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma) \right) \right)_{s=t_0} \right].$$

Нетрудно показать (см., например, [16], стр. 291–294), что этот ряд сходится асимптотически при  $\varepsilon \rightarrow +0$  (равномерно по  $t \in [t_0, T]$ ). Это означает, что класс  $M_\varepsilon$  асимптотически инвариантен (при  $\varepsilon \rightarrow +0$ ) относительно оператора  $J$ .

Введем операторы  $R_\nu : U \rightarrow U$ , действующие на каждый элемент  $y(t, \tau, \sigma) \in U$  вида (5) по закону:

$$R_0 y(t, \tau, \sigma) = \int_{t_0}^t G(t, s) y_0(s, \sigma) ds, \quad (6_0)$$

$$R_1 y(t, \tau, \sigma) = \sum_{i=1}^3 \left[ \left( I_i^0 \left( G(t, s) y_i(s, \sigma) \right) \right)_{s=t} e^{\tau_i} - \left( I_i^0 \left( G(t, s) y_i(s, \sigma) \right) \right)_{s=t_0} \right] + \\ + \sum_{2 \leq |m| \leq N_y}^* \left[ \left( I_m^0 \left( G(t, s) y^m(s, \sigma) \right) \right)_{s=t} e^{(m, \tau)} - \left( I_m^0 \left( G(t, s) y^m(s, \sigma) \right) \right)_{s=t_0} \right] + \quad (6_1) \\ + \sum_{1 \leq |m| \leq N_y}^* \left[ \left( I_{e_1+m}^0 \left( G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma) \right) \right)_{s=t} e^{(e_1+m, \tau)} - \right. \\ \left. - \left( I_{e_1+m}^0 \left( G(t, s) y^{e_1+m}(s, \sigma) \right) \right)_{s=t_0} \right], \\ R_{\nu+1} y(t, \tau, \sigma) = \sum_{i=1}^3 (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \left[ \left( I_i^\nu \left( G(t, s) y_i(s, \sigma) \right) \right)_{s=t} e^{\tau_i} - \right. \\ \left. - \left( I_i^\nu \left( G(t, s) y_i(s, \sigma) \right) \right)_{s=t_0} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{2 \leq |m| \leq N_y}^* (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \left[ (I_m^\nu (G(t, s)y^m(s, \sigma)))_{s=t} e^{(m, \tau)} - \right. \\
 & \quad \left. - (I_m^\nu (G(t, s)y^m(s, \sigma)))_{s=t_0} \right] + \tag{6_{\nu+1}} \\
 & + \sum_{1 \leq |m| \leq N_y}^* \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \left[ (I_{e_1+m}^\nu (G(t, s)y^{e_1+m}(s, \sigma)))_{s=t} e^{(e_1+m, \tau)} - \right. \\
 & \quad \left. - (I_{e_1+m}^\nu (G(t, s)y^{e_1+m}(s, \sigma)))_{s=t_0} \right].
 \end{aligned}$$

Операторы  $R_\nu : U \rightarrow U$ , называется операторами порядка по той причине, что они в выражении  $Jy(t, \tau, \sigma)$  выделяют сумму членов порядка  $\nu$  относительно параметра  $\varepsilon$ .

Пусть теперь  $\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)$  — произвольная непрерывная по  $(t, \tau) \in [t_0, T] \times \{\tau : \text{Re} \tau_j \leq 0, j = \overline{1, 3}\}$  функция, имеющая асимптотическое разложение

$$\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, \tau), \quad y_k(t, \tau) \in U, \tag{7}$$

сходящееся при  $\varepsilon \rightarrow +0$  (равномерно по  $(t, \tau) \in [t_0, T] \times \{\tau : \text{Re} \tau_j \leq 0, j = \overline{1, 3}\}$ ).

Это означает, что для *любого фиксированного*  $N = -1, 0, 1, \dots$  найдется постоянная  $C_N > 0$ , не зависящая от  $\varepsilon, t, \tau$  и постоянная  $\delta_N > 0$  такие, что при  $0 < |\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta_N$  имеет место неравенство

$$\left\| \tilde{y}(t, \tau, \varepsilon) - \sum_{k=-1}^N \varepsilon^k y_k(t, \tau) \right\|_{C[0, T]} \leq C_N \varepsilon^{N+1}$$

( $\delta_N > 0$  — достаточно малó). Тогда образ  $J\tilde{y}$  этой функции разлагается в асимптотический ряд

$$\begin{aligned}
 J(\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}) & = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k J(y_k(t, \tau)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}) = \\
 & = \sum_{r=-1}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{s=-1}^r R_{r-s} y_s(t, \tau)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Это равенство является основанием для введения расширения оператора  $J$  на рядах вида (7):

$$\tilde{J}\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon) \equiv \tilde{J} \left( \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, \tau) \right) \triangleq \sum_{r=-1}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{s=-1}^r R_{r-s} y_s(t, \tau).$$

Хотя оператор  $\tilde{J}$  определен формально, его полезность очевидна, так как на практике обычно строят  $N$ -е приближение асимптотического решения уравнения (3), в котором будут участвовать лишь  $N$ -е частичные суммы ряда (7), имеющие не формальный, а истинный смысл. Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходному уравнению (2):

