

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 2028–2044 (2020)

УДК 517.977

DOI 10.33048/semi.2020.17.135

MSC 65P30, 49L25, 58K60, 35A18

СВОЙСТВА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПСЕВДОВЕРШИН
КРАЕВОГО МНОЖЕСТВА ПРИ РАЗРЫВЕ ГЛАДКОСТИ
КРИВИЗНЫ ЕГО ГРАНИЦЫ В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙКОНАЛА

А.А. УСПЕНСКИЙ, П.Д. ЛЕБЕДЕВ

ABSTRACT. A number of properties of pseudo-vertices of a boundary value set in the Dirichlet problem to the first-order PDE of the eikonal type are revealed. Special points of the boundary of the boundary set responsible for the origin of the singularity of the generalized solution of the equation from the corresponding domain — the fundamental solution (according to S. N. Kruzhkov) in geometric optics or the minimax solution (according to A. I. Subbotin) in the theory of optimal control, are studied. In this paper, formulas for markers — numerical characteristics of pseudo-vertices are obtained. The formulas are found for the non-stationary case when the smoothness of the curvature of the boundary of the edge set is broken. The necessary conditions for the existence of pseudo-vertices are also derived in the form of relations generalizing the curvature stationarity conditions. The obtained results are illustrated by the example of building a solution to the velocity control problem.

Keywords: eikonal, Hamilton–Jacobi equation, minimax solution, velocity, diffeomorphism, optimal result function, singular set, symmetry, transversality.

LEBEDEV, P.D., USPENSKII, A.A., PROPERTIES OF NON STATIONER PSEUDO VERTEX WITH THE BREAK OF SMOOTHNESS OF THE TARGET SET BOARDER CURVATURE IN THE DIRICHLET PROBLEM TO EIKONAL TYPE EQUATION.

© 2020 Лебедев П.Д., Успенский А.А.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

Поступила 30 мая 2020 г., опубликована 9 декабря 2020 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

В известной работе [1] С.Н. Кружков ввел понятие обобщенного решения уравнения эйконала, используя метод коротковолновой аппроксимации. Этот метод был взят на вооружение специалистами по обобщенным решениям уравнений в частных производных, развит и в дальнейшем получил название метода исчезающей вязкости [2]. Наряду с этим подходом к определению обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка, имеющим свои корни в математической физике и функциональном анализе, конструкции теории позиционных дифференциальных игр [3] позволили А.И. Субботину ввести определение минимаксного решения [4] для уравнений указанного типа. Минимаксный подход, совмещенный с аппаратом выпуклого и негладкого анализа [5], предоставил широкие возможности для создания реализуемых численных процедур построения негладких решений теории позиционных дифференциальных игр и оптимального управления. Среди этих процедур выделим разностные аппроксимационные операторы [6], реализуемые на сетках. Численные процедуры построения на сетках обобщенных решений уравнений гамильтонова типа и уравнения эйконала развивает Sethian J. A. [7]. Алгоритмы построения эйконала и эволюции волновых фронтов, использующие разностные схемы математической физики и конструкции метода характеристик, предложены и реализованы в работах С. И. Кабанихина и О. И. Криворотько (например, [8]).

В настоящей работе рассмотрена краевая задача Дирихле на плоскости для уравнения Гамильтона-Якоби, отвечающего уравнению эйконала с постоянным коэффициентом преломления среды. Минимаксное решение задачи Дирихле совпадает с функцией оптимального результата соответствующей задачи управления по быстродействию [9]. Изучен случай, когда граница краевого множества содержит нестационарные псевдовершины с разрывами производных третьего порядка координатных функций. Для указанного случая, опираясь на условия трансверсальности, найдены формулы для маркеров псевдовершин. Здесь маркеры — скалярные величины, которые, с одной стороны, характеризуют особенности геометрии краевого множества в окрестности точки [10], с другой стороны, позволяют сформировать динамику обыкновенного дифференциального уравнения, интегральные кривые которого содержат ветви сингулярного множества (см., например, [11]). Вывод основных соотношений проведен на основе аппроксимации значимой части ключевого для этих конструкций уравнения типа золотого сечения с помощью односторонних разложений Тейлора. По сути здесь используется аппроксимативная техника струй, широко применяемая в теории особенностей гладких отображений [12]. В рамках заявленных ограничений на порядок дифференцирования также получены необходимые условия существования псевдовершин, которые выписаны в терминах, обобщающих условия стационарности кривизны, и приведены в нескольких эквивалентных формах.

2. Постановка задачи. Определения, основные понятия

Рассматривается задача Дирихле на плоскости для уравнения Гамильтона-Якоби:

$$(1) \quad \min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + 1 = 0, \quad u_\Gamma = 0.$$

Здесь $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ — норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$. Краевое условие в (1) определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$. $\Gamma = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: \mathbf{x} = \gamma(t), t \in T\}$ есть плоская кривая, где $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение числового интервала $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty < \hat{t} < \check{t} < \infty$, на плоскость. Вектор-функция $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией и имеет конечное число точек, в которых не существуют производные третьего порядка, но существуют конечные не равные друг другу односторонние производные третьего порядка. Полагаем также, что Γ не имеет точек самопересечения и является регулярной кривой, т.е. $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ для всех $t \in T$.

Минимаксное решение [4] задачи (1) с замкнутым краевым множеством известно (см. [7]):

$$(2) \quad u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M),$$

где $\rho(\mathbf{x}, M) = \inf_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ до множества M . Важно отметить существующую связь этой задачи с задачами геометрической оптики, которая выражается в том, что функция противоположного знака $u_k(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}, M)$ — фундаментальное (обобщенное) решение [1] задачи Дирихле для уравнения эйконала

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_2}\right)^2 = 1, \quad u_\Gamma = 0,$$

с тем же краевым условием $\Gamma = \partial M$.

С точки зрения теории математического управления $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ является функцией оптимального результата в задаче управления по быстродействию с круговой динамикой единичного радиуса [9]. Отметим особенности функции (2), относящиеся к ее дифференцируемости. Если краевое (целевое) множество $M \subset \mathbb{R}^2$ задачи управления является замкнутым выпуклым множеством, то оно удовлетворяет определению «солнца» [13]. В этой ситуации решение уравнения эйконала является гладким и его свойства выявляются, например, с помощью методов и конструкций геометрической теории приближений [14], которые основаны на одноэлементности значений оператора проецирования $P_M \mathbf{x}$ точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ на M . Невыпуклое краевое замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^2$ не является «солнцем», поскольку существуют точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$, у которых множество проекций (ближайших в евклидовой метрике точек) $P_M(\mathbf{x})$ содержит более одного элемента, здесь $\text{card}(P_M(\mathbf{x})) > 1$. Невыпуклость краевых условий в (1) влечет наличие у функции сингулярного множества, которое относится к множествам симметрии [15] и состоит из объединения нуль- и одномерных многообразий. Таким образом, в общем случае $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ теряет гладкость, являясь супердифференцируемой функцией [5] на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus M$.

При конструировании сингулярного множества прежде нужно выделить псевдовершины — особые точки границы краевого условия, которые «отвечают» за зарождение гладких ветвей множества симметрии. В рамках настоящего исследования разобран один из самых интересных случаев, когда в псевдовершине рвутся производные достаточно высокого (третьего) порядка и псевдовершина не является стационарной, и тем не менее она является особой точкой — точкой, порождающей сингулярность.

