S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1990–2027 (2020) УДК 517.95

DOI 10.33048/semi.2020.17.134 MSC 35Q74

ОБЪЕМНЫЙ РОСТ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА НЕО-ГУКА

П.И. ПЛОТНИКОВ

Abstract. We consider a mathematical model of an incompressible neo-Hookean material, which is widely used in the modeling of biological tissues. The derivation of the governing equations for the deformation field, pressure, and growth factor is given. The resulting model includes the steady-state moment balance equation, the mass balance equation, and the growth factor evolutionary equation. The problem of material growth under the action of hydrostatic pressure is considered. The solution is found using the Lyapunov-Schmidt method. A detailed analysis of the linearized equations is carried out. The existence of a strong solution to the nonlinear problem on an arbitrary time interval for small external load is proved.

Keywords: volumetric growth, mathematical modeling of brain growth, mathematical problems of nonlinear elasticity.

Содержание

Plotnikov, P.I., Volumetric growth of neo-Hookean incompressible material.

Работа поддержана РНФ (грант 19-11-00069).

Поступила 27 ноября 2020 г., опубликована 3 декабря 2020 г.

1. Введение. Математическая модель

Материал нео-Гука. Главной целью работы является построение и анализ математической модели роста головного мозга под действием внутричерепного давления. Несжимаемый материал нео-Гука является простейшей моделью нелинейного материала, который находит широкое применение при математическом моделировании поведения полимерных и биологических субстанций и, в частности, при моделировании состояния головного мозга. В настоящей статье рассматривается краевая задача для нелинейной системы дифференциальных уравнений, описывающая объемный рост несжимаемого материала нео-Гука под действием приложенного гидростатического давления. На протяжении статьи мы будем предполагать, что материал занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, с гладкой границей в пространстве расчетных координат $x = (x_1, ., x_d)$. Расчетные координаты часто отождествляют с лагранжевыми координатами - положениями материальных частиц в начальный момент или в стационарных задачах с положениями материальных частиц в некотором идеальном ненагруженном состоянии. Состояние материала полностью характеризуется полем деформаций $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ и распределением давления $p : \Omega \to \mathbb{R}$. Градиент поля деформаций $\nabla\mathbf{u}$ совпадает с матрицей Якоби отображения $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^d$, которая имеет элементы

$$(\nabla\mathbf{u})_{ij} = \partial_j u_i, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial_{x_i}}. \tag{1.1}$$

Далее мы будем использовать обозначение

$$\mathbf{F} = \nabla\mathbf{u}, \tag{1.2}$$

Напомним, что материал является несжимаемым, если выполняется равенство

$$\det\, \nabla\mathbf{u} = 1 \text{ в } \Omega. \tag{1.3}$$

Далее мы также будем использовать обозначение $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, ., \mathbf{A}_d]$ для матричнозначной функции $\mathbf{A} : \Omega \to \mathbb{R}^{d^2}$ со столбцами $\mathbf{A}_i : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Дивергенция векторного поля $\mathbf{u}$ и матричнозначной функции $\mathbf{A}$ определяется следующим образом

$$\text{div}\, \mathbf{u} = \partial_i u_i, \quad \text{div}\, \mathbf{A} = \partial_j \mathbf{A}_j. \tag{1.4}$$

Наконец, мы будем использовать обозначения, [1],

$$\text{adj}\, \mathbf{A} := \det\, \mathbf{A}\, \mathbf{A}^{-1}, \quad \text{cof}\, \mathbf{A} = (\text{adj}\, \mathbf{A})^\top \tag{1.5}$$

для матрицы присоединенной к матрице $\mathbf{A}$ и ее сопряженной. Состояние гиперупругого материала полностью характеризуется плотностью упругой запасенной энергии. В изотермическом случае она совпадает с плотностью свободной энергии Гельмгольца. Для несжимаемого материала нео-Гука плотность запасенной энергии имеет вид, [1],

$$\Psi = \frac{1}{2}\big(|\nabla\mathbf{u}|^2 - d\big). \tag{1.6}$$

Из условия (1.3) вытекает, что плотность запасенной энергии Ψ неотрицательна и достигает нулевого минимума на ненагруженном состоянии $\mathbf{u}(x) = x$. Полная запасенная энергии объема определяется равенством

$$\int_\Omega \Psi\, dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \big(|\nabla\mathbf{u}|^2 - d\big)dx. \tag{1.7}$$

Из вида функции запасенной энергии следует, что полная система уравнений динамики несжимаемого материала нео-Гука в пространственно временном цилиндре $\Omega \times (0,T)$ имеет вид, см. [4], [5],

$$\partial_t^2 \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} - \nabla_u p = 0, \quad \det \nabla \mathbf{u} = 1. \tag{1.8}$$

Здесь $\nabla_u p$ обозначает градиент давления по $\mathbf{u}$. Удобно переписать член с давлением в виде градиента по расчетной независимой переменной. С этой целью заметим, что

$$\partial_{u_i} p = \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \partial_k p = \mathbf{F}_{ki}^{-1} \partial_k p = \big(\mathbf{F}^{-\top} \nabla p\big)_i$$

Отсюда и из (1.8) следует, что

$$\begin{gathered} \partial_t^2 \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} - \mathbf{F}^{-\top} \nabla p = 0, \\ \det \mathbf{F} = 1, \quad \mathbf{F} = \nabla \mathbf{u} \ \text{ в } \ \Omega \times (0,T). \end{gathered} \tag{1.9}$$

В стационарном или квазистационарном случаях уравнения (1.9) примут вид

$$\begin{gathered} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}^{-\top} \nabla p = 0, \\ \det \mathbf{F} = 1, \quad \mathbf{F} = \nabla \mathbf{u} \ \text{ в } \ \Omega. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Основные положения теории объемного роста несжимаемого материала нео-Гука. Напомним основные факты теории объемного роста гиперупругого материала. Их подробное изложение можно найти в статьях [3], [7] и [8]. Наш анализ опирается на подход, развитый в работах [2] и [6]. Основным постулатом теории является гипотеза о том, что процесс условно разбивается на две части. Полная деформация определяется отображением $x \to \mathbf{u}(x)$ расчетной области Ω в физическое пространство $\mathbb{R}^d$. Это отображение рассматривается как суперпозиция двух отображений. Первое отвечает только за рост материала и переводит каждую материальную частицу в ее новое состояние за счет роста или атрофии материала. При этом эволюция каждой частицы не зависит от эволюции остальных. В результате вновь полученные материальные частицы могут многократно пересекаться и в материале могут появляться разрывы. Следующее отображение подвергает каждую частицу упругой деформации, которая устраняет пересечения и разрывы и воссоздает плотную упаковку материальных частиц. Этот подход был впервые предложен в работе [8]. Разработка на его основе жизнеспособной математической модели весьма затруднительна. Решающий шаг был сделан в статье [7], в которой был предложен инфинитезимальный вариант этой идеи. Согласно [7], градиент тензора деформаций для растущего материала имеет представление

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \, \mathbf{F}_g, \quad \mathbf{F} = \nabla \mathbf{u}, \tag{1.11}$$

где матричнозначная функция $\mathbf{F}_g$ отвечает за рост и называется фактором роста , а $\mathbf{F}_e$ отвечает за корректирующую упругую деформацию. Это соотношение используется для определения упругих деформаций при известном факторе роста. Далее, согласно принципу независимости вида плотности свободной энергии от выбора расчетной системы координат, см. [6], плотность свободной энергии Ψ_g растущего материала определяется через плотность свободной энергии исходного гиперупругого материала Ψ посредством равенства

$$\Psi_g = \det \mathbf{F}_g \, \Psi(\mathbf{F}_e) \equiv \det \mathbf{F}_g \, \Psi(\mathbf{F} \, \mathbf{F}_g^{-1}) \equiv \det \mathbf{F}_g \, \frac{1}{2} \big(|\mathbf{F} \, \mathbf{F}_g^{-1}|^2 - d \big). \tag{1.12}$$

В представлении (1.11) тензор $\mathbf{F}_e$ соответствует градиенту деформаций исходного несжимаемого материала нео-Гука, что влечет равенство $\det \mathbf{F}_e = 1$. Отсюда и из (1.11) вытекает определяющее соотношение

$$\det \mathbf{F} = \det \mathbf{F}_g \quad \text{или эквивалентно} \quad \det \nabla \mathbf{u} = \det \mathbf{F}_g. \tag{1.13}$$