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_\varepsilon \tilde{y}(t, \tau, \varepsilon) & \equiv \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_i} - \lambda_1(t) \tilde{y} - \tilde{J}\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{g'(t)}{2} (e^{\tau_2} \sigma_1 + \\
 & + e^{\tau_3} \sigma_2) \tilde{y} + \varepsilon \frac{g(t)\beta'(t)}{2i} (e^{\tau_2} \sigma_1 - e^{\tau_3} \sigma_2) \tilde{y} = h'(t), \quad y(t_0, 0, \varepsilon) = \frac{h(t_0)}{\varepsilon}. \tag{8}
 \end{aligned}$$

**§3. Итерационные задачи и их разрешимость в пространстве  $U$ .  
Теорема об оценке остаточного члена**

Будем определять решение задачи (8) в виде ряда (7). После приравнивая коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  (с учетом формул (6<sub>0</sub>), (6<sub>1</sub>), ..., (6 <sub>$\nu$</sub> )) получим следующие итерационные задачи:

$$L_0 y_{-1}(t, \tau, \sigma) \equiv \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \frac{\partial y_{-1}}{\partial \tau_i} - \lambda_1(t) y_{-1} - \int_{t_0}^t G(t, s) y_0^{(-1)}(s, \sigma) ds = 0, \quad y_{-1}(t_0, 0) = h(t_0); \quad (9_{-1})$$

$$L_0 y_0(t, \tau, \sigma) = -\frac{\partial y_0}{\partial t} + R_1 y_0 - \frac{g(t)\beta'(t)}{2i} (e^{\tau_2} \sigma_1 - e^{\tau_3} \sigma_2) y_0 + h'(t), \quad y_0(t_0, 0) = 0; \quad (9_0)$$

$$L_0 y_1(t, \tau, \sigma) = -\frac{\partial y_1}{\partial t} + R_1 y_1 + R_2 y_0 - \frac{g(t)\beta'(t)}{2i} (e^{\tau_2} \sigma_1 - e^{\tau_3} \sigma_2) y_1 + \frac{g'(t)}{2} (e^{\tau_2} \sigma_1 + e^{\tau_3} \sigma_2) y_0, \quad y_1(t_0, 0) = 0; \quad (9_1)$$

$$L_0 y_k(t, \tau, \sigma) = -\frac{\partial y_k}{\partial t} + R_1 y_k + \dots + R_{k+1} y_{k-1} - \frac{g(t)\beta'(t)}{2i} \times (e^{\tau_2} \sigma_1 - e^{\tau_3} \sigma_2) y_k + \frac{g'(t)}{2} (e^{\tau_2} \sigma_1 + e^{\tau_3} \sigma_2) y_{k-1}, \quad y_k(t_0, 0) = 0. \quad (9_k)$$

Каждая из итерационных задач (9<sub>k</sub>) имеет вид

$$L_0 y(t, \tau, \sigma) \equiv \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \frac{\partial y}{\partial \tau_i} - \lambda_1(t) y - \int_{t_0}^t G(t, s) y_0(s, \sigma) ds = H(t, \tau), \quad y(t_0, 0) = y_*, \quad (9)$$

где  $y_*$  — известное число,  $H(t, \tau)$  — известная функция класса  $V$ , элементами которого являются суммы

$$H(t, \tau, \sigma) = H_0(t, \sigma) + \sum_{i=1}^3 H_i(t, \sigma) e^{\tau_i} + \sum_{2 \leq |m| \leq N_y} H^m(t, \sigma) e^{(m, \tau)} + \sum_{1 \leq |m| \leq N_y} H^{e_1+m}(t, \sigma) e^{(e_1+m, \tau)}, \quad (5a)$$

$$H_i(t, \sigma), H^m(t, \sigma), H^{e_1+m}(t, \sigma) \in C^\infty([t_0, T], \mathbb{C}^1),$$

которые могут содержать резонансные экспоненты, так как такие экспоненты могут появиться в результате действия операторов умножения

$$L_1 = \frac{g(t)\beta'(t)}{2i} (e^{\tau_2} \sigma_1 - e^{\tau_3} \sigma_2), \quad L_2 = \frac{g'(t)\beta(t)}{2} (e^{\tau_2} \sigma_1 + e^{\tau_3} \sigma_2),$$