Напомним определение локальных диффеоморфизмов, используемых для локальной перепараметризации кривой. Указанная перепараметризация позволяет определить псевдовершины кривой с помощью предела на множестве точек пересечения подкасательных равной длины (подробнее см. [16]).

Определение 1. *Скалярный локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$ непрерывен слева в точке $t_1 = t_0 \in T$ и отображает левую полукрестность этой точки в ее правую полукрестность, если выполняются условия:*

$$(A1) \quad t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2), \delta_1 > 0, \delta_2 > 0,$$

$$(A2) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} t_2(t_1) = t_0.$$

Заметим, что условие (A1) влечет строгое неравенство $t_2'(t_1) < 0$ для всех $(t_0 - \delta_1, t_0), \delta_1 > 0$.

Локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, удовлетворяющий набору условий (A1), (A2), определяет псевдовершину $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}(t_0), t_0 \in T$, кривой Γ , в том случае, когда $t_2 = t_2(t_1)$ является локальным решением уравнения типа уравнения гармонической пропорции с двухпараметрическими коэффициентами (формула (3.5) из [14]):

$$(3) \quad \begin{aligned} & 2(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) + \left(\frac{\gamma_2'(t_1)}{\gamma_1'(t_1)} + \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_2)} \right) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 - \\ & - 2 \frac{\gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)} (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) - \\ & - \left(\frac{\gamma_2'(t_1)}{\gamma_1'(t_1)} + \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_2)} \right) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))^2 = 0. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что задача нахождения функций со свойствами (A1), (A2) связана с преодолением проблемы множественности локальных решений уравнения (3), стягивающихся в общую предельную точку, в которой происходит вырождение каустики (подробнее см. [17]). Здесь вследствие симметричности левой части (3) относительно t_1, t_2 тождественный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$ является очевидным частным решением этого уравнения. При этом указанная функция не удовлетворяет условию (A1). В точки ее графика (прямой) стягиваются другие частные решения уравнения (3). Встает проблема отсева локальных решений и выделения решения с нужными свойствами (A1), (A2). В этом процессе затруднительно привлекать многие теоремы классического анализа. В частности, в окрестностях точек $(t_1, t_2) = (t_0, t_0)$ на графике тождественного диффеоморфизма не выполняются условия теоремы о существовании и единственности неявного решения уравнения.

В дальнейшем ограничимся исследованием частного случая, когда кривая Γ является графиком скалярной функции, т.е. $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (t, f(t)), t \in T\}$. В этом случае уравнение (3) редуцируется к эквивалентному более простому уравнению (см. формулу (3.7) из [16]):

$$(4) \quad Q(t_1, t_2) \triangleq \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{-1 + f'(t_1)f'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{f'(t_2) + f'(t_1)} = 0.$$

Здесь $s(t) = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ — длина касательного вектора.

Определение 2. *Левая односторонняя производная*

$$(5) \quad t'_2(t_0 - 0) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0}$$

называется левым маркером псевдовершины $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma$, здесь $t_2 = t_2(t_1)$ удовлетворяет (A1), (A2).

Локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ в силу присущих семейству диффеоморфизмов свойств и с учетом налагаемых условий (A1), (A2) имеет обратный локальный диффеоморфизм $t_1 = t_1(t_2)$, $t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)$, со свойствами, аналогичными свойствам (A1), (A2), а именно, выполняются соотношения:

$$(A3) \quad t_1((t_0, t_0 + \delta_2)) = (t_0 - \delta_1, t_0), \delta_2 > 0, \delta_1 > 0,$$

$$(A4) \quad \lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} t_1(t_2) = t_0.$$

Определение 3. *Правая односторонняя производная*

$$(6) \quad t'_1(t_0 + 0) \triangleq \lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{t_1(t_2) - t_0}{t_2 - t_0}$$

называется правым маркером псевдовершины $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma$, здесь $t_1 = t_1(t_2)$ удовлетворяет (A3), (A4).

Заметим, что левый и правый маркеры псевдовершины образуют пару взаимобратных величин $(t'_1(t_0 + 0), t'_2(t_0 - 0)) = \left(t'_1(t_0 + 0), \frac{1}{t'_1(t_0 + 0)}\right) = \left(\frac{1}{t'_2(t_0 - 0)}, t'_2(t_0 - 0)\right)$. Теоретически не исключен случай пар маркеров с несобственным значением, т.е. пар вида $(t'_1(t_0 + 0), t'_2(t_0 - 0)) = (0, -\infty)$ и $(t'_1(t_0 + 0), t'_2(t_0 - 0)) = (-\infty, 0)$. Этот случай ранее выявлен при иных условиях гладкости границы, нежели те, что рассматриваются в настоящем исследовании. Поскольку имеет место однозначное соответствие между левым и правым маркерами псевдовершины, то, вообще говоря, достаточно найти один из них. В дальнейшем сделаем упор на исследование свойств левого маркера, в частности, займемся отысканием его значения. Вычисление правого маркера осуществляется обращением левого маркера.

Из (4) следует, что в точках $(t_1, t_2) = (t_1, t_2(t_1))$ графика локального диффеоморфизма выполняется равенство:

$$\frac{\partial Q}{\partial t_1} + t'_2 \frac{\partial Q}{\partial t_2} = 0.$$

Перейдем в нем к пределу вдоль локального диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ (см. также [17]):

$$(7) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} + t'_2 \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} \right) = 0.$$

Равенство (7) выражает условие трансверсального («протыкающего») пересечения замыкания графика локального диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ с графиком тождественного диффеоморфизма $t_2 = t_1$ в общей предельной точке $(t_1, t_2) = (t_0, t_0)$.

Опираясь на условие трансверсальности, выявим некоторые свойства псевдовершин. И здесь важно отметить, что если постулировать существование

левого маркера, то из (7) следует формула его вычисления:

$$(8) \quad t'_2(t_0 - 0) = - \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} \cdot \left(\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} \right)^{-1} \right).$$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Исследуем случай разрыва производной третьего порядка скалярной функции в условиях нестационарности. Найдем формулу для левого маркера псевдовершины. Затем выведем необходимые условия существования псевдовершины для нестационарного случая.

Теорема 1. Если $\mathbf{x}^{(0)} = (t_0, f(t_0))$ — псевдовершина плоской регулярной кривой $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (t, f(t)), t \in T\}$, ограничивающей краевое множество M в задаче Дирихле (1), где локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$ является решением уравнения (4), при этом удовлетворяет условиям (A1), (A2) и имеет конечный левый маркер $\lambda = t'_2(t_0 - 0) \leq 0$, а скалярная функция $y = f(t)$ такова, что

$$(9) \quad f'(t_0) \neq 0,$$

при этом существуют конечные односторонние производные третьего порядка $f'''(t_0 - 0)$ и $f'''(t_0 + 0)$, причем

$$(10) \quad f'''(t_0 - 0) \neq f'''(t_0 + 0),$$

то левый маркер λ удовлетворяет равенству

$$(11) \quad (3 - \lambda)\lambda^2 f'''(t_0 + 0) - (3\lambda - 1)f'''(t_0 - 0) + 3 \frac{(f''(t_0))^2 f'(t_0)}{s^2(t_0)} (\lambda - 1)^3 = 0.$$

Доказательство. Найдем асимптотические разложения частных производных функции $Q(t_1, t_2)$ вдоль решения $t_2 = t_2(t_1)$ в левой полукрестности точки $t_1 = t_0$ и перейдем к пределу, воспользовавшись соотношением (8), которое выражает неявную зависимость для $\lambda = t'_2(t_0 - 0)$.