Неравенство Клаузиуса-Дюгема. Тензор деформаций. Диссипативное неравенство. Ряд важных определяющих соотношений теории объемного роста выводится как следствие неравенства Клаузиуса-Дюгема и принципа независимости движений. В изотермическом случае в теории роста первого порядка неравенство Клаузиуса-Дюгема имеет вид, [2],

$$\partial_t \Psi_g \, - \, \mathbf{T} : \partial_t \mathbf{F} \le 0, \tag{1.14}$$

где $\mathbf{T}$– тензор напряжений, а символ : обозначает стандартное скалярное произведение двух матриц. Вычислим первое слагаемое в левой части этого неравенства. Имеем

$$\partial_t \Psi_g = \partial_t J \, \Psi(\mathbf{F}_e) + \partial_t \Psi = \partial_t J \, \Psi(\mathbf{F}_e) + J \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}_{e,ij}} \, \partial_t \mathbf{F}_{e,ij}, \quad J = \det \mathbf{F}_g. \tag{1.15}$$

Из соотношения $\mathbf{F}_{e,ij} = \mathbf{F}_{i\alpha} \mathbf{F}^{-1}_{g,\alpha j}$ вытекает тождество

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{F}_{e,ij} = \partial_t \mathbf{F}_{i\alpha} \mathbf{F}^{-1}_{g,\alpha j} - \mathbf{F}_{i\alpha} (\mathbf{F}_g^{-1} \partial_t \mathbf{F}_g \mathbf{F}_g^{-1})_{\alpha j} = \\ \partial_t \mathbf{F}_{i\alpha} \mathbf{F}^{-1}_{g,\alpha j} - \mathbf{F}_{i\alpha} (\mathbf{F}^{-1}_{g,\alpha,k} \partial_t \mathbf{F}_{g,km} \mathbf{F}^{-1}_{g,mj}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\partial_t \mathbf{F}_{e,ij} = (\partial_t \mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1})_{ij} - (\mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1})_{ik} \, (\partial_t \mathbf{F}_g \mathbf{F}_g^{-1})_{kj},$$

или

$$\partial_t \mathbf{F}_e = \partial_t \mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1} - (\mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1}) \, (\partial_t \mathbf{F}_g \mathbf{F}_g^{-1}). \tag{1.16}$$

Для материала нео-Гука имеем

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{F}_e)}{\partial \mathbf{F}_{e,ij}} = \mathbf{F}_{e,ij} = \mathbf{F}_{i\beta} \mathbf{F}^{-1}_{g,\beta j} \quad \text{или эквивалентно} \quad \frac{\partial \Psi(\mathbf{F}_e)}{\partial \mathbf{F}_e} = \mathbf{F} \, \mathbf{F}_g^{-1}.$$

Отсюда, из тождества

$$\partial_t \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}_e} \, : \, \partial_t \mathbf{F}_e$$

и (1.16) находим

$$\partial_t \Psi(\mathbf{F}_e) = (\mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1}) \, : \, (\partial_t \mathbf{F} \, \mathbf{F}_g^{-1}) - (\mathbf{F} \, \mathbf{F}_g^{-1}) \, : \, \big\{ (\mathbf{F} \, \mathbf{F}_g^{-1}) \, (\partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1}) \big\}.$$

Используя тождества

$$\mathbf{A} : (\mathbf{B} \, \mathbf{C}) = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{i\alpha} \mathbf{C}_{\alpha j} = (\mathbf{B}^\top \, \mathbf{A}) : \mathbf{C} = (\mathbf{A} \, \mathbf{C}^\top) : \mathbf{B},$$

находим

$$\partial_t \Psi = (\mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1} \mathbf{F}_g^{-\top}) \, : \, (\partial_t \mathbf{F}) - (\mathbf{F}_g^{-\top} \mathbf{F}^\top \mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1}) : (\partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1}). \tag{1.17}$$

Далее из формулы для производной Фреше якобиана, [1] ch.1,

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \big(\det (\mathbf{A} + \mathbf{H}) - \det \mathbf{A} \, \big) = \operatorname{tr} \big(\, (\operatorname{cof} \mathbf{A})^\top \mathbf{H} \, \big) \equiv (\operatorname{cof} \mathbf{A}) \, : \, \mathbf{H}$$

находим

$$\partial_t J = \partial_t \det \mathbf{F}_g = (\operatorname{cof} \mathbf{F}_g) \, : \, \partial_t \mathbf{F}_g = J \mathbf{F}_g^{-\top} : \partial_t \mathbf{F}_g.$$

Далее имеем

$$\mathbf{F}_g^{-\top} : \partial_t \mathbf{F}_g = \mathbf{F}_{g,\beta i}^{-\top} \partial_t \mathbf{F}_{g,\beta_i} = \partial_t \mathbf{F}_{g,\beta_i} \mathbf{F}_{g,i\beta}^{-1} = I \, : (\partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1}).$$

Отсюда получаем

$$\partial_t J = I \, : (\partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1}) \quad \text{и} \quad \partial_t J \, \Psi = \Psi_g \, I \, : (\partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1}) \tag{1.18}$$

Комбинируя это равенство с соотношениями (1.17), (1.15) приходим к равенству

$$\partial_t \Psi_g = (\mathbf{F}\mathbf{B}) \, : \, (\partial_t \mathbf{F}) + \left\{ \, \Psi_g \, I \, - \det \mathbf{F}_g \, \left(\mathbf{F}_g^{-\top} \mathbf{F}^\top \mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1}\right) \right\} : (\partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1}). \tag{1.19}$$

в котором

$$\mathbf{B} = (\det \mathbf{F}_g) \mathbf{F}_g^{-1} \mathbf{F}_g^{-\top}. \tag{1.20}$$

Подставляя эти соотношения в неравенство Клаузиуса-Дюгема (1.14) мы можем переписать его в следующей форме

$$(\mathbf{F}\mathbf{B} - \mathbf{T}) \, : \, (\partial_t \mathbf{F}) + \left\{ \, \Psi_g \, I \, - \det \mathbf{F}_g \, \left(\mathbf{F}_g^{-\top} \mathbf{F}^\top \mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1}\right) \right\} : (\partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1}) \leq 0. \tag{1.21}$$

Следующий шаг – использование условия несжимаемости (1.13) для получения дальнейшей информации. С этой целью заменим, что из (1.13) и формулы для дифференцирования якобиана вытекает равенство

$$(\det \mathbf{F}) \, \mathbf{F}^{-\top} \, : \, \partial_t \mathbf{F} = \partial_t J.$$

Напомним, что $\det \mathbf{F} = J$. Это соотношение можно рассматривать как неопределенную систему линейных уравнений для $\partial_t \mathbf{F}$. Ее общее решение имеет вид

$$\partial_t \mathbf{F} = \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial_t J}{J |\mathbf{F}^{-\top}|^2} \, \mathbf{F}^{-\top},$$

где $\boldsymbol{\xi}$ произвольная матрица, удовлетворяющая условию $\boldsymbol{\xi} : \mathbf{F}^{-\top} = 0$. Подстановка этого представления в (1.21) приводит к неравенству

$$\begin{gathered} (\mathbf{F}\mathbf{B} - \mathbf{T}) \, : \, \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial_t J}{J |\mathbf{F}^{-\top}|^2} (\mathbf{F}\mathbf{B} - \mathbf{T}) : \mathbf{F}^{-\top} + \\ \left\{ \, \Psi_g \, I \, - \det \mathbf{F}_g \, \left(\mathbf{F}_g^{-\top} \mathbf{F}^\top \mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1}\right) \right\} : (\partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1}) \leq 0. \end{gathered} \tag{1.22}$$

Согласно принципу независимости движений это неравенство должно выполняться для всех кинематически допустимых $\partial_t \mathbf{F}$, то есть для всех матриц $\boldsymbol{\xi}$, удовлетворяющая условию $\boldsymbol{\xi} : F^{-\top} = 0$. Это возможно только если

$$(\mathbf{F}\mathbf{B} - \mathbf{T}) \, : \, \boldsymbol{\xi} = 0$$

или эквивалентно

$$\mathbf{F}\mathbf{B} - \mathbf{T} = \, -p \, \operatorname{cof} \mathbf{F} \tag{1.23}$$