находящихся в правых частях итерационных задач (9<sub>k</sub>). Действительно, применяя, например, оператор  $L_1$  к каждому слагаемому суммы (5), будем иметь (зависимость от  $\sigma$  в коэффициентах опускаем):

$$\begin{aligned} & \frac{g(t)\beta'(t)}{2i} [y_0(t) + y_1(t) e^{\tau_1} + y_2(t) e^{\tau_2} + y_3(t) e^{\tau_3} + \\ & + y^m(t) e^{m_1 \tau_1 + m_2 \tau_2 + m_3 \tau_3} + y^{e_1+m}(t) e^{m_1 \tau_1 + \tau_1 + m_2 \tau_2 + m_3 \tau_3}] \cdot (e^{\tau_2} \sigma_1 - e^{\tau_3} \sigma_2) = \\ & = \frac{g(t)\beta'(t)}{2i} [y_0(t) e^{\tau_2} \sigma_1 - y_0(t) e^{\tau_3} \sigma_2 + y_1(t) e^{\tau_1 + \tau_2} \sigma_1 - \\ & - y_1(t) e^{\tau_1 + \tau_3} \sigma_2 - y_2(t) e^{2\tau_2} \sigma_1 + y_3(t) e^{2\tau_3} \sigma_2 + \\ & + y_2(t) e^{\tau_2 + \tau_3} \sigma_2 + y_3(t) e^{\tau_3 + \tau_2} \sigma_1 + y^m(t) e^{m_1 \tau_1 + (m_2+1)\tau_2 + m_3 \tau_3} \sigma_1 - \\ & - y^m(t) e^{m_2 \tau_2 + (m_3+1)\tau_3} \sigma_2 + y^{e_1+m}(t) e^{m_1 \tau_1 + \tau_1 + (m_2+1)\tau_2 + m_3 \tau_3} \sigma_1 - \\ & - y^{e_1+m}(t) e^{m_1 \tau_1 + \tau_1 + m_2 \tau_2 + (m_3+1)\tau_3} \sigma_2]. \end{aligned} \quad (9a)$$

Здесь подчеркнутые слагаемые имеют экспоненты с резонансными мультииндексами  $m = (0, m_2, m_3)$  и  $m = (1, m_2, m_3)$  :

$$\begin{aligned} m &= (0, 1, 1) \in \Gamma_0, \\ m &= (0, m_2 + 1, m_3) \in \Gamma_2 \text{ (если } m_2 = m_3 \geq 1 \text{ или } m_3 = 2, m_2 = 0), \\ m &= (0, m_2, m_3 + 1) \in \Gamma_3 \text{ (если } m_2 = m_3 \geq 1 \text{ или } m_3 = 0, m_2 = 2), \\ m &= (0, m_2 + 1, m_3) \in \Gamma_0 \text{ (если } m_2 + 1 = m_3 \geq 1), \\ m &= (0, m_2, m_3 + 1) \in \Gamma_0 \text{ (если } m_3 + 1 = m_2 \geq 1), \\ m &= (1, m_2 + 1, m_3) \in \Gamma_1 \text{ (если } m_2 + 1 = m_3 \geq 1), \\ m &= (1, m_2, m_3 + 1) \in \Gamma_2 \text{ (если } m_3 + 1 = m_2 \geq 1). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что члены  $y_2(t) e^{\tau_2}, y_3(t) e^{\tau_3}$  и  $y^{(0,2,0)}(t) e^{2\tau_2}, y^{(0,0,2)}(t) e^{2\tau_3}$  суммы (5) переходят в члены с резонансными экспонентами (при действии на них оператора  $L_1$ ). Это означает, что итерационная задача (9) может не иметь решения в пространстве  $U$ . Поэтому надо видоизменить эти задачи так, чтобы было возможным искать их решения в пространстве  $U$ . Воспользуемся для этого идеями работы [1].

Будем обозначать через  $V$  пространство сумм

$$z(t, \tau) = \sum_{0 \leq |m| \leq N_z} z^m(t) e^{(m, \tau)} \quad (z^m(t) \in C^\infty([t_0, T], \mathbb{C}^1)),$$

которые могут содержать члены с резонансными экспонентами. Операцию  $\wedge$  :  $z(t, \tau) \rightarrow \hat{z}(t, \tau)$ , сопоставляющую каждому элементу  $z(t, \tau)$  пространства  $V$  элемент  $\hat{z}(t, \tau)$  пространства  $U$  такой, что  $\hat{z}(t, \tau)|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}} \equiv z(t, \tau)|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}$ , называют *операцией вложения* (см. [1]) пространства  $V$  в пространство  $U$ . Например,  $(z^{(0,1,1)}(t) e^{\tau_2 + \tau_3})^\wedge = z^{(0,1,1)}(t) e^0 = z^{(0,1,1)}(t)$  (мультииндекс  $m = (0, 1, 1) \in \Gamma_0$ , так как  $0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2(t) + 1 \cdot \lambda_3(t) \equiv 0$ ).

Вложим правые части всех итерационных задач (9<sub>k</sub>) в пространство  $U$ , т. е. заменим задачи (9<sub>k</sub>) на задачи<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} L_0 y_{-1}(t, \tau) &\equiv \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \frac{\partial y_{-1}}{\partial \tau_i} - \lambda_1(t) y_{-1} - \int_{t_0}^t G(t, s) y_0^{(-1)}(s) ds = 0, \\ y_{-1}(t_0, 0) &= h(t_0); \end{aligned} \quad (\bar{9}_{-1})$$

...

$$\begin{aligned} L_0 y_k(t, \tau) &= -\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t} + R_1 y_{k-1} + \dots + R_{k+1} y_{-1} - \left[ \frac{g(t) \beta'(t)}{2^i} (e^{\tau_2} \sigma_1 - \right. \\ &\left. - e^{\tau_3} \sigma_2) y_{k-1} \right]^\wedge + \left[ \frac{g'(t)}{2} (e^{\tau_2} \sigma_1 + e^{\tau_2} \sigma_2) y_{k-2} \right]^\wedge, \quad y_k(t_0, 0) = 0, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (\bar{9}_k)$$

На построение асимптотического решения исходной задачи (1) такая замена не повлияет, так на сужении  $\tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}$  серия задач (9<sub>k</sub>) будет совпадать с серией задач (9<sub>k</sub>) (см. [1], с. 167-169).