Имеем

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t_1}(t_1, t_2) &= \left(\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{-1 + f'(t_1)f'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{f'(t_2) + f'(t_1)} \right)'_{t_1} = \\ &= \frac{-f'(t_1)(t_2 - t_1) + (f(t_2) - f(t_1))}{(t_2 - t_1)^2} - \\ &= \frac{f''(t_1)((f'(t_1))^2 - s(t_1)s(t_2)) + s'(t_1)s(t_2)(f'(t_2) + f'(t_1)) + f''(t_1)}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2}. \end{aligned}$$

Всюду ниже для краткости изложения и выкладок примем ряд соглашений и упрощающих обозначений. Для упорядоченной тройки точек t_0, t_1, t_2 из T , таких, что $t_1 < t_0 < t_2$, где центральный узел t_0 — аргумент псевдовершины кривой Γ , введем в рассмотрение приращения $\Delta_1 = t_0 - t_1 > 0$, $\Delta_2 = t_2 - t_0 > 0$, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 > 0$. В том случае, когда тройка точек связана локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, приращение $\Delta_2 = \Delta_2(\Delta_1) = t_2(t_1) - t_1$, т.е. Δ_2 зависит от Δ_1 , причем

$$(13) \quad \Delta_2 = \Delta_2(\Delta_1) = t_2(t_1) - t_1 = t'_2(t_0 - 0)(t_1 - t_0) + o_1(t_1 - t_0) = -\lambda\Delta_1 + o_1(\Delta_1).$$

Обозначение $o_1(\Delta_1)$ использовано для функции, имеющей более высокий порядок малости по отношению к аргументу слева от точки рассмотрения, т.е. здесь $\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{o_1(\Delta_1)}{\Delta_1} = 0$. Всюду ниже «о малое» с нижним индексом имеет аналогичный смысл. Обозначение $\varepsilon_1(\Delta_1)$, где $\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \varepsilon_1(\Delta_1) = 0$, и аналогичные обозначения с другими индексами используется для бесконечно малых величин. Полагаем также, что две скалярные функции $y = q(t)$ и $y = g(t)$ эквивалентны слева от точки $t = t_0 \in \mathbb{R}$, если $\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} \frac{q(t)}{g(t)} = 1$. В этом случае пишем $q(t) \sim g(t), t \rightarrow t_0 - 0$.

Для рассматриваемой функции $y = f(t)$ и ее производных, вычисленных в центральном узле t_0 , будем опускать обозначение аргумента, при этом для односторонних производных уберем обозначения $t_0 - 0$ и $t_0 + 0$, опуская соответствующий знак минус или плюс в нижний индекс:

$$f' = f'(t_0), f'' = f''(t_0), f''' = f'''(t_0 - 0), f''' = f'''(t_0 + 0).$$

Облегчение для анализа составляет тот факт, что частные производные функции $Q(t_1, t_2)$ зависят от скалярных функций одного переменного. Применим к ним формулу Тейлора в окрестностях соответствующих точек $t_1 = t_0$ и $t_2 = t_0$. При этом будем придерживаться логики, согласно которой сначала строим разложения с независимыми приращениями $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$, получая аппроксимации с порядком малости относительно $\Delta_{12} = \max\{\Delta_1, \Delta_2\} > 0$. Затем, связывая точки t_1, t_2 локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, учитывая (13), формируем аппроксимации вдоль этого диффеоморфизма с соответствующим порядком малости относительно $\Delta_1 > 0$. Отметим что неравенство (10) существенно усложняют структуру разложений в сравнении со случаем гладкой кривизны [18].

Начнем с аппроксимации уменьшаемой дроби в (12) до членов второго порядка включительно в числителе, допустимо пренебрегая членами более высокого порядка малости по отношению к Δ_{12} . Здесь, а также далее по тексту, принимая во внимание громоздкость вычислений, которые во многом носят технический характер, опустим ряд промежуточных выкладок, которые при необходимости легко поддаются восстановлению:

$$\begin{aligned} \frac{-f'(t_1)(t_2 - t_1) + (f(t_2) - f(t_1))}{(t_2 - t_1)^2} &= \frac{\left(f' - \Delta_1 f'' + \frac{\Delta_1^2}{2} f''' + o_1(\Delta_{12}^2)\right) (\Delta_2 + \Delta_1)}{(\Delta_2 + \Delta_1)^2} + \\ &+ \frac{f + \Delta_2 f' + \frac{\Delta_2^2}{2} f'' + \frac{\Delta_2^3}{6} f''' - f + \Delta_1 f' - \frac{\Delta_1^2}{2} f'' + \frac{\Delta_1^3}{6} f''' + o_1(\Delta_{12}^3)}{(\Delta_2 + \Delta_1)^2} = \\ &= \frac{\frac{(\Delta_2 + \Delta_1)^2}{2} f'' - (\Delta_2 + \Delta_1) \frac{\Delta_2^2}{2} f''' + \frac{\Delta_1^3}{6} f''' + \frac{\Delta_2^3}{6} f''' + o_1(\Delta_{12}^3)}{(\Delta_2 + \Delta_1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} f'' - \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} f''' + \frac{\Delta_1^3}{6\Delta^2} f''' + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta^2} f''' + o_4(\Delta_{12}). \end{aligned}$$

Перейдем к аппроксимации вычитаемой дроби в (12):

$$\begin{aligned} \frac{f''(t_1) \left((f'(t_2))^2 + 1 - s(t_1)s(t_2) \right) + s'(t_1)s(t_2)(f'(t_2) + f'(t_1))}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2} &= \\ = \frac{s(t_2) [f''(t_1)(s(t_2) - s(t_1)) + s'(t_1)(f'(t_2) + f'(t_1))] }{(f'(t_2) + f'(t_1))^2} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(s + \Delta_2 s')(f'' - \Delta_1 f''')(\Delta_2 + \Delta_1)s'}{4(f')^2 + (\Delta_2 - \Delta_1)^2(f'')^2 + 4(\Delta_2 - \Delta_1)f'f'' + 2\Delta_2^2 f'f'' + 2\Delta_1^2 f'f'' + o_6(\Delta_{12}^2)} + \\
& + \frac{(s + \Delta_2 s')(s' - \Delta_1 s'')(f' + \Delta_2 f'' + f' - \Delta_1 f'') + o_5(\Delta_{12})}{4(f')^2 + (\Delta_2 - \Delta_1)^2(f'')^2 + 4(\Delta_2 - \Delta_1)f'f'' + 2\Delta_2^2 f'f'' + 2\Delta_1^2 f'f'' + o_6(\Delta_{12}^2)} = \\
& = \frac{2f'ss' + (\Delta_2 + \Delta_1)f''ss' + (\Delta_2 - \Delta_1)f''ss' - 2\Delta_1 f'ss'' + 2\Delta_2 f'(s')^2 + o_5(\Delta_{12})}{4(f')^2 + (\Delta_2 - \Delta_1)^2(f'')^2 + 4(\Delta_2 - \Delta_1)f'f'' + 2\Delta_2^2 f'f'' + 2\Delta_1^2 f'f'' + o_6(\Delta_{12}^2)} = \\
& = \frac{f'ss + \Delta_2 f''ss' - \Delta_1 f'ss'' + \Delta_2 f'(s')^2 + o_5(\Delta_{12})}{2(f')^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1)f'f'' + o_7(\Delta_{12})}.
\end{aligned}$$