для некоторого скаляра p. Подстановка этого равенства в (1.22) дает

$$\begin{gathered} -\frac{\partial_t J}{J |\mathbf{F}^{-\top}|^2} p \, \operatorname{cof} \mathbf{F} : \mathbf{F}^{-\top} + \\ \left\{ \, \Psi_g \, I \, - \det \mathbf{F}_g \, \left(\mathbf{F}_g^{-\top} \mathbf{F}^\top \mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1}\right) \right\} : (\partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1}) \leq 0. \end{gathered}$$

замечая, что

$$\frac{\partial_t J}{J |\mathbf{F}^{-\top}|^2} p \, \operatorname{cof} \mathbf{F} : \mathbf{F}^{-\top} = \frac{\partial_t J}{J} p \, \det \mathbf{F} = p \partial_t J = J p I : (\partial_t \mathbf{F}_g \mathbf{F}_g^{-1})$$

окончательно находим

$$\mathbf{b} : (\partial_t \mathbf{F}_g \mathbf{F}_g^{-1}) \le 0, \tag{1.24}$$

где материальный тензор Эшелби определяется равенством окончательно находим

$$\mathbf{b} = \Psi_g \, I \, - J\big\{pI + (\mathbf{F}_g^{-\top} \mathbf{F}^\top \mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1}\big\}. \tag{1.25}$$

Таким образом окончательно получаем, что следствиями неравенства Клаузиуса-Дюгема является следующие соотношение и неравенство

$$\begin{gathered} \mathbf{T} = \mathbf{F}\,\mathbf{B} + p \,\operatorname{cof}\mathbf{F}, \\ \partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1} \, : \, \mathbf{b} \le 0, \end{gathered} \tag{1.26}$$

в котором $\mathbf{B}$ и $\mathbf{b}$ определены равенствами (1.20) и (1.25).

Уравнение динамики растущего материала нео-Гука. Далее мы будем рассматривать квазистационарный процесс, пренебрегая инерционными членами в уравнениях динамики упругого континуума. Тогда в каждый момент тело будет находиться а равновесии, что влечет равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{f} \quad \Omega \times (0, T), \tag{1.27}$$

где $\mathbf{f}$- заданная внешняя массовая сила. Не существует общепринятых уравнений для определения фактора роста $\mathbf{F}_g$. одним из возможных вариантов является неконсервативная модель с уравнением вида

$$\partial_t \mathbf{F}_g = \mathfrak{F}(\mathbf{F}_g, \nabla \mathbf{u}, p).$$

Вид функции $\mathfrak{F}$ можно попытаться определить исходя из диссипативного неравенства (1.26). Из него можно сделать вывод о том, что матрица $\mathbf{D}$ должна быть тензорной функцией от тензора Эшелби и фактора роста. На самом деле ситуация является более сложной. Следует заметить, что если фактор роста является унитарной матрицей, то физического роста материальных частиц не происходит. Поэтому уравнение для фактора роста должно быть инвариантно относительно вращений. Согласно существующей теории дополнительным требованием является требование симметрии матрицы $\mathbf{F}_g$. Если учесть эти замечания и ограничиться рассмотрением изотропных тензорных функций, то эволюционное уравнение для фактора роста, автоматически удовлетворяющее неравенству Клаузиуса- Дюгема определяется единственным образом и имеет вид

$$\partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1} + \mathbf{F}_g^{-\top} \, \partial_t \mathbf{F}_g^\top = -\mathbf{a}_0(I_k) \, \mathbf{I} - \mathbf{a}_1(I_k) \, \mathbf{b},$$

где I_k - инварианты тензора Эшелби

$$I_1 = \operatorname{tr} \mathbf{b}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - |\mathbf{b}|^2), \quad I_3 = \det \mathbf{b}. \tag{1.28}$$

В двумерном случае имеется только два инварианта I_1 и I_2. Из неравенства (1.26) вытекает, что коэффициенты в (1.28) должны удовлетворять условиям

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{b}) \operatorname{tr} \mathbf{b} \ge 0, \quad \mathbf{a}_1(\mathbf{b}) \ge 0. \tag{1.29}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2}\big(\partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1} + \mathbf{F}_g^{-\top} \, \partial_t \mathbf{F}_g^\top \big) : \mathbf{b} = \partial_t \mathbf{F}_g \, \mathbf{F}_g^{-1} : \mathbf{b}.$$

Комбинируя эти результаты с (1.13) и (1.23), мы приходим к следующей системе уравнений для поля деформаций, давления и симметричной матрицы фактора роста.

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\big(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{B}+p\operatorname{cof}\nabla u\big)=\mathbf{f}\ \text{ в }\ \Omega\times(0,T),\\ \det\nabla\mathbf{u}\,=\,\det\mathbf{F}_g\ \text{ в }\ \Omega\times(0,T),\quad \mathbf{F}_g^\top=\mathbf{F}_g,\\ \partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}+\mathbf{F}_g^{-\top}\partial_t\mathbf{F}_g^\top=-\mathbf{a}_0(I_k)\,I-\mathbf{a}_1(I_k)\,\mathbf{b}\ \text{ в }\ \Omega\times(0,T).\end{gathered}\tag{1.30}$$

Здесь симметричные матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{b}$ определяются равенствами

$$\begin{gathered}\mathbf{B}=(\det\mathbf{F}_g)\mathbf{F}_g^{-1}\mathbf{F}_g^{-\top},\\ \mathbf{b}=\Psi_g\,\mathbf{I}-\det\mathbf{F}_g\,\big\{p\mathbf{I}+\mathbf{F}_g^{-\top}\nabla\mathbf{u}^\top\,\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}\big\},\end{gathered}\tag{1.31}$$

коэффициенты $\mathbf{a}_i$ зависят от инвариантов тензора Эшелби и удовлетворяют условиям (1.29). Система уравнений (1.30) должна быть снабжена граничными и начальными условиями. На границе области возможно условие жесткого закрепления

$$\mathbf{u}=g\ \text{ на }\ \partial\Omega\times(0,T).\tag{1.32}$$

В этом случае форма физического объема, занятого упругим телом, полностью фиксирована и рост отдельных участков тела возможен только за счет атрофии других. Следующее условие является более естественным.

$$\mathbf{T}\,\mathbf{n}=\mathbf{g}\ \text{ на }\ \partial\Omega\times(0,T).\tag{1.33}$$

Здесь $\mathbf{n}$–единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. В этом случае задается распределение напряжений на границе объема и сам объем определяется после решения задачи. В начальный момент необходимо задать распределение фактора роста

$$\mathbf{F}_g(x,0)=\mathbf{F}_g^0\ \text{ в }\ \Omega.\tag{1.34}$$

Уравнения (1.30) месте с краевыми условиями (1.32) или (1.33) и начальными условиями (1.34) образуют замкнутую систему уравнений для векторного поля деформаций, скалярной функции давления и матрицы фактора роста, которая ляжет в основу дальнейших рассмотрений. Следующие два замечания существенны для понимания наших последующих действий

Замечание 1.1. *Первое из дифференциальных уравнений в основной системе* (1.30) *имеет дивергентную форму. Применяя тождество Пиолы*

$$\operatorname{div}(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u})\equiv 0,$$

которое справедливо для всех векторных полей класса $W^{2,d}(\Omega)$*, мы можем переписать это уравнение в более привычной форме*

$$\operatorname{div}(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{B})+(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u})\,\nabla p=\mathbf{f}.\tag{1.35}$$

Следующее наблюдение состоит в том, что дифференциальный оператор $\operatorname{div}\big(\nabla\mathbf{u}\mathbf{B}\big)$ *является диагональным и допускает представление*

$$\operatorname{div}(\nabla\mathbf{u}\mathbf{B})=\Big(\operatorname{div}(\mathbf{B}\nabla\mathbf{u}_1),.,\operatorname{div}(\mathbf{B}\nabla\mathbf{u}_d)\Big).\tag{1.36}$$

Замечание 1.2. *Второе замечание состоит в том, что отсутствию роста или атрофии соответствует значение фактора роста* $\mathbf{F}_g = \mathbf{I}$*. В общем случае рост является анизотропным, в каждой точке материал может расти в одном направлении и атрофироваться в другом. Особенностью модели является существование гомеостатического ненагруженного состояния вида*

$$\mathbf{u}(x) = x, \quad p(x) = -1, \quad \mathbf{T} = \mathbf{b} = 0, \tag{1.37}$$

которое соответствует абсолютному минимуму свободной энергии $\Psi_g = 0$*. Если заметить, что в силу условий* (1.29) *коэффициент* $\mathbf{a}_0$ *в последнем из уравнений системы* (1.30) *обращается в нуль при* $\operatorname{tr}\mathbf{b} = 0$*, то легко видеть, что гомеостатическое состояние удовлетворяет однородным уравнениям и граничному условию* (1.30) *и* (1.33) *с* $\mathbf{f} = \mathbf{g} = 0$*. То есть, оно служит тривиальным стационарным решением однородной задачи* (1.30)-(1.33).