Таким образом, для обоснования разрешимости итерационных задач (9<sub>k</sub>) надо вместо задачи (9) рассмотреть общую итерационную задачу вида

$$\begin{aligned} L_0 y(t, \tau) &\equiv \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \frac{\partial y}{\partial \tau_i} - \lambda_1(t) y - \int_{t_0}^t G(t, s) y_0(s) ds = \\ &= \hat{H}(t, \tau), \quad y(t_0, 0) = y_*, \end{aligned} \quad (10)$$

<sup>3</sup> Везде далее зависимость  $y_k$  от  $\sigma$  опускаем.

где  $\hat{H}(t, \tau) = H_0(t) + \sum_{i=1}^3 H_i(t) e^{\tau_i} + \sum_{2 \leq |m| \leq N_H}^* H^m(t) e^{(m, \tau)} + \sum_{1 \leq |m| \leq N_H}^* H^{e_1+m}(t) \times$   
 $\times e^{(e_1+m, \tau)} \in U$ .

Введем скалярное (при каждом  $t \in [t_0, T]$ ) произведение в пространстве  $U$ :

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle \equiv & \langle z_0(t) + \sum_{i=1}^3 z_i(t) e^{\tau_i} + \sum_{2 \leq |m| \leq N_z}^* z^m(t) e^{(m, \tau)} + \sum_{1 \leq |m| \leq N_z}^* z^{e_1+m}(t) \times \\ & \times e^{(e_1+m, \tau)}, w_0(t) + \sum_{i=1}^3 w_i(t) e^{\tau_i} + \sum_{2 \leq |m| \leq N_w}^* w^m(t) e^{(m, \tau)} + \\ & + \sum_{1 \leq |m| \leq N_w}^* w^{e_1+m}(t) e^{(e_1+m, \tau)} \rangle \triangleq z_0(t) \overline{w_0(t)} + \sum_{i=1}^3 z_i(t) \overline{w_i(t)} + \\ & + \sum_{2 \leq |m| \leq \min(N_z, N_w)}^* z^m(t) \overline{w^m(t)} + \sum_{1 \leq |m| \leq \min(N_z, N_w)}^* z^{e_1+m}(t) \overline{w^{e_1+m}(t)}, \end{aligned}$$

где черта над функцией  $w(t)$  означает комплексное сопряжение в  $\mathbb{C}^1$ . Докажем следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1) и 2) и правая часть  $\hat{H}(t, \tau) = H_0(t) + \sum_{i=1}^3 H_i(t) e^{\tau_i} + \sum_{2 \leq |m| \leq N_z}^* H^m(t) e^{(m, \tau)} + \sum_{1 \leq |m| \leq N_H}^* H^{e_1+m}(t) e^{(e_1+m, \tau)}$  системы (10) принадлежит пространству  $U$ . Тогда для разрешимости системы (10) в  $U$  необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество

$$\langle \hat{H}(t, \tau), e^{\tau_1} \rangle \geq 0, \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (11)$$

**Доказательство.** Будем определять решение системы (10) в виде элемента (5) пространства  $U$ :

$$\begin{aligned} z(t, \tau) = & z_0(t) + \sum_{i=1}^3 z_i(t) e^{\tau_i} + \sum_{2 \leq |m| \leq N_z}^* z^m(t) e^{(m, \tau)} + \\ & + \sum_{1 \leq |m| \leq N_H}^* z^{e_1+m}(t) e^{(e_1+m, \tau)} \equiv z_0(t) + \sum_{i=1}^3 z_i(t) e^{\tau_i} + \\ & + \sum_{2 \leq |m| \leq N_z}^* z^m(t) e^{(m, \tau)} + \sum_{2 \leq |m^k| \leq N_H}^* z^{m^1}(t) e^{(m^1, \tau)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где ради удобства введены мультииндексы

$$m^1 = e_1 + m \equiv (m_1 + 1, m_2, m_3), \quad |m^1| = m_1 + 1 + m_2 + m_3 \geq 2,$$