Получили

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial t_1}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2}f'' - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta}f''' + \frac{\Delta_1^3}{6\Delta}f''' + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta}f''' + o_4(\Delta_{12}) - \\
& - \frac{f'ss + \Delta_2 f''ss' - \Delta_1 f'ss'' + \Delta_2 f'(s')^2 + o_5(\Delta_{12})}{2(f')^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1)f'f'' + o_7(\Delta_{12})} = \\
& = \frac{-\Delta_1 f'(f'')^2 - \frac{\Delta_1^2}{\Delta}(f')^2 f''' + \frac{\Delta_1^3}{3\Delta}(f')^2 f''' + \frac{\Delta_2^3}{3\Delta}(f')^2 f''' +}{2(f')^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1)f'f'' + o_7(\Delta_{12})} + \\
& + \frac{\Delta_1 f'ss'' - \Delta_2 f'(s')^2 + o_8(\Delta_{12})}{2(f')^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1)f'f'' + o_7(\Delta_{12})} = \\
& = \frac{-\Delta_1(f'')^2 - \frac{\Delta_1^2}{\Delta}f'f''' + \frac{\Delta_1^3}{3\Delta}f'f''' + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta}f'f''' +}{2f' + 2(\Delta_2 - \Delta_1)f'' + o_7(\Delta_{12})} + \\
& + \frac{\Delta_1 ss'' - \Delta_2(s')^2 + o_8(\Delta_{12})}{2f' + 2(\Delta_2 - \Delta_1)f'' + o_7(\Delta_{12})} = \\
& = \frac{-\Delta_1 \frac{(f'')^2(f')^2}{s^2} - \frac{\Delta_1^2}{\Delta}f'f''' + \frac{\Delta_1^3}{3\Delta}f'f''' + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta}f'f''' + \Delta_1 f'f''' - \Delta_2(s')^2 + o_8(\Delta_{12})}{2f' + 2(\Delta_2 - \Delta_1)f'' + o_7(\Delta_{12})}.
\end{aligned}$$

Частная производная $\frac{\partial Q}{\partial t_2}(t_1, t_2)$ в силу симметрии функции $Q(t_1, t_2)$ относительно переменных получается из $\frac{\partial Q}{\partial t_1}(t_1, t_2)$ циклической перестановкой переменных:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial t_2}(t_1, t_2) &= \left(\frac{f(f_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{1 + f'(t_1)f'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{f'(t_2) + f'(t_1)} \right)'_{t_2} = \\
& = \frac{f'(t_2)(t_2 - t_1) - (f(f_2) - f(t_1))}{(t_2 - t_1)^2} - \\
(14) \quad & - \frac{f''(t_2)((f'(t_1))^2 + 1 - s(t_1)s(t_2)) + s(t_1)s'(t_1)(f(t_2) - f(t_1))}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2}.
\end{aligned}$$

Найдем аппроксимацию уменьшаемой дроби в (14):

$$\begin{aligned}
& \frac{f'(t_2)(t_2 - t_1) - (f(f_2) - f(t_1))}{(t_2 - t_1)^2} = \\
& \frac{\left(f' + \Delta_2 f'' + \frac{\Delta_2^2}{2} f''' + o_9(\Delta_{12}^2) \right) (\Delta_2 + \Delta_1)}{(\Delta_2 + \Delta_1)^2} - \\
& - \frac{f + \Delta_2 f' + \frac{\Delta_2^2}{2} f'' + \frac{\Delta_2^3}{6} f''' - f + \Delta_1 f' - \frac{\Delta_1^2}{2} f'' + \frac{\Delta_1^3}{6} f''' + o_{10}(\Delta_{12}^3)}{(\Delta_2 + \Delta_1)^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(f' + \Delta_2 f'' + \frac{\Delta_2^2}{2} f_+''' + o_9(\Delta_{12}^2)\right) (\Delta_2 + \Delta_1) - (\Delta_2 + \Delta_1) f'}{(\Delta_2 + \Delta_1)^2} + \\
&\quad + \frac{-\frac{\Delta_2^2 - \Delta_1^2}{2} f'' - \frac{\Delta_2^3}{6} f_+''' - \frac{\Delta_1^3}{6} f_-''' + o_{10}(\Delta_{12}^3)}{(\Delta_2 + \Delta_1)^2} = \\
&= \frac{\frac{(\Delta_2 + \Delta_1)^2}{2} f'' + (\Delta_2 + \Delta_1) \frac{\Delta_2^2}{2} f_+''' - \frac{\Delta_2^3}{6} f_+''' - \frac{\Delta_1^2}{2} f_-''' + o_{11}(\Delta_{12}^3)}{(\Delta_2 + \Delta_1)^2} = \\
&= \frac{1}{2} f'' + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} f_+''' - \frac{\Delta_2^3}{6\Delta^2} f_+''' - \frac{\Delta_1^3}{6\Delta^2} f_-''' + o_{12}(\Delta_{12}).
\end{aligned}$$

Аппроксимируем вычитаемую дробь в (14):