Энергетическое неравенство. Рассмотрим теперь вопрос о существовании энергетических оценок для решений сформулированных начально-краевых задач. Мы ограничимся случаем второй краевой задачи (1.30),(1.33),(1.34).

Энергетические оценки. Вывод первой энергетической оценки опирается на тождество, данное следующей леммой.

Лемма 1.3. *Если* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{F}_g^{\pm 1}$ *дважды непрерывно дифференцируемы и*

$$\det \nabla\mathbf{u} = \det \mathbf{F}_g, \quad \mathbf{F}_g = \mathbf{F}_g^\top. \tag{1.38}$$

то выполняется тождество

$$\partial_t \Psi_g - \frac{\mathbf{b}}{2} : \big(\partial_t \mathbf{F}_g\, \mathbf{F}_g^{-1} + \mathbf{F}_g^{-\top} \partial_t \mathbf{F}_g^\top\big) = \operatorname{div}(\partial_t \mathbf{u}^\top \mathbf{T}) - \operatorname{div}\mathbf{T} \cdot \partial_t \mathbf{u}. \tag{1.39}$$

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{T} \cdot \partial_t \mathbf{u} = \partial_j (\partial_k \mathbf{u}_i\, \mathbf{B}_{kj})\, \partial_t \mathbf{u}_i + \partial_j \big(p(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u})_{ij}\big)\, \partial_t \mathbf{u}_i.$$

Так как

$$\operatorname{div}\big(\partial_t \mathbf{u}\, \mathbf{T}\big) = \partial_j \big(\partial_k \mathbf{u}_i\, \mathbf{B}_{kj}\, \partial_t \mathbf{u}_i + p(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u})_{ij}\, \partial_t \mathbf{u}_i\big).$$

отсюда следует тождество

$$\begin{gathered} \operatorname{div}(\partial_t \mathbf{u}^\top\, \mathbf{T}) - \operatorname{div}\mathbf{T} \cdot \partial_t \mathbf{u} = \\ (\partial_k \mathbf{u}_i\, \mathbf{B}_{kj})\, \partial_j \partial_t \mathbf{u}_i + \big(p(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u})_{ij}\big)\, \partial_j \partial_t \mathbf{u}_i. \end{gathered} \tag{1.40}$$

Из формулы $\mathbf{B}_{kj} = J\mathbf{F}^{-1}_{g,k\alpha}\mathbf{F}^{-1}_{g,j\alpha}$ для элементов матрицы $\mathbf{B}$ находим

$$\begin{aligned} &(\partial_k \mathbf{u}_i\, \mathbf{B}_{kj})\, \partial_j \partial_t \mathbf{u}_i = \\ &J(\nabla\mathbf{u}\mathbf{F}_g^{-1})_{i\alpha}\, (\partial_t \nabla\mathbf{u}\, \mathbf{F}_g^{-1})_{i\alpha} = J(\nabla\mathbf{u}\mathbf{F}_g^{-1}) : (\partial_t \nabla\mathbf{u}\, \mathbf{F}_g^{-1}) = \\ &\partial_t \Big\{\frac{1}{2} J |\nabla\mathbf{u}\, \mathbf{F}_g^{-1}|^2\Big\} - \frac{1}{2}\partial_t J |\nabla\mathbf{u}\mathbf{F}_g^{-1}|^2 - J\,(\nabla\mathbf{u}\, \mathbf{F}_g^{-1}) : (\nabla\mathbf{u}\, \partial_t \mathbf{F}_g^{-1}). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Далее из тождества $\partial_t \mathbf{F}_g^{-1} = -\mathbf{F}_g^{-1}\partial_t \mathbf{F}_g \mathbf{F}_g^{-1}$ находим

$$(\nabla\mathbf{u}\, \partial_t \mathbf{F}_g^{-1})_{i\alpha} = -(\nabla\mathbf{u}\, \mathbf{F}_g^{-1})_{i\gamma}\, (\partial_t \mathbf{F}_g \mathbf{F}_g^{-1})_{\gamma\alpha}$$

что влечет

$$J\,(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}):(\nabla\mathbf{u}\,\partial_t\mathbf{F}_g^{-1}) = J\,(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1})_{i\alpha}\,(\nabla\mathbf{u}\,\partial_t\mathbf{F}_g^{-1})_{i\alpha} =$$
$$-J\,(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1})_{i\alpha}(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g)_{i\gamma}(\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1})_{\gamma\alpha} =$$
$$-J\big\{(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g)^{\top}_{\gamma i}(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1})_{i\alpha}\big\}(\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1})_{\gamma\alpha} =$$
$$-J\big\{(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g)^{\top}(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1})\big\}:(\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}) =$$
$$-J\big\{\mathbf{F}_g^{-\top}\,\nabla\mathbf{u}^{\top}\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}\big\}:(\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}).$$

Отсюда и из (1.41) получаем

(1.42)
$$(\partial_k\mathbf{u}_i\,\mathbf{B}_{kj})\,\partial_j\partial_t\mathbf{u}_i =$$
$$\partial_t\big\{\frac{1}{2}J\,|\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}|^2\big\} - \frac{1}{2}\partial_t J\,|\nabla\mathbf{u}\mathbf{F}_g^{-1}|^2 + J\,\big\{\mathbf{F}_g^{-\top}\,\nabla\mathbf{u}^{\top}\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}\big\}:(\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}).$$

Далее, из формулы (1.18) для $\partial_t J$ находим

$$\partial_t J\big\{\frac{1}{2}|\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}|^2\big\} = J\big\{\frac{1}{2}|\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}|^2\big\}\,I:(\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}).$$

Подставляя это равенство в (1.42) приходим к тождеству

$$(1.43)\qquad \begin{aligned}(\partial_k\mathbf{u}_i\,\mathbf{B}_{kj})\,\partial_j\partial_t\mathbf{u}_i = \partial_t\big\{\frac{1}{2}J|\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}|^2\big\}\\ -\big\{\frac{1}{2}J|\nabla\mathbf{u}\mathbf{F}_g^{-1}|^2 - J\mathbf{F}_g^{-\top}\,\nabla\mathbf{u}^{\top}\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}\big\}:(\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}).\end{aligned}$$

Перейдем к завершающему этапу вывода энергетического тождества. Рассмотрим тождество

$$p(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u})_{ij}\partial_j(\partial_t\mathbf{u}_i) \equiv p(\operatorname{cof}\,\nabla\mathbf{u}):\partial_t\nabla\mathbf{u} = \operatorname{tr}[(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u})^{\top}\nabla\partial_t\mathbf{u}] = p\partial_t(\det\nabla\mathbf{u}).$$

Отсюда и из (1.38), (1.18) с учетом равенств

$$J\equiv\ \det\ \mathbf{F}_g = \det\nabla\mathbf{u},\quad \partial_t J\equiv J\operatorname{tr}\,(\mathbf{F}_g^{-1}\partial_t\mathbf{F}_g) = JI:(\partial\mathbf{F}_g\partial_t\mathbf{F}_g^{-1})$$

находим

$$p(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u})_{ij}\ \partial_j\partial_t\mathbf{u}_i = p\,\partial_t J = J\,pI\ :(\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}).$$