$m_1, m_2$  и  $m_3$  — целые неотрицательные числа. Подставляя (12) в систему (10), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 [\lambda_i(t) - \lambda_1(t)] z_i(t) e^{\tau_i} + \sum_{2 \leq |m| \leq N_z}^* [(m, \lambda(t)) - \lambda_1(t)] z^m(t) e^{(m, \tau)} + \\ + \sum_{2 \leq |m^1| \leq N_H}^* [(m^k, \lambda(t)) - \lambda_1(t)] z^{m^1}(t) e^{(m^1, \tau)} - \lambda_1(t) z_0(t) - \\ - \int_{t_0}^t G(t, s) z_0(s) ds = H_0(t) + \sum_{i=1}^3 H_i(t) e^{\tau_i} + \end{aligned} \quad (13)$$

$$+ \sum_{2 \leq |m| \leq N_z}^* H^m(t) e^{(m, \tau)} + \sum_{2 \leq |m^1| \leq N_H}^* H^{m^1}(t) e^{(m^1, \tau)}.$$

Приравнивая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим следующие системы уравнений (учесть, что в пространстве  $U$  отсутствуют резонансные экспоненты):

$$-\lambda_1(t) z_0(t) - \int_{t_0}^t G(t, s) z_0(s) ds = H_0(t), \tag{14}$$

$$[\lambda_i(t) - \lambda_1(t)] z_i(t) = H_i(t), \quad i = \overline{1, 3}; \tag{14_i}$$

$$[(m, \lambda(t)) - \lambda_1(t)] z^m(t) = H^m(t), \quad m = (m_1, m_2, m_3), \quad 2 \leq |m| \leq N_H; \tag{14_m}$$

$$[(m^1, \lambda(t)) - \lambda_1(t)] z^{m^1}(t) = H^{m^1}(t), \quad m^1 = (m_1 + 1, m_2, m_3), \quad 2 \leq |m^1| \leq N_H. \tag{15}$$

Так как функция  $\lambda_1(t) < 0 (\forall t \in [t_0, T])$ , то уравнение (14) можно записать в виде

$$z_0(t) = \int_{t_0}^t (-\lambda_1^{-1}(t) G(t, s)) z_0(s) ds - \lambda_1^{-1}(t) H_0(t). \tag{15_0}$$

В силу гладкости ядра  $-\lambda_1^{-1}(t) K(t, s)$  и неоднородности  $-\lambda_1^{-1}(t) H_0(t)$  эта интегральная система Вольтерра имеет единственное решение  $z_0(t) \in C^\infty([t_0, T], \mathbb{C}^1)$ . Уравнения (14<sub>2</sub>) и (14<sub>3</sub>) также имеют единственные решения

$$z_i(t) = [\lambda_i(t) - \lambda_1(t)]^{-1} H_i(t) \in C^\infty([t_0, T], \mathbb{C}^1), \quad i = 2, 3,$$

так как  $\lambda_2(t)$  и  $\lambda_3(t)$  не совпадают с  $\lambda_1(t)$  при всех  $t \in [t_0, T]$ . Уравнение (14<sub>1</sub>) разрешимо в пространстве  $C^\infty([t_0, T], \mathbb{C}^1)$  тогда и только тогда, когда имеют место тождества  $H_1(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \langle H_1(t), e^{\tau_1} \rangle \equiv 0 \forall t \in [t_0, T], \quad i = 1, 2$ .

Далее, так как в пространстве  $U$  отсутствуют резонансы, поэтому  $m \notin \Gamma_1$ , то уравнения (14<sub>m</sub>) имеют единственные решения

$$z^m(t) = [(m, \lambda(t)) - \lambda_1(t)]^{-1} H^m(t), \quad 2 \leq |m| \leq N_H \in C^\infty([t_0, T], \mathbb{C}^1).$$

Такое же утверждение имеет место и для уравнений (15). Так как мультииндекс  $m^1 = (m_1 + 1, m_2, m_3), |m^1| \geq 2$  не является резонансным, то  $(m^1, \lambda(t)) \neq \lambda_1(t)$ , поэтому уравнения (15) имеют единственные решения в классе  $C^\infty([t_0, T], \mathbb{C}^1)$ :

$$z^{m^1}(t) = [(m^1, \lambda(t)) - \lambda_1(t)]^{-1} H^{m^1}(t), \quad 2 \leq |m^1| \leq N_H.$$

Таким образом, условие (11) является необходимым и достаточным для разрешимости уравнения (10) в пространстве  $U$ . Теорема доказана.

**Замечание 1.** Если выполнено тождество (11), то при условиях 1) и 2) уравнение (10) имеет следующее решение в пространстве  $U$ :

$$z(t, \tau) = z_0(t) + \alpha_1(t) e^{\tau_1} + \frac{H_2(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)} e^{\tau_2} + \frac{H_3(t)}{\lambda_3(t) - \lambda_1(t)} e^{\tau_3} + \\ + \sum_{2 \leq |m| \leq N_H}^* \frac{H^m(t)}{(m, \lambda(t)) - \lambda_1(t)} e^{(m, \tau)} + \sum_{1 \leq |m^1| \leq N_H}^* \frac{H^{e_1+m}(t)}{(e_1+m, \lambda(t)) - \lambda_1(t)} e^{(e_1+m, \tau)}, \tag{16}$$