$$\begin{aligned}
&\frac{f''(t_2) \left((f'(t_1))^2 + 1 - s(t_1)s(t_2) \right) + s(t_1)s'(t_1)(f(t_2) - f(t_1))}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2} = \\
&= \frac{s(t_1)[f''(t_2)(s(t_1) - s(t_2)) + s'(t_2)(f'(t_2) + f'(t_1))]}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2} = \\
&= \frac{(s - \Delta_1 s')(f'' + \Delta^2 f_+''')(s - \Delta_1 s' - s - \Delta_2 s')}{\left(f' + \Delta_2 f'' + \frac{\Delta_2^2}{2} f_+''' + f' - \Delta_1 f'' + \frac{\Delta_1^2}{2} f_-''' + o_{14}(\Delta_{12}^2)\right)^2} + \\
&+ \frac{(s - \Delta_1 s')(s' + \Delta^2 s_+''')(f' + \Delta_2 f'' + f' - \Delta_1 f'') + o_{13}(\Delta_{12})}{\left(f' + \Delta_2 f'' + \frac{\Delta_2^2}{2} f_+''' + f' - \Delta_1 f'' + \frac{\Delta_1^2}{2} f_-''' + o_{14}(\Delta_{12}^2)\right)^2} = \\
&= \left(-(\Delta_1 + \Delta_2) f'' s s' + 2 f' s s' + (\Delta_2 - \Delta_1) f'' s s' + 2 \Delta_2 f' s s_+'' - \right. \\
&\quad \left. - 2 \Delta_1 f'(s')^2 + o_{13}(\Delta_{12}) \right) / \left(4(f')^2 + 4(\Delta_2 - \Delta_1) f' f'' + \right. \\
&\quad \left. + (\Delta_2 - \Delta_1)^2 (f'')^2 + 2 \Delta_2^2 f' f_+''' + 2 \Delta_1^2 f' f_-''' + o_{15}(\Delta_{12}^2) \right) = \\
&= \left(-(\Delta_1 + \Delta_2) f'' s s' + 2 f' s s' + (\Delta_2 - \Delta_1) f'' s s' + 2 \Delta_2 f' s s_+'' - \right. \\
&\quad \left. - 2 \Delta_1 f'(s')^2 + o_{13}(\Delta_{12}) \right) / \left(4(f')^2 + 4(\Delta_2 - \Delta_1) f' f'' + \right. \\
&\quad \left. + (\Delta_2 - \Delta_1)^2 (f'')^2 + 2 \Delta_2^2 f' f_+''' + 2 \Delta_1^2 f' f_-''' + o_{15}(\Delta_{12}^2) \right).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial t_2}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} f'' + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} f_+''' - \frac{\Delta_2^3}{6\Delta^2} f_+''' - \frac{\Delta_1^3}{6\Delta^2} f_-''' + o_{12}(\Delta_{12}) - \\
&- \frac{2 f' s s' - 2 \Delta_1 f'' s s' + 2 \Delta_2 f' s s_+'' - 2 \Delta_1 f'(s')^2 + o_{13}(\Delta_{12})}{2(f')^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1) f' f'' + o_{16}(\Delta_{12})} = \\
&= \frac{(f')^2 f'' + (\Delta_2 - \Delta_1) f'(f'')^2 + \frac{\Delta_2^2}{\Delta} (f')^2 f_+''' - \frac{\Delta_1^3}{3\Delta^2} (f')^2 f_+'''}{2(f')^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1) f' f'' + o_{16}(\Delta_{12})} + \\
&\quad + \frac{-\frac{\Delta_2^3}{3\Delta^2} (f')^2 f_-''' + o_{17}(\Delta_{12})}{2(f')^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1) f' f'' + o_{16}(\Delta_{12})} = \\
&= \frac{-f' s s' + \Delta_1 f'' s s' - \Delta_2 f' s s_+'' + \Delta_1 f'(s')^2 + o_{17}(\Delta_{12})}{2f' + 2(\Delta_2 - \Delta_1) f'' + o_{16}(\Delta_{12})} = \\
&= \frac{\Delta_2 (f'')^2 + \frac{\Delta_2^2}{\Delta} f' f_+''' - \frac{\Delta_2^3}{3\Delta^2} f' f_+''' - \frac{\Delta_1^3}{3\Delta^2} f' f_-'''}{2f' + 2(\Delta_2 - \Delta_1) f'' + o_{16}(\Delta_{12})} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{-\Delta_2 \left(f' f_+''' + \frac{(f'')^2}{s^2} \right) + \Delta_1 (s')^2 + o_{17}(\Delta_{12})}{2f' + 2(\Delta_2 - \Delta_1)f'' + o_{16}(\Delta_{12})} = \\
& = \frac{\frac{\Delta_2 (f'')^2 (f')^2}{s^2} + \frac{\Delta_2^2}{\Delta} f' f_+''' - \frac{\Delta_2^3}{3\Delta^2} f' f_+''' - \frac{\Delta_1^3}{3\Delta^2} f' f_-''' - \Delta_2 f' f_+''' + \Delta_1 (s')^2 + o_{17}(\Delta_{12})}{2f' + 2(\Delta_2 - \Delta_1)f'' + o_{16}(\Delta_{12})}.
\end{aligned}$$

Наконец привлечем разложение (13) для левого маркера и найдем разложения частных производных вдоль диффеоморфизма. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} &= \frac{-\Delta_1 \frac{(f'')^2 (f')^2}{s^2} - \frac{\Delta_1^2}{\Delta_1(1-\lambda) + o_2(\Delta_1)} f' f_-''' + \frac{\Delta_1^3}{3(\Delta_1(1-\lambda) + o_2(\Delta_1))^2} f' f_-'''}{2f' - 2\Delta_1(1+\lambda)f'' + o_2(\Delta_1)} + \\
& + \frac{\frac{(-\lambda\Delta_1 + o_1(\Delta_1))^3}{3(\Delta_1(1-\lambda) + o_2(\Delta_1))^2} + \Delta_1 f' f_-''' - (-\lambda\Delta_1 + o_1(\Delta_1))(s')^2 + o_3(\Delta_1)}{2f' - 2\Delta_1(1+\lambda)f'' + o_2(\Delta_1)} = \\
& = \Delta_1 \left[\frac{\frac{(f'')^2 (f')^2}{s^2} - \frac{\Delta_1}{\Delta_1(1-\lambda) + o_2(\Delta_1)} f' f_-''' + \frac{\Delta_1^2}{3(\Delta_1(1-\lambda) + o_2(\Delta_1))^2} f' f_-'''}{2f' - 2\Delta_1(1+\lambda)f'' + o_2(\Delta_1)} \right. \\
& \left. + \frac{\frac{(-\lambda + \varepsilon_1(\Delta_1))(-\lambda\Delta_1 + o_1(\Delta_1))^2}{3(\Delta_1(1-\lambda) + o_2(\Delta_1))^2} f' f_+''' + f' f_-''' - (-\lambda\Delta_1 + o_1(\Delta_1))(s')^2 + \varepsilon_3(\Delta_1)}{2f' - 2\Delta_1(1+\lambda)f'' + o_2(\Delta_1)} \right].
\end{aligned}$$

Здесь, как и оговорено выше, $\varepsilon_1(\Delta_1) \rightarrow 0$, $\varepsilon_3(\Delta_1) \rightarrow 0$, когда $\Delta_1 \downarrow 0$. Не трудно вычислить предел дробей в квадратных скобках, поскольку там фигурируют отношения бесконечно малых величин одинакового порядка. После чего получаем эквивалентность функций

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial t_1}(t_1, t_2(t_1)) &\sim (t_0 - t_1) \left[\frac{-\frac{(f'')^2 (f')^2}{s^2} - \frac{1}{1-\lambda} f' f_-''' + \frac{1}{(1-\lambda)^2} f' f_-'''}{2f'} + \right. \\
& \left. + \frac{-\frac{\lambda^3}{(1-\lambda)^2} f' f_+''' + f' f_-''' + \lambda (s')^2}{2f'} \right], t_1 \rightarrow t_0 - 0.
\end{aligned}$$