Подставляя это равенство вместе с (1.43) в (1.40) получим

$$(1.44)\qquad \begin{aligned}\operatorname{div}(\partial_t\mathbf{u}^{\top}\,\mathbf{T}) - \operatorname{div}\mathbf{T}\cdot\,\partial_t\mathbf{u} = \partial_t\big\{\frac{1}{2}J|\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}|^2\big\}\\ -\big\{\frac{1}{2}J|\nabla\mathbf{u}\mathbf{F}_g^{-1}|^2\,I - Jp\,I - J\mathbf{F}_g^{-\top}\,\nabla\mathbf{u}^{\top}\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}\big\}:(\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}).\end{aligned}$$

Далее заметим что из определения плотности свободной энергии (1.12) вытекает равенство

$$\frac{1}{2}J|\nabla\mathbf{u}\mathbf{F}_g^{-1}|^2 = \Psi_g + d\,J,$$

которое вместе с формулой (1.18) для $\partial_t\,J$ влечет равенство

$$\frac{1}{2}J|\nabla\mathbf{u}\mathbf{F}_g^{-1}|^2\,I:(\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}) = \Psi_g I:(\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}) + d\partial_t J.$$

Отсюда и из формулы для (1.12) для плотности свободной энергии следует, что

$$\Big\{\frac{1}{2}J|\nabla\mathbf{u}\mathbf{F}_g^{-1}|^2\, I - Jp - J\mathbf{F}_g^{-\top}\,\nabla\mathbf{u}^\top\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}\Big\} : (\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}) = \\ \mathbf{b} : (\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}) + d\,\partial_t J.$$

Подстановка этого соотношения в (1.44) приводит к равенству

$$\operatorname{div}(\partial_t\mathbf{u}^\top\,\mathbf{T}\,) - \operatorname{div}\mathbf{T}\cdot\partial_t\mathbf{u} = \partial_t\big\{\Psi_g\big\} - \mathbf{b} : (\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}),$$

которое вместе с очевидным тождеством

$$\mathbf{b} : (\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1}) = \frac{\mathbf{b}}{2} \,:\, \big(\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1} + \mathbf{F}_g^{-\top}\,\partial_t\mathbf{F}_g^\top\big)$$

влечет за собой (1.39). □

Как следствие из леммы (1.3) вытекает энергетическое тождество для решений второй краевой задачи (1.30), (1.33), (1.34).

Следствие 1.4. *Для любого достаточно гладкого решения задачи* (1.30)*,* (1.33)*,* (1.34) *и для любого* $t\in(0,T]$ *выполняется равенство*

$$\int_\Omega \Psi_g(x,t)\,dx + \int_0^t\int_\Omega (a_0\ \operatorname{tr}\mathbf{b} + a_1|\mathbf{b}|^2)dxdt = \\ \int_\Omega \Psi_g(x,0)\,dx + \int_0^t\int_{\partial\Omega}\mathbf{g}\cdot\partial_t\mathbf{u}\,dsdt - \int_0^t\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}\,dxdt. \tag{1.45}$$

Доказательство. Интегрируя обе части тождества (1.39) по цилиндру, $\Omega\times(0,t)$, замечая что в силу уравнений (1.30), (1.33), (1.34),

$$\operatorname{div}\mathbf{T} = \mathbf{f},$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\partial_t\mathbf{u}^\top\mathbf{T})\,dx = \int_{\partial\Omega}\partial_t u\mathbf{T}\mathbf{n}\,ds = \int_{\partial\Omega}\mathbf{g}\cdot\partial_t\mathbf{u}\,ds,$$

$$-\frac{\mathbf{b}}{2} : \big(\partial_t\mathbf{F}_g : \mathbf{F}_g^{-1} + \mathbf{F}_g^{-\top}\,\partial_t\mathbf{F}_g^\top)\big) = \mathbf{a}_0\ \operatorname{tr}\mathbf{b} + \mathbf{a}_1|\mathbf{b}|^2,$$

приходим к нужному тождеству (1.45). □

2. Формулировки краевых задач. Основные результаты

Уравнения и краевые условия. Для простоты вычислений мы ограничимся наиболее важным случаем роста материла нео-Гука из равновесного начального состояния под действием сил, приложенных к границе, и будем предполагать, что

$$\mathbf{F}_g^0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{g} = \varepsilon\mathbf{g}_0, \quad \int_{\partial\omega}|\mathbf{g}_0(x,t)|\,ds > 0 \text{ при } \ t\in(0,T). \tag{2.1}$$

где $\mathbf{g}_0$ фиксировано, а $\varepsilon\in(-1,1)$ является малым параметром. Дадим точную формулировку квазистационарной краевой задачи об объемном росте несжимаемого материала нео-Гука под действием внешней нагрузки, приложенной к поверхности материала. Она может рассматриваться как математическая модель роста головного мозга под действием давления, приложенного к его оболочке.Как и ранее, обозначим через Ω ограниченную область в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 2,3$. Зафиксируем произвольно $T > 0$ и обозначим через Q_T

цилиндр $\Omega \times (0,T)$. Квазистационарная задача состоит в определении векторного поля деформаций $\mathbf{u}: Q_T \to \mathbb{R}^d$, матричнозначной функции фактора роста $\mathbf{F}_g : Q_T \to \mathbb{R}^{d^2}$ и поля давления $p : Q_T \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим уравнениям, граничным и начальным условиям

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\big(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{B} + p\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u}\big) = 0 \quad &\text{в} \quad Q_T,\\
\det\nabla\mathbf{u} \,=\, \det\mathbf{F}_g, \quad \mathbf{F}_g = \mathbf{F}_g^\top \quad &\text{в} \quad Q_T,\\
\partial_t\mathbf{F}_g\,\mathbf{F}_g^{-1} + \mathbf{F}_g^{-\top}\,\partial_t\mathbf{F}_g^\top = -\mathbf{a}_0(I_k)\,\mathbf{I} - \mathbf{a}_1(I_k)\,\mathbf{b} \quad &\text{в} \quad Q_T,\\
(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{B} + p\ \mathrm{cof}\ \nabla\mathbf{u})\mathbf{n} = \varepsilon\mathbf{g}_0 \quad \text{на} \quad &\partial\Omega\times(0,T),\\
\mathbf{F}_g(x,0) = \mathbf{I} \quad &\text{в} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь симметричная неотрицательная матрица $\mathbf{B}$ и тензор Эшелби $\mathbf{b}$ определяются равенствами

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= (\,\det\mathbf{F}_g)\mathbf{F}_g^{-1}\mathbf{F}_g^{-\top},\\
\mathbf{b} &= \Psi_g\, I \,-\, \det\mathbf{F}_g\,\big\{pI + \mathbf{F}_g^{-\top}\nabla\mathbf{u}^\top\,\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}\big\},\\
\Psi_g &= \frac{1}{2}\det\ \mathbf{F}_g\,\big(|\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}|^2 - d\big).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

коэффициенты a_i зависят от инвариантов I_k, $k = 1,.,d$, тензора Эшелби, которые определяются равенствами

$$\begin{aligned}
I_1 = \ \mathrm{tr}\mathbf{b}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - |\mathbf{b}|^2), \quad I_3 = \ \det\mathbf{b} \text{ при } d = 3,\\
I_1 = \ \mathrm{tr}\mathbf{b}, \quad I_2 = \ \det\mathbf{b} \text{ при } d = 2.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

В граничных и начальных условиях $\mathbf{n}$–единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $\mathbf{g} = \varepsilon\mathbf{g}_0$- заданное векторное поле.

Основная трудность, возникающая при решении задачи (2.2), связана со спецификой краевого условия второго рода с заданным вектором напряжений на границе. Задачи нелинейной теории упругости с заданным на границе вектором напряжений вплоть до настоящего времени изучены очень плохо. До сих пор основным источником по теории этих задач остается монография [10], в которой были доказаны локальные теоремы существования и единственности. Краевые задачи второго рода для несжимаемых материалов и квазистационарных проблем не изучались.