где  $\alpha_1(t) \in C^\infty([t_0, T], \mathbb{C}^1)$  — произвольная функция,  $z_0(t)$  — решение интегрального уравнения (15<sub>0</sub>). Не будем формулировать теорему об однозначной разрешимости задачи (10). Покажем, что применение теоремы 1 к двум последовательным итерационным задачам ( $\mathfrak{G}_k$ ) и ( $\mathfrak{G}_{k+1}$ ) позволяет определить решение первой из них однозначно в классе  $U$ . Начнем с первой итерационной

задачи  $(\bar{9}_{-1})$ . Правая часть  $\hat{H}(t, \tau) = \hat{H}^{(-1)}(t, \tau) \equiv 0$  этой задачи удовлетворяет условию разрешимости (11), поэтому уравнение  $(\bar{9}_{-1})$  имеет решение в пространстве  $U$  в виде функции (см. (16))

$$y_{-1}(t, \tau) = y_0^{(-1)}(t) + \alpha_1^{(-1)}(t)e^{\tau_1},$$

где функция  $y_0^{(-1)}(t)$  удовлетворяет однородному интегральному уравнению

$$y_0^{(-1)}(t) = \int_{t_0}^t (-\lambda_1^{-1}(t) G(t, s)) y_0^{(-1)}(s) ds,$$

которое имеет единственное нулевое решение  $y_0^{(-1)}(t) \equiv 0$ . Значит,  $y_{-1}(t, \tau) = \alpha_1^{(-1)}(t)e^{\tau_1}$ , где  $\alpha_1^{(-1)}(t) \in C^\infty([t_0, T], \mathbb{C}^1)$  — пока произвольная функция. Подчиняя ее начальному условию  $y_{-1}(t_0, 0) = h(t_0)$ , найдем значение  $\alpha_1^{(-1)}(0) = h(t_0)$ . Для окончательного вычисления функции  $\alpha_1^{(-1)}(t)$  переходим к следующей итерационной задаче:

$$L_0 y_0 = -\frac{\partial y_{-1}}{\partial t} + R_1 y_{-1} - \left( \frac{g(t)\beta'(t)}{2i} (e^{\tau_2}\sigma_1 - e^{\tau_3}\sigma_2) y_{-1} \right)^\wedge + h'(t), \quad y_0(t_0, 0) = 0. \quad (9_0)$$

Учитывая вид (6<sub>1</sub>) оператора  $R_1$ , запишем правую часть задачи  $(9_0)$ :

$$\begin{aligned} \hat{H}(t, \tau) &= \hat{H}^{(0)}(t, \tau) \equiv -\dot{\alpha}_1^{(-1)}(t)e^{\tau_1} + R_1 \left( \alpha_1^{(-1)}(t)e^{\tau_1} \right) - \\ &- \left( \frac{g(t)\beta'(t)}{2i} (e^{\tau_2}\sigma_1 - e^{\tau_3}\sigma_2) \alpha_1^{(-1)}(t)e^{\tau_1} \right)^\wedge = -\dot{\alpha}_1^{(-1)}(t)e^{\tau_1} + \\ &+ \frac{G(t, t)\alpha_1^{(-1)}(t)}{\lambda_1(t)} e^{\tau_1} - \frac{G(t, t_0)\alpha_1^{(-1)}(t_0)}{\lambda_1(t_0)} - \\ &- \frac{g(t)\beta'(t)}{2i} \alpha_1^{(-1)}(t) (e^{\tau_1+\tau_2}\sigma_1 - e^{\tau_1+\tau_3}\sigma_1) + h'(t) \end{aligned}$$

(здесь учтено, что экспоненты  $e^{\tau_1+\tau_2}$ ,  $e^{\tau_1+\tau_3}$  не являются резонансными). Условие разрешимости (11) этого уравнения в пространстве  $U$  приводит к дифференциальному уравнению  $-\dot{\alpha}_1^{(-1)}(t) + \frac{G(t, t)}{\lambda_1(t)} \alpha_1^{(-1)}(t) = 0$ . Подчиняя его начальному условию  $\alpha_1^{(-1)}(0) = h(t_0)$ , найдем однозначно функцию  $\alpha_1^{(-1)}(t) = h(t_0) e^{\int_{t_0}^t \frac{G(\theta, \theta) d\theta}{\lambda_1(\theta)}}$ , а значит, вычислим решение

$$y_{-1}(t, \tau) = h(t_0) e^{t_0} \int_{t_0}^t \frac{G(\theta, \theta) d\theta}{\lambda_1(\theta)} + \tau_1 \quad (17)$$

задачи  $(\bar{9}_{-1})$  в пространстве  $U$  единственным образом. При этом задача  $(9_0)$  принимает вид

$$L_0 y_0 = -\frac{g(t)\beta'(t)}{2i} \alpha_1^{(-1)}(t) (e^{\tau_1+\tau_2}\sigma_1 - e^{\tau_1+\tau_3}\sigma_1) - \frac{G(t, t_0)\alpha_1^{(-1)}(t_0)}{\lambda_1(t_0)} + h'(t), \quad y(t_0, 0) = 0.$$

По теореме 1 (см. формулу (16)) она имеет следующее решение в пространстве  $U$ :

$$y_0(t, \tau) = y_0^{(0)}(t) + \alpha_1^{(0)}(t)e^{\tau_1} + P_0^{(1,1,0)}(t)e^{\tau_1+\tau_2} + P_0^{(1,0,1)}(t)e^{\tau_1+\tau_3}, \quad (18)$$