Аналогично поступим со второй частной производной:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial t_2}(t_1, t_2(t_1)) &= \frac{\frac{\Delta_2 (f'')^2 (f')^2}{s^2} + \frac{\Delta_2^2}{\Delta} f' f_+''' - \frac{\Delta_2^3}{3\Delta^2} f' f_+''' - \frac{\Delta_1^3}{3\Delta^2} f' f_-'''}{2f' + 2(\Delta_2 - \Delta_1)f'' + o_{16}(\Delta_{12})} + \\
& + \frac{-\Delta_2 f' f_+''' + \Delta_1 (s')^2 + o_{17}(\Delta_{12})}{2f' + 2(\Delta_2 - \Delta_1)f'' + o_{16}(\Delta_{12})} = \\
& = \frac{\frac{(-\lambda\Delta_1 + o_1(\Delta_1))(f'')^2 (f')^2}{s^2} + \frac{(-\lambda\Delta_1 + o_1(\Delta_1))^2}{\Delta_1(1-\lambda) + o_1(\Delta_1)} f' f_+''' - \frac{(-\lambda\Delta_1 + o_1(\Delta_1))^3}{3(\Delta_1(1-\lambda) + o_1(\Delta_1))^2} f' f_+'''}{2f' + 2(\Delta_2 - \Delta_1)f'' + o_{16}(\Delta_{12})} + \\
& + \frac{-\frac{\Delta_1^3}{3(\Delta_1(1-\lambda) + o_1(\Delta_1))^2} f' f_-''' - (\Delta_1(1-\lambda) + o_1(\Delta_1)) f' f_-''' + \Delta_1 (s')^2 + o_{17}(\Delta_{12})}{2f' - 2\Delta_1(1+\lambda)f'' + o_4(\Delta_1)} = \\
& = \Delta_1 \left[\frac{(-\lambda + \varepsilon_1(\Delta_1))(f'')^2 (f')^2}{s^2} + \frac{(-\lambda\Delta_1 + o_1(\Delta_1))^2}{\Delta_1(1-\lambda) + o_1(\Delta_1)} f' f_+''' - \right. \\
& - \frac{(-\lambda + \varepsilon_1(\Delta_1))(-\lambda\Delta_1 + o_1(\Delta_1))^2}{3(\Delta_1(1-\lambda) + o_1(\Delta_1))^2} f' f_+''' - \frac{\Delta_1^2}{3(\Delta_1(1-\lambda) + o_1(\Delta_1))^2} f' f_-''' - \\
& \left. - (-\lambda + \varepsilon_1(\Delta_1)) f' f_+''' + (s')^2 + \varepsilon_{17}(\Delta_1) \right] / (2f' - 2\Delta_1(1+\lambda)f'' + o_4(\Delta_1)).
\end{aligned}$$

Вычислив предел дроби, получим эквивалентность функций:

$$\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} \sim \left[\frac{-\lambda(f'')^2(f')^2}{s^2} + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} f' f_+''' + \frac{\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} f' f_+''' - \frac{1}{3(1-\lambda)^2} f' f_-''' + \frac{\lambda f' f_+''' + (s')^2}{2f'} \right], t_1 \rightarrow t_0 - 0.$$

Отметим, что условие нестационарности (9) при вычислении аппроксимаций $\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1}$ и $\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2}$ гарантирует существование конечных предельных величин в разложениях.

Перейдем к пределу, руководствуясь условием трансверсальности (8):

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1}}{\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2}} = \left(-\frac{(f'')^2(f')^2}{s^2} - \frac{1}{1-\lambda} f' f_-''' + \frac{1}{3(1-\lambda)^2} f' f_-''' - \frac{\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} f' f_+''' + f' f_-''' + \lambda(s')^2 \right) / \left(-\frac{\lambda(f'')^2(f')^2}{s^2} + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} f' f_+''' + \frac{\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} f' f_+''' - \frac{1}{3(1-\lambda)^2} f' f_-''' + \lambda f' f_+''' + (s')^2 \right).$$

Стало быть,

$$\lambda = \left(-\frac{(f'')^2(f')^2}{s^2} - \frac{1}{1-\lambda} f' f_-''' + \frac{1}{3(1-\lambda)^2} f' f_-''' - \frac{\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} f' f_+''' + f' f_-''' + \lambda(s')^2 \right) / \left(-\frac{\lambda(f'')^2(f')^2}{s^2} + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} f' f_+''' + \frac{\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} f' f_+''' - \frac{1}{3(1-\lambda)^2} f' f_-''' + \lambda f' f_+''' + (s')^2 \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \frac{(f'')^2(f')^2}{s^2} + \frac{1}{1-\lambda} f' f_-''' - \frac{1}{3(1-\lambda)^2} f' f_-''' + \frac{\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} f' f_+''' - f' f_-''' - \lambda(s')^2 = \\ & = \frac{-\lambda^2(f'')^2(f')^2}{s^2} + \frac{\lambda^3}{1-\lambda} f' f_+''' + \frac{\lambda^4}{3(1-\lambda)^2} f' f_+''' - \frac{\lambda}{3(1-\lambda)^2} f' f_-''' + \lambda^2 f' f_+''' + \lambda(s')^2. \\ & \frac{(f'')^2(f')^2}{s^2} + \left(\frac{1}{1-\lambda} - \frac{1}{3(1-\lambda)^2} - 1 \right) f' f_-''' + \frac{\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} f' f_+''' - \lambda(s')^2 = \\ (15) \quad & = \frac{-\lambda^2(f'')^2(f')^2}{s^2} + \left(\frac{\lambda^3}{1-\lambda} - \frac{\lambda^4}{3(1-\lambda)^2} + \lambda^2 \right) f' f_+''' - \frac{\lambda}{3(1-\lambda)^2} f' f_-''' + \lambda(s')^2. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\lambda} - \frac{1}{3(1-\lambda)^2} - 1 &= \frac{-1+3\lambda-3\lambda^2}{3(1-\lambda)^2}, \\ \frac{\lambda^3}{1-\lambda} + \frac{\lambda^4}{3(1-\lambda)^2} + \lambda^2 &= \lambda^2 \frac{\lambda^2-3\lambda+3}{3(1-\lambda)^2}. \end{aligned}$$

Поэтому равенство (15) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{(f'')^2(f')^2}{s^2} + \frac{-1+3\lambda-3\lambda^2}{3(1-\lambda)^2} f' f''' + \frac{\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} f' f''' - \lambda(s')^2 = \\ & = \frac{-\lambda^2(f'')^2(f')^2}{s^2} + \lambda^2 \frac{\lambda^2-3\lambda+3}{3(1-\lambda)^2} f' f''' - \frac{\lambda}{3(1-\lambda)^2} f' f''' + \lambda(s')^2. \end{aligned}$$

Учтем условие нестационарности (9), сократим обе части уравнения на $f'(t_0) \neq 0$ и выполним алгебраические преобразования:

$$\begin{aligned} & \frac{-1+3\lambda-3\lambda^2}{3(1-\lambda)^2} f''' + \frac{\lambda}{3(1-\lambda)^2} f''' + \frac{\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} f''' - \lambda^2 \frac{\lambda^2-3\lambda+3}{3(1-\lambda)^2} f''' = \\ & = \frac{-\lambda^2(f'')^2 f'}{s^2} + 2\lambda(s')^2 - \frac{(f'')^2 f'}{s^2}. \\ & \frac{-1+4\lambda-3\lambda^2}{3(1-\lambda)^2} f''' - \lambda^2 \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{3(1-\lambda)^2} f''' = \frac{-\lambda^2(f'')^2 f'}{s^2} + 2\lambda(s')^2 - \frac{(f'')^2 f'}{s^2}. \\ & \frac{-3(\lambda-1)(\lambda-1/3)}{3(1-\lambda)^2} f''' - \lambda^2 \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{3(1-\lambda)^2} f''' = \frac{-\lambda^2(f'')^2 f'}{s^2} + 2\lambda \frac{(f'')^2 f'}{s^2} - \frac{(f'')^2 f'}{s^2}. \\ & \frac{3\lambda-1}{3(\lambda-1)} f''' - \lambda^2 \frac{3-\lambda}{3(\lambda-1)} f''' = -\frac{(f'')^2 f'}{s^2} (\lambda^2-2\lambda+1). \\ & \lambda^2 \frac{3-\lambda}{3(\lambda-1)} f''' - \frac{3\lambda-1}{3(\lambda-1)} f''' + \frac{(f'')^2 f'}{s^2} (\lambda-1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$(3-\lambda)\lambda^2 f''' + (3\lambda-1)f''' + 3\frac{(f'')^2 f'}{s^2} (\lambda-1)^3 = 0.$$

Получили (11). Теорема доказана. \square

Следствие 1. В условиях теоремы 1 равенство (11) эквивалентно равенству

$$(16) \quad (3\lambda^2 - \lambda^3)k'_+ + (1-3\lambda)k'_- = 0.$$

Здесь $k'_- = k'(t_0 - 0)$ — односторонняя левая производная кривизны, $k'_+ = k'(t_0 + 0)$ — односторонняя правая производная кривизны.