Модифицированная краевая задача. В этом разделе, мы следуя методу Валента решения задач с граничными условиями второго рода для уравнений нелинейной теории упругости, расширим и модифицируем исходную систему уравнений (2.2). С этой целью рассмотрим следующую вспомогательную конструкцию. Прежде всего определим специальную проекцию тензора напряжений на пространство уравновешенных векторных полей, см. [10]. С этой целью выберем произвольное векторное поле $\boldsymbol{\varphi} \in C^\infty(\Omega)$ такое, что

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{\varphi}\,dx = 0, \quad \int_\Omega x_i\varphi_j(x) = 0 \ \text{ для всех } \ i \neq j,\\
\int_\Omega (x_i\varphi_i(x) + x_j\varphi_j(x))\,dx = 1 \ \text{ всех } \ i,j.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Напомним, что тензор напряжений $\mathbf{T}$ определяется равенствами

$$\mathbf{T}\big(\mathbf{F}_g, \nabla\mathbf{u}, p) = \nabla\mathbf{u}\,\mathbf{B} + p\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u}. \tag{2.6}$$

Далее мы определим матричнозначный интегральный оператор $\mathbf{E}(\mathbf{F}_g, \nabla\mathbf{u}, p)$ посредством равенств

$$E_{ij} = \int_\Omega \big(T_{ij}\big(\mathbf{F}_g, \nabla\mathbf{u}, p) - T_{ji}(\mathbf{F}_g, \nabla\mathbf{u}, p)\big)\, dx. \tag{2.7}$$

Теперь мы в состоянии сформулировать расширенную модифицированную краевую задачу для фактора роста, поля деформаций и функции давления

Для заданного временного интервала $(0, T)$ и векторного поля $\mathbf{g}$ требуется найти поле деформаций $\mathbf{u}$, распределения давления p и конформного фактора $\mathbf{F}_g$, которые допускают представление

$$\begin{gathered} \mathbf{u}(x,t) = x + \mathbf{S}(t)x + \mathbf{v}(x,t) \ \text{ в } \ \Omega\times(0,T), \\ \mathbf{F}_g(x,t) = I + \mathbf{U}(x,t), \quad p = -1 + q \ \text{ в } \ \Omega\times(0,T) \end{gathered} \tag{2.8a}$$

Здесь $\mathbf{S}(t)$ кососимметрическая матрица, которая является неизвестной и должна определяться вместе с решением задачи, $\mathbf{v}$ – искомое векторное поле, удовлетворяющее условиям ортогональности

$$\int_\Omega \mathbf{v}(x,t)\, dx = 0, \quad \int_\Omega (\nabla\mathbf{v}(x,t) - \nabla\mathbf{v}^\top(x,t))\, dx = 0 \tag{2.8b}$$

для всех $t \in [0, T]$, $\mathbf{U}(x,t) = \mathbf{U}^\top(x,t)$– искомая матричнозначная функция, удовлетворяющая начальному условию $\mathbf{U}(x, 0) = 0$. Для краткости обозначений введем в рассмотрение вектор

$$\Upsilon = (\,\mathbf{v},\, q,\, \mathbf{U},\, \mathbf{S}\,) \tag{2.8c}$$

Его компоненты должны удовлетворять статическим уравнениям теории упругости

$$\Xi_1(\Upsilon) \equiv \operatorname{div}\, \mathbf{T} + \mathbf{E}(\Upsilon)\ \varphi = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \tag{2.8d}$$

$$\Xi_2(\Upsilon) \equiv \det\, \nabla\mathbf{u} - \ \det\, \mathbf{F}_g = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \tag{2.8e}$$

$$\Xi_3(\Upsilon) \equiv \mathbf{T}\mathbf{n} - \varepsilon\mathbf{g}_0 = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega\times(0,T), \tag{2.8f}$$

эволюционному уравнению для матрицы фактора роста

$$\Xi_4(\Upsilon) \equiv \partial_t\mathbf{F}_g\mathbf{F}_g^{-1} + \mathbf{F}_g^{-\top}\partial_t\mathbf{F}_g^\top + \mathbf{a}_0(I_k)\mathbf{I} + \mathbf{a}_1(I_k)\mathbf{b} = 0 \ \text{ в } \ Q_T \tag{2.8g}$$

и дополнительному уравнению для определения кососимметрической матрицы $\mathbf{S}$

$$\Xi_5(\Upsilon) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{g}_0(t)\|_{L^2(\partial\Omega)}}\Big\{\mathbf{D}(\mathbf{u} - x) - \mathbf{D}^\top(\mathbf{u} - x)\Big\} = 0 \tag{2.8h}$$

в интервале $(0, T)$. Здесь матрица $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ определена равенствами

$$D_{ij}(\mathbf{u}) = \int_{\partial\Omega} u_i g_j\, ds. \tag{2.8i}$$

Замечание 2.1. *Из представления* (2.8a) *и формулы* (2.8i) *вытекает, что уравнение* (2.8h) *может быть записано в эквивалентной форме*

$$\Xi_5(\Upsilon) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{g}_0(t)\|_{L^2(\partial\Omega)}}\Big\{\mathbf{S}\mathbf{C} - (\mathbf{S}\mathbf{C})^\top + \mathbf{D}(\mathbf{v}) - \mathbf{D}(\mathbf{v})^\top\Big\} = 0 \tag{2.9}$$

в интервале $(0, T)$. *Здесь матрица* $\mathbf{C}(t)$ *определена равенствами*

$$C_{ij} = \int_{\partial\Omega} x_i g_j\, ds. \tag{2.10}$$

Если ввести в рассмотрение векторный оператор

$$\boldsymbol{\Xi}(\Upsilon) = \big(\,\Xi_1(\Upsilon),\, \Xi_2(\Upsilon),\, \Xi_3(\boldsymbol{\Upsilon}),\, \Xi_4(\Upsilon),\, \Xi_5(\Upsilon)\,\big). \tag{2.11}$$

то задача (2.8) может быть записана в виде одного операторного уравнения

$$\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\Upsilon}) = 0. \tag{2.12}$$

Функциональные пространства. Теперь мы определим пространства Соболева, в которых мы будем искать решения операторного уравнения (2.12). Напомним, что для любого целого $s \geq 0$ пространство Соболева $W^{s,2}(\Omega)$ состоит из всех функций, определенных в области Ω и обладающих производными вплоть до порядка s интегрируемыми с квадратом в области Ω. При $s \geq 1$, мы будем обозначать через $W^{s-1/2,2}(\partial\Omega)$ пространство следов функций из $W^{s,2}(\Omega)$ на границе области Ω . Снабженные стандартными нормами эти пространства становятся гильбертовыми пространствами. Через $W^{-1,2}(\Omega)$ мы будем обозначать гильбертово пространство двойственное к пространству Соболева $W^{1,2}_0(\Omega)$, которое состоит из всех функций пространства $W^{1,2}(\Omega)$ равных нулю на границе Ω. В частности, если $F \in L^2(\Omega)$, то $\partial_i F \in W^{-1,2}(\Omega)$ и

$$\|\partial_i F\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \leq c(\Omega)\|F\|_{L^2(\Omega)}.$$

Мы будем искать решение модифицированной задачи в подпространствах пространств Соболева, которые состоят из функций, удовлетворяющих некоторым условиям ортогональности. Для того, чтобы сформулировать эти условия дадим следующие определения.

Определение 2.2. *Мы будем говорить, что пара функций* $(\mathbf{f}, \mathbf{h}) \in L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ *уравновешена, если*

$$\int_\Omega \mathbf{f}\, dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{h}\, ds = 0,\ \int_\Omega (x_i f_j - x_j f_i)\, dx - \int_{\partial\Omega} (x_i h_j - x_j h_i)\, ds = 0 \tag{2.13}$$

для всех i, j. *Заметим, что если* $\mathbf{A} : \Omega \to \mathbb{R}^{d^2}$ *- матричнозначная функция, то пара* ($\operatorname{div}\, \mathbf{A}, \mathbf{A}\mathbf{n}$) *уравновешена тогда и только тогда когда*

$$\int_\Omega \mathbf{A}\, dx = \int_\Omega \mathbf{A}^\top\, dx.$$

Следующее утверждение объясняет роль проектора $\mathbf{E}\,\varphi$ в формулировке модифицированной задачи.