где  $\alpha_1^{(0)}(t) \in C^\infty([t_0, T], \mathbb{C}^1)$  — произвольная функция,  $P_0^{(1,1,0)}(t) \equiv -\frac{g(t)\beta'(t)\sigma_1}{2\lambda_2(t)^i} \times \alpha_1^{(-1)}(t)$ ,  $P_0^{(1,0,1)}(t) \equiv \frac{g(t)\beta'(t)\sigma_2}{2\lambda_3(t)^i} \alpha_1^{(-1)}(t)$ , а  $y_0^{(0)}(t)$  — решение интегрального уравнения

$$y_0^{(0)}(t) = \int_{t_0}^t \left( -\frac{G(t,s)}{\lambda_1(t)} \right) y_0^{(0)}(s) ds - \frac{1}{\lambda_1(t)} \left( -\frac{G(t,t_0)\alpha_1^{(-1)}(t_0)}{\lambda_1(t_0)} + h'(t) \right). \quad (19)$$

Подчиняя решение (18) начальному условию  $y_0(t_0, 0) = 0$ , найдем начальное значение  $\alpha_1^{(0)}(t_0) = \alpha_{10}^0$ . Для полного вычисления функции  $\alpha_1^{(0)}(t)$  надо перейти к следующей итерационной задаче ( $\bar{9}_1$ ) и записать для нее условия разрешимости (11). Они приведут к неоднородному дифференциальному уравнению  $-\dot{\alpha}_1^{(0)}(t) + \frac{G(t,t)}{\lambda_1(t)} \alpha_1^{(0)}(t) = l(t)$ , которое вместе с начальным условием  $\alpha_1^{(0)}(t_0) = \alpha_{10}^0$  позволит найти функцию  $\alpha_1^{(0)}(t)$  единственным образом, а значит, и вычислить однозначно решение (18) задачи ( $\bar{9}_0$ ) в пространстве  $U$ . И аналогично, применяя теорему 1 к серии следующих итерационных задач ( $\bar{9}_k$ ), найдем однозначно их решения в пространстве  $U$  и построим ряд (7). Так же, как в работе [16], докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть для уравнения (3) выполнены условия 1)–2). Тогда при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  ( $\varepsilon_0 > 0$  — достаточно малое) уравнения (3) имеет единственное решение  $y(t, \varepsilon) \in C^1([t_0, T], \mathbb{C})$ ; при этом имеет место оценка

$$\|y(t, \varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[t_0, T]} \leq c_N \varepsilon^{N+1}, \quad N = -1, 0, 1, \dots,$$

где  $y_{\varepsilon N}(t)$  — сужение (при  $\tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}$ )  $N$ -ой частичной суммы ряда (7) (с коэффициентами  $y_k(t, \tau) \in U$ , удовлетворяющими итерационным задачам ( $\bar{9}_k$ )), а постоянная  $c_N > 0$  не зависит от  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ .

Запишем главный член асимптотики решения задачи (3) (а значит, и исходной задачи (1)) :

$$\begin{aligned} y_{\varepsilon 0}(t) &= \varepsilon^{-1} y_{-1} \left( t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon} \right) + y_0 \left( t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon} \right) = \\ &= \varepsilon^{-1} h(t_0) e^{\int_{t_0}^t \frac{G(\theta, \theta)}{\lambda_1(\theta)} d\theta} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_1(\theta) d\theta + y_0^{(0)}(t) + \alpha_1^{(0)}(t) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_1(\theta) d\theta} + \\ &+ P_0^{(1,1,0)}(t) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (\lambda_1(\theta) + \lambda_2(\theta)) d\theta} + P_0^{(1,0,1)}(t) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (\lambda_1(\theta) + \lambda_3(\theta)) d\theta}, \end{aligned}$$

и проанализируем его. Если  $h(t_0) \neq 0$ , то точное решение  $y(t, \varepsilon)$  задачи (1) при  $\varepsilon \rightarrow +0$  стремится к бесконечности в точке  $t = t_0$ , а при  $t > t_0$  оно стремится к нулю. Однако если  $h(t_0) = 0$ , то решение  $y(t, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  стремится (равномерно по  $t \in [\delta_0, T]$ ,  $\delta_0 \in (0, T)$ ) к решению  $y_0^{(0)}(t)$  интегрального уравнения

$$y_0^{(0)}(t) = \int_{t_0}^t \left( -\frac{G(t,s)}{\lambda_1(t)} \right) y_0^{(0)}(s) ds - \frac{h'(t)}{\lambda_1(t)},$$