Доказательство. Умножим обе части равенства (11) на $f'(t_0) \neq 0$. Воспользовавшись формулами для односторонних кривизн $k'_\pm = \frac{f' f''' s^2 - 3(f'')^2 (f')^2}{s^5}$, выразим $f' f''' = k'_\pm s^3 + 3\frac{(f'')^2 (f')^2}{s^2}$ и подставим в полученное равенство. Осуществим алгебраические преобразования:

$$\begin{aligned} & (3-\lambda)\lambda^2 \left(k'_+ s^3 + 3\frac{(f'')^2 (f')^2}{s^2} \right) + (1-3\lambda) \left(k'_- s^3 + 3\frac{(f'')^2 (f')^2}{s^2} \right) + \\ & + 3\frac{(f'')^2 (f')^2}{s^2} (\lambda-1)^3 = 0, \\ & (3\lambda^2 - \lambda^3)k'_+ s^3 + (1-3\lambda)k'_- s^3 + 3\frac{(f'')^2 (f')^2}{s^2} (3\lambda^2 - \lambda^3 + (1-3\lambda) + (\lambda-1)^3) = 0, \\ & (3\lambda^2 - \lambda^3)k'_+ s^3 + (1-3\lambda)k'_- s^3 + 3\frac{(f'')^2 (f')^2}{s^2} (-(\lambda-1)^3 + (\lambda-1)^3) = 0, \\ & (3\lambda^2 - \lambda^3)k'_+ s^3 + (1-3\lambda)k'_- s^3 = 0. \end{aligned}$$

Сократив на $s^3 \neq 0$, получим (16). \square

Замечание 1. Условие (16) является необходимым условием существования нестационарной псевдовершины границы краевого множества в задаче (1) в классе кривых с разрывной гладкостью кривизны. Формально равенство (16) является необходимым условием существования псевдовершины и на множестве стационарных точек, ибо односторонние кривизны при условии $f'(t_0) = 0$ равны нулю и равенство (16) выполняется.

Следствие 2. Если в условиях теоремы 1 допустить гладкость кривизны границы краевого множества в псевдовершине $\mathbf{x}^{(0)} = (t_0, f(t_0))$, $t_0 \in T$, то в псевдовершине выполняется условие стационарности кривизны:

$$(17) \quad k'(t_0) = 0.$$

Доказательство. По условию в псевдовершине имеем равенство односторонних кривизн классической кривизне:

$$k'(t_0 - 0) = k'(t_0 + 0) = k'(t_0).$$

Тогда (16) принимает вид

$$\begin{aligned} (3\lambda^2 - \lambda^3)k' + (1 - 3\lambda)k' &= 0, \\ (3\lambda^2 - \lambda^3 + 1 - 3\lambda)k' &= 0, \\ (1 - \lambda)^3 k' &= 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство вне зависимости от значения левого маркера $\lambda \leq 0$ эквивалентно (17). \square

Замечание 2. Условие (17) получено ранее [18] как необходимое условие существования псевдовершины трижды гладкой кривой. В этом смысле Теорема 1 и Следствие 2 устанавливают для задачи (1) согласованное соответствие между границами краевых множеств, имеющих гладкую кривизну и кривизну с разрывами ее гладкости.

4. ПРИМЕР ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫСТРОДЕЙСТВИЮ

Для задачи (1) примем в качестве краевого множества подграфик функции

$$(18) \quad f(t) = \begin{cases} -(t-2)^{-1} + (t-1)^3/2, & t \leq 1, \\ (t-0.5)^2 + 0.75, & t > 1. \end{cases}$$

Отметим, что M является невыпуклым множеством. Его граница имеет псевдовершину в точке $\mathbf{x}^{(0)} = (t_0, t_2(t_0)) = (1, 1)$, причем $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = 2$, $f'''(1-0) = 9$, $f'''(1+0) = 0$. Таким образом, производная первого порядка отлична от нуля, а односторонние производные третьего порядка существуют, конечны и не равны друг другу. Находимся в условиях теоремы. Левый маркер $\lambda = t_2'(t_0 - 0)$ в псевдовершине удовлетворяет равенству (11), которое для данных условий принимает вид

$$(19) \quad 2\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0.$$

Значение маркера находим с помощью численных процедур, здесь $\lambda \approx -0.63122$. Заметим, что два других корня (19) являются комплексными числами.

Найти в явной аналитической форме решение краевой задачи (1) удается в очень редких случаях. Поэтому актуальной проблемой является создание численных алгоритмов (подробнее см. [11]). При построении решения рассматриваемой задачи с ограничением (18) также удастся продвинуться, применяя

вычислительные алгоритмы. На рисунке 1 представлены графики найденных с помощью численных процедур локальных диффеоморфизмов — функции $t_2 = t_2(t_1)$, определенной слева от точки $t_1 = t_0 = 1$, и ей обратной функции $t_1 = t_1(t_2)$, определенной справа от точки $t_2 = t_0 = 1$. Здесь отметим, что с точки зрения геометрии левый маркер $\lambda \approx -0.63122$ является тангенсом угла наклона по отношению к оси t_1 левой касательной к графику $t_2 = t_2(t_1)$ в точке $(t_1, t_2) = (1, 1)$. Соответственно, правый маркер $\mu = \frac{1}{\lambda} \approx -1.58423$ является тангенсом угла наклона по отношению к оси t_2 правой касательной к графику $t_1 = t_1(t_2)$ в точке $(t_1, t_2) = (1, 1)$. Располагая односторонними маркерами

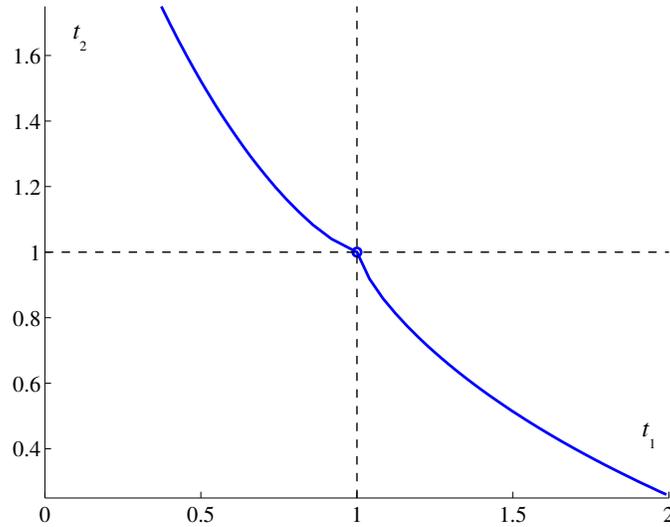


Рис. 1. Склейка графиков взаимнообратных локальных диффеоморфизмов в общей предельной точке.