Лемма 2.3. *Пусть* $s \geq 4$, $\mathbf{v} \in W^{s,2}(\Omega)$, $\mathbf{U} \in W^{s-1,2}(\Omega)$, $\mathbf{g} \in L^2(\partial\Omega)$ *и пара* $(0, \mathbf{g})$ *уравновешена. Пусть также матричнозначные функции* $\mathbf{F}_g^{\pm 1}$ *равномерно ограничены в области* Ω. *Тогда пара* $\big(\,\Xi_1(\Upsilon), \Xi_3(\Upsilon)\,\big)$ *уравновешена.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу условий леммы тензор напряжений непрерывно дифференцируем. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_\Omega \Xi_1\, dx - \int_{\partial\Omega} \Xi_3\, ds = \mathbf{E} \int_\Omega \varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}\, dx = 0, \tag{2.14}$$

так как средние от векторных полей φ и $\mathbf{g}$ по области Ω и ее границе $\partial\Omega$ равны нулю. Далее интегрируя по частям, находим

(2.15)
$$\int_\Omega (\Xi_{1,i}x_j - \Xi_{1,j}x_i)\,dX - \int_{\partial\Omega} (\Xi_{3,i}x_j - \Xi_{3,j}x_i)\,ds =$$
$$-\int_\Omega (T_{ij} - T_{ji})\,dx + E_{i\alpha}\int_\Omega \varphi_\alpha x_j\,dx - E_{j\alpha}\int_\Omega \varphi_\alpha x_i\,dx + \int_{\partial\Omega} (g_i x_j - g_j x_i) ds.$$

Согласно (2.5) и (2.7) имеем
$$E_{i\alpha}\int_\Omega \varphi_\alpha x_j\,dx - E_{j\alpha}\int_\Omega \varphi_\alpha x_i\,dx = \frac{1}{2}E_{ij} - \frac{1}{2}E_{ji} = \int_\Omega (T_{ij} - T_{ji})\,dx.$$

Так как пара $(0, \mathbf{g})$ уравновешена, то отсюда и из (2.15) окончательно находим
$$\int_\Omega (\Xi_{1,i}x_j - \Xi_{1,j}x_i)\,dX - \int_{\partial\Omega} (\Xi_{3,i}x_j - \Xi_{3,j}x_i)\,ds = 0.$$

Отсюда и из(2.14) вытекает, что пара (Ξ_1, Ξ_3) уравновешена. □

Теперь мы в состоянии определить область определения и множество значений оператора $\mathbf{\Xi}$.

Определение 2.4. *Для каждого целого $s \geq 1$, обозначим через $\mathcal{V}_s$ замкнутое подпространство пространства $C(0,T; W^{s,2}(\Omega))$, состоящее из векторных полей $\mathbf{v} : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$, удовлетворяющих условиям*

$$\int_\Omega \mathbf{v}(x,t)\,dx = 0, \quad \int_\Omega (\nabla\mathbf{v}(x,t) - \nabla\mathbf{v}^\top(x,t))\,dx = 0. \tag{2.16}$$

Через $\mathcal{W}_s$ обозначим замкнутое подпространство пространства $C^1(0,T; W^{s,2}(\Omega))$, состоящее из всех матричнозначных функций $\mathbf{U}$, удовлетворяющих условию $\mathbf{U} = \mathbf{U}^\top$. Положим $\mathcal{Q}_s = C(0,T; W^{s,2}(\Omega))$.

Через $\mathcal{S}$ обозначим замкнутое подпространство пространства $C(0,T)$, состоящее из всех матричнозначных функций $\mathbf{S}(t)$, удовлетворяющих условию $\mathbf{S} = -\mathbf{S}^\top$.

Окончательно, через $\mathbb{X}_s$ обозначим банахово пространство
$$\mathbb{X}_s = (\mathcal{V}_s \times \mathcal{Q}_{s-1}) \times \mathcal{W}_{s-1} \times \mathcal{S}.$$

Определение 2.5. *Для каждого целого $s \geq 0$, обозначим через $\mathcal{T}_s$ замкнутое подпространство банахова пространства $C(0,T; W^{s,2}(\Omega) \times W^{s+1,2}(\Omega) \times W^{s+1/2,2}(\partial\Omega))$ состоящее из всех векторных полей $\mathbf{f} : Q_T \to \mathbb{R}^d$, $\mathbf{h} : \partial\Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$ и скалярных функций $q : Q_T \to \mathbb{R}$, таких что каждая пара $(\mathbf{f}(t), \mathbf{h}(t))$ уравновешена при $t \in (0,t)$.*

Через $\mathbb{Y}_s$ обозначим банахово пространство
$$\mathbb{Y}_s = \mathcal{T}_s \times \mathcal{W}_{s+1} \times \mathcal{S}.$$

Мы будем рассматривать пространство $\mathbb{X}_s$ как область определения, а пространство $\mathbb{Y}_s$ как множество значений нелинейного оператора $\mathbf{\Xi}$ определенного равенством (2.11).

Основные результаты. Единственным заданным объектом, который контролирует свойства решений операторного уравнения (2.12) является векторное поле $\mathbf{g}$. Далее мы будем предполагать, что оно удовлетворяет следующим условиям.

Условие 2.6. *Мы будем предполагать, что пара* $(0, \mathbf{g}_0) \in L^2(\Omega) \times C(\partial\Omega)$ *является уравновешенной в смысле определения 2.2 . Кроме того, далее предполагается, что* $\|\mathbf{g}_0\|_{L^2(\partial\Omega)} > c > 0$ *на интервале* $(0,T)$ *и существует положительная постоянная c со следующими свойствами:*

$$|\mu_i(t) + \mu_j(t)| \ \geq \ c\|\mathbf{g}_0(t)\|_{L^2(\Omega)} \geq c > 0 \tag{2.17}$$

для всех $i \neq j$ *и* $t \in (0,T)$. *Здесь* $\mu_i(t)$ *– собственные значения астатической матрицы* $\mathbf{C} + \mathbf{C}^T$. *Напомним, что матрица* $\mathbf{C}$ *определена соотношениями* (2.10). *Легко видеть, что условие* (2.17) *инвариантно относительно растяжений функции* $\mathbf{g}_0$, *т.е., если оно выполнено для некоторой функции* $\mathbf{g}_0$, *то оно также выполнено для функции* $\mathbf{g} = \epsilon\mathbf{g}_0$, $\epsilon \neq 0$, *с той же самой постоянной c.*

Лемма 2.7. *Пусть целое* $s \geq 3$ *и заданная функция* $\mathbf{g}_0 \in W^{s+1/2}(\partial\Omega)$ *удовлетворяет условию* (2.6). *Пусть* $B_s(\rho)$ *- замкнутый шар радиуса* ρ *с центров в нуле в пространстве* $\mathbb{X}_s$. *Тогда существует* $\rho_0 > 0$, *зависящее только от s, такое что оператор* $\mathbf{\Xi} : B_{s+2}(\rho_0) \to \mathbb{Y}_s$ *равномерно ограничен и непрерывно дифференцируем в шаре* $B_{s+2}(\rho_0)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в условиях леммы в силу теорем вложения выполняется оценка

$$\|\mathbf{U}\|_{C(0,T;C^2(\Omega))} \leq c(s)\|\Upsilon\|_{\mathbb{X}_{s+2}}.$$

Отсюда и из (2.8a) следует, что при подходящем выборе ρ_0,

$$|\mathbf{F}_g^{\pm 1}| \leq (1 - c\rho_0)^{-1} \leq 2 \ \text{ при } \quad \Upsilon \in B_{s+2}(\rho_0).$$

Далее заметим, что при $|\mathbf{F}_g^{\pm 1}| \leq 2$, оператор Ξ_1 является аналитической функцией элементов матрицы F_g , давления p и их производных первого порядка, а также компонент вектора $\mathbf{u}$ и их производных не выше второго порядка. Операторы Ξ_i, $2 \leq i \leq 4$ являются аналитическими функциями элементов матрицы $\mathbf{F}_g$, давления p и величин $\mathbf{u}$, $\nabla\mathbf{u}$. Оператор Ξ_5 является линейным. Так как пространства $C(0,T;W^{s+2,2}(\Omega))$, $C(0,T;W^{s+1,2}(\Omega))$, $C(0,T;W^{s+1/2,2}(\partial\Omega))$ при подходящем выборе нормы становятся банаховыми алгебрами, то отсюда следует, что при достаточно малом ρ_0, зависящем только от s, оператор

$$\mathbf{\Xi} : B_{s+2}(\rho_0) \to$$
$$C\big(0,T;W^{s,2}(\Omega) \times W^{s+1,2}(\Omega) \times W^{s+1/2,2}(\partial\Omega) \times W^{s+1,2}(\Omega) \times \mathbb{R}^{d^2}\big)$$

равномерно ограничен и непрерывно дифференцируем. Из леммы 2.7 вытекает, что оператор (Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3) действует из $B_{s+2}(\rho_0)$ в пространство $\mathcal{T}_s$ данное определением 2.5 . Очевидно, что оператор Ξ_4 переводит шара $B_{s+2}(\rho_0)$ в пространство $\mathcal{W}_{s+1}$, а оператор Ξ_5 переводит в $\mathcal{S}$. Таким образом $\Xi : B_{s+2}(\rho_0) \to \mathbb{Y}_s$. □

Следующая теорема о разрешимости модифицированной краевой задачи является основным результатом настоящей работы.