полученного из (19) с учетом того, что  $\alpha_1^{(-1)}(0) = h(t_0) = 0$ . Нетрудно видеть, что это уравнение получено из вырожденного (по отношению к (1)) уравнения

$$- \int_{t_0}^t K(t,s) \bar{y}(s) ds = h(t).$$

## REFERENCES

- [1] S.A. Lomov, *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Nauka, Moskva, 1981. Zbl 0514.34049
- [2] S.A. Lomov, I.S. Lomov, *Osnovy matematicheskoy teorii pogrannichnogo sloya*, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, Moskva, 2011.
- [3] A.D. Ryzhikh, *Primeneniye metoda regulyarizatsii dlya uravneniy s bystro ostsilliruyushchimi koeffitsiyentami*, Materialy Vsesoyuznoy konferentsii po asimptoticheskim metodam, chast' I, Nauka, Alma-ata, 1979, 64–66.
- [4] S.F. Feshchenko, N.I. Shkil', L.D. Nikolenko, *Asymptotic methods in the theory of linear differential equations*, Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, **10**, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1967. Zbl 0153.40501
- [5] N.I. Shkil', *Asimptoticheskiye metody v differentsial'nykh uravneniyakh*, Vyscha Shkola, Kiev, 1971 (In Russian).
- [6] Yu.L. Daletskii, S.G. Kreyn, *O differentsial'nykh uravneniyakh v gil'bertovom prostranstve*, Ukr. Mat. Zh., **2:4** (1950), 71–91. Zbl 0045.39302.
- [7] Yu.L. Daletskii, *An asymptotic method for certain differential equations with oscillating coefficients*, Sov. Math., Dokl., **3** (1962), 520–523. Zbl 0119.32501
- [8] YU.L. Daletskii, M.G. Kreyn, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Nauka, Moskva, 1970. Zbl 0233.34001
- [9] B.T. Kalimbetov, V.F. Safonov, *Integro-differentiated singularly perturbed equations with fast oscillating coefficients*, Bulletin of KarSU, series Mathematics, **94:2**, (2019), 33–47.
- [10] A.A. Bobodzhonov, V.F. Safonov, *Singulyarno vozmushchennyye integral'nyye i integro-differentsial'nyye uravneniya s bystro izmenyayemyimi yadrami i uravneniya s diagonal'nyim vyrozhdeniym yadra*, «Sputnik +», Moskva, 2017.
- [11] B.T. Kalimbetov, V.F. Safonov, *Integro-differentsial'nyye singulyarno vozmushchennyye uravneniya s bystro ostsilliruyushchimi koeffitsiyentami*, Sovremennyye problemy matematiki i mekhaniki, Moskva, (2019), 299–302.
- [12] B.T. Kalimbetov, *Asimptotika resheniy integro-differentsial'noy sistemy s parametricheskimi usileniyem*, Teoreticheskiye i prikladnyye voprosy matematiki, mekhaniki i informatiki, Karaganda, (2019), 82–83.
- [13] B.T. Kalimbetov, V.F. Safonov, *Singulyarno vozmushchennaya sistema integro-differentsial'nykh uravneniy s bystro ostsilliruyushchimi koeffitsiyentami i s bystro izmenyayushchimisya yadrami*, Izvestiya MKTU im. Kh.A. Yasavi, Seriya matematika, fizika, informatika, **9:2** (2019), 42–69.
- [14] B.T. Kalimbetov, V.F. Safonov, *Integro-differentsial'noye uravneniye tipa Fredgol'ma s bystro ostsilliruyushchimi koeffitsiyentami*, Materialy Uzbeksko-Rossiyskoy nauchnoy konferentsii «Neklassicheskiye uravneniya matematicheskoy fiziki i ikh prilozheni», Tashkent, (2019), 158–159.
- [15] B.T. Kalimbetov, M.A. Temirbekov, *Asimptotika resheniya singulyarno vozmushchennoy integro-differentsial'noy sistemy s bystro ostsilliruyushchimi koeffitsiyentami*, Sbornik tezisov dokladov mezhdunarodnoy konferentsii «Aktual'nyye problemy matematicheskoy fiziki», Moskva, (2019), 29–30.
- [16] V.F. Safonov, A.A. Bobodzhonov, *Kurs vysshey matematiki. Singulyarno vozmushchennyye zadachi i metod regulyarizatsii: uchebnoye posobiye*, Izdatel'skiy dom MEI, Moskva, 2012.
- [17] V.F. Safonov, O.D. Tuychiyev, *Regularization of singularly perturbed integral equations with rapidly varying kernels and their asymptotics*, Differ. Equ., **33:9** (1997), 1203–1215.

B. T. KALIMBETOV

KHOJA AHMET YASAWI INTERNATIONAL KAZAKH-TURKISH UNIVERSITY,

29B, B. SATTARKHANOV AVE.,

TURKESTAN, 161200, KAZAKHSTAN

Email address: burkhan.kalimbetov@ayu.edu.kz

V.F.SAFONOV  
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY, MOSCOW POWER ENGINEERING INSTITUTE,  
14, KRASNOKAZARMENNAYA STR.,  
MOSCOW, 111250, RUSSIA  
*Email address: safonovvf@rambler.ru*

O.D. TUYCHIEV  
KHUJANT STATE UNIVERSITY NAMED AFTER B.GAFUROV,  
1, MOVLONBEKOV AVE.,  
735700, KHUJANT, TAJIKISTAN  
*Email address: tuychievolim67@mail.ru*