и найденными локальными диффеоморфизмами, формируем ветвь сингулярного множества — дугу кривой, на которой минимаксное решение задачи (1) имеет разрывный градиент. Говоря о приложениях, следует подчеркнуть, что минимаксное решение $u = u(\mathbf{x})$ задачи (1) совпадает с функцией оптимального результата для соответствующей задачи управления по быстродействию с невыпуклым целевым множеством M . При этом ветвь сингулярного множества относится к рассеивающим кривым (см. Рис. 2), обладающей тем свойством, что оптимальные траектории с начальной точкой на этой линии, а их тут ровно две, устремлены в разные стороны от кривой. Линии уровня Φ функции оптимального результата $u = u(\mathbf{x})$ показаны на Рис. 2 с шагом 0.5. Аппроксимация графика негладкой функции оптимального результата на прямоугольной сетке с ячейками 0.1×0.1 представлена на Рис. 3.

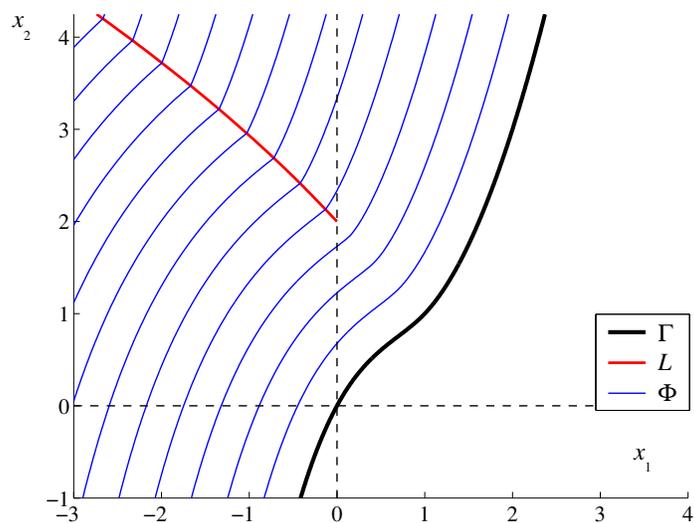


Рис. 2. Граница Γ целевого множества M , линии уровня Φ функции оптимального результата $u = u(\mathbf{x})$ и рассеивающая кривая L .

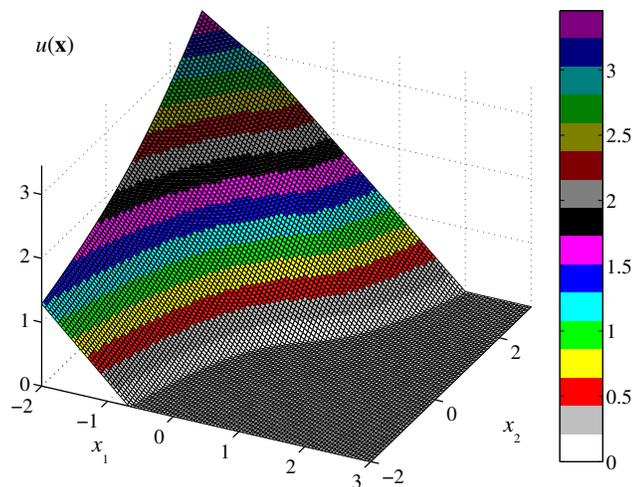


Рис. 3. График функции оптимального результата $u = u(\mathbf{x})$.

REFERENCES

- [1] S.N. Kruzhkov, *Generalized solutions of the Hamilton-Jacobi equations of eikonal type. I: Formulation of the problems; existence, uniqueness and stability theorems; some properties of the solutions*, Math. USSR, Sb., **27**:3, (1975), 406–446. Zbl 0369.35012
- [2] M.G. Crandall, P.L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Am. Math. Soc., **277**:1 (1983), 1–42. Zbl 0599.35024

- [3] N.N. Krasovskii, A.I. Subbotin, *Positional-differential games*, Nauka, Moscow, 1974. Zbl 0298.90067
- [4] A.I. Subbotin, *Generalized solutions of first order PDEs. The dynamical optimization perspective*, Birkhäuser, Basel, 1994. Zbl 0820.35003
- [5] V.F. Dem'yanov, A.M. Rubinov, *Foundations of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus*, Nauka, Moscow, 1990. Zbl 0728.49001
- [6] A.M. Taras'ev, T.B. Tokmantsev, A.S. Uspenskii, V.N. Ushakov, *On procedures for constructing solutions in differential games on a finite interval of time*, J. Math. Sci., **139**:5 (2006), 6954–6975. Zbl 1149.49034
- [7] J.A. Sethian, A. Vladimirsky, *Fast methods for the eikonal and related Hamilton-Jacobi equations on unstructured meshes*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **97**:11 (2000), 5699–5703. Zbl 0963.65076
- [8] S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorotko, *A numerical algorithm for computing tsunami wave amplitude*, Numer. Analys. Appl., **9**:2 (2016), 118–128. Zbl 1349.86022
- [9] P.D. Lebedev, A.A. Uspenskii, V.N. Ushakov, *Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation*, Proc. Steklov Inst. Math., **263**:2 (2008), S191–S201. Zbl 1185.35058
- [10] V.N. Ushakov, A.A. Uspenskii, *α -sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **26**:1 (2016), 95–120. Zbl 1365.52008
- [11] P.D. Lebedev, A.A. Uspenskii, *Construction of a solution to a velocity problem in the case of violation of the smoothness of the curvature of the target set boundary*, Izv. Inst. Mat. Inform., Udmurt. Gos. Univ., **53** (2019), 98–114. Zbl 07274532
- [12] Th. Bröcker, *Differentiable germs and catastrophes. Translated by L. Lander*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975. Zbl 0302.58006
- [13] N.V. Efimov, S.B. Stechkin, *Some properties of Chebyshev sets*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **118** (1958), 17–19. Zbl 0081.16402
- [14] A.R. Alimov, I.G. Tsar'kov, *Connectedness and solarity in problems of best and near-best approximation*, Russ. Math. Surv., **71**:1 (2016), 1–77. Zbl 1350.41031
- [15] J.W. Bruce, P.J. Giblin, *Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984. Zbl 0534.58008
- [16] A.A. Uspenskii, P.D. Lebedev, *Identification of the singularity of the generalized solution of the Dirichlet problem for an eikonal type equation under the conditions of minimal smoothness of a boundary set*, Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, **28**:1 (2018), 59–73. Zbl 1402.35011
- [17] A.A. Uspenskii, P.D. Lebedev, *Transversality conditions for solution branches of a nonlinear equation in a time-optimal problem with circular indicatrix*, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **14**:4 (2008), 82–100.
- [18] A.A. Uspenskii, *Necessary conditions for the existence of pseudovertices of the boundary set in the Dirichlet problem for the eikonal equation*, Tr. Inst. Mat. Mekh., **21**:1, (2015), 250–263. MR3407899

LEBEDEV PAVEL DMITRIEVICH
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
URAL BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,
16, S. KOVALEVSKAYA STR.,
YEKATERINBURG, 620990, RUSSIA
URAL FEDERAL UNIVERSITY,
19, MIRA STR.,
YEKATERINBURG, 620002, RUSSIA
Email address: pleb@yandex.ru

USPENSKII ALEXANDER ALEXANDROVICH
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
URAL BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,
16, S. KOVALEVSKAYA STR.,
YEKATERINBURG, 620990, RUSSIA
URAL FEDERAL UNIVERSITY,
19, MIRA STR.,
YEKATERINBURG, 620002, RUSSIA
Email address: uspen@imm.uran.ru