Теорема 2.8. *Зафиксируем целое* $s \geq 3$, $T > 0$ *и* $\mathbf{g}_0 \in W^{s+1/2}(\partial\Omega)$. *Предположим, что* $\mathbf{g}_0$ *удовлетворяет условиям уравновешенности и невырожденности 2.6. Тогда существует положительное* ε_0 *со следующими свойствами. Для любого* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *задача* (2.8)*(эквивалентно операторное уравнение* (2.12)*) имеет локально единственное решение* $\Upsilon \in B_{s+2}(\rho_0)$ *дифференцируемое по параметру* ε. *Более того, для этого решения проектор* $\mathbf{E}\,\varphi = 0$.

Так как при $\mathbf{E}\,\varphi = 0$ модифицированная задача (2.8) совпадает с исходной задачей (2.2), то отсюда вытекает следующая теорема о разрешимости задачи (2.2)

Теорема 2.9. *2.8 Предположим, что $s \geq 3$ и $\mathbf{g}_0$ удовлетворяет условию 2.6. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (2.2)имеет локально единственное решение, удовлетворяющее условию*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - x\|_{C(0,T;W^{s+2}(\Omega))} \to 0, \quad \|p+1\|_{C(0,T;W^{s+1,2}(\Omega))} \to 0,\\ \|\mathbf{F}_g - \mathbf{I}\|_{C^1(0,T;W^{s+1,2}(\Omega))} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теоремы 2.8. Доказательство основано на применении теоремы о неявной функции и последующему анализу уравнения разветвления $\mathbf{E}\,\varphi = 0$. При таком подходе важнейшим элементом доказательства является доказательство обратимости линеаризации оператора $\mathbf{\Xi}$.

3. Линейные задачи

В этом разделе мы изучим разрешимость линейных задач, полученных путем линеаризации операторного уравнения (2.12) последнего раздела на тривиальном гомеостатическом состоянии

$$\Upsilon = 0 : \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{U} = 0, \quad q = 0, \quad \mathbf{S} = 0. \tag{3.1}$$

Для произвольного вектора

$$\delta\Upsilon = \big(\mathbf{w},\, \pi,\, \mathbf{H},\, \mathbf{\Theta}\big) \in \mathbb{X}_{s+2} \tag{3.2}$$

положим

$$D_\Upsilon \mathbf{\Xi}(0)\delta\Upsilon = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\Big(\mathbf{\Xi}_(\tau\delta\Upsilon) - \mathbf{\Xi}(0)\Big). \tag{3.3}$$

Заметим, что при принятых обозначениях тензор напряжений $\mathbf{T}$ и тензор Эшелби $\mathbf{b}$ являются нелинейными дифференциальными операторами от Υ. Мы с некоторой степенью неаккуратности будем обозначать их как $\mathbf{T}(\Upsilon)$ и $\mathbf{b}(\Upsilon)$. Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} D_\Upsilon\, \mathbf{T}(0)\,\delta\Upsilon &= \nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^\top + \pi\,\mathbf{I} + (\mathrm{tr}\ \mathbf{H} - \mathrm{div}\ \mathbf{w})\mathbf{I} - 2\mathbf{H},\\ D_\Upsilon\, \mathbf{b}(0)\,\delta\Upsilon &= (\mathrm{div}\ \mathbf{w} - \mathrm{tr}\ \mathbf{H})\mathbf{I} - \big\{\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^\top + \pi\,\mathbf{I} - 2\mathbf{H}\big\},\\ D_\Upsilon\, \mathbf{E}(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Введем в рассмотрение симметричный тензор

$$\Gamma = \nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^\top + \pi\,\mathbf{I}. \tag{3.5}$$

Далее заметим, что коэффициенты эволюционного уравнения для фактора роста обладают свойствами

$$\mathbf{a}_0(0, I_2, I_3) = 0, \quad \partial_1\mathbf{a}_0(0,0,0) > 0, \quad \mathbf{a}_1(0,0,0) > 0.$$

Введем в рассмотрение постоянные

$$\alpha = \mathbf{a}_1(0,0,0), \quad \beta = \partial_{I_1}\mathbf{a}_0(0,0,0), \quad \varkappa = \alpha + \beta d. \tag{3.6}$$

Из формул для операторов Ξ_i вытекают следующие выражения для линеаризованных операторов

$$\begin{aligned}
D_\Upsilon\,\Xi_1(0)\,\delta\Upsilon &= \operatorname{div}\,\Big\{\Gamma + (\mathrm{tr}\,\mathbf{H} - \operatorname{div}\,\mathbf{w})\mathbf{I} - 2\mathbf{H}\Big\},\\
D_\Upsilon\,\Xi_2(0)\,\delta\Upsilon &= \operatorname{div}\,\mathbf{w} - \mathrm{tr}\,\mathbf{H},\\
D_\Upsilon\,\Xi_3(0)\,\delta\Upsilon &= \Big\{\Gamma + (\mathrm{tr}\,\mathbf{H} - \operatorname{div}\,\mathbf{w})\mathbf{I} - 2\mathbf{H}\Big\}\mathbf{n},\\
D_\Upsilon\,\Xi_4(0)\,\delta\Upsilon &= 2\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \beta\big(d(\operatorname{div}\,\mathbf{w} - \mathrm{tr}\,\mathbf{H}) - \mathrm{tr}\,\Gamma + 2\,\mathrm{tr}\,\mathbf{H}\Big)\,\mathbf{I}\\
&\quad + \alpha((\operatorname{div}\,\mathbf{w} - \mathrm{tr}\,\mathbf{H})\mathbf{I} - \Gamma + 2\mathbf{H}),\\
D_\Upsilon\,\Xi_5(0)\,\delta\Upsilon &= \frac{1}{\|\mathbf{g}(t)\|_{L^2}}\Big\{\mathbf{\Theta C} - (\mathbf{\Theta C})^\top + \mathbf{D}(\mathbf{w}) - \mathbf{D}^\top(\mathbf{w})\Big\}.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

Здесь матрицы $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}(\mathbf{w})$ определены равенствами (2.8i), (2.10). Вопрос об обращении оператора $D_\Upsilon\mathbf{\Xi}(0) : \mathbb{X}_{s+2} \to \mathbb{Y}_s$ равносилен вопросу о существовании, единственности и устойчивости решений линейного операторного уравнения

$$D_\Upsilon\mathbf{\Xi}(0)\,\delta\Upsilon = \mathbf{Z} \ \text{ с произвольным } \ \mathbf{Z} = (\mathbf{f}, Q, \mathbf{h}, \mathbf{G}, \mathbf{R}) \in \mathbb{Y}_s.\tag{3.8}$$

Из соотношений (3.7) вытекает, что это операторное уравнение равносильно следующей начально-краевой задаче

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\,\big\{\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^\top + \pi\,\mathbf{I} + (\mathrm{tr}\,\mathbf{H} - \operatorname{div}\,\mathbf{w})\mathbf{I} - 2\mathbf{H}\big\} &= \mathbf{f} \ \text{ в } \ Q_T,\\
\operatorname{div}\,\mathbf{w} - \mathrm{tr}\,\mathbf{H} &= Q \ \text{ в } \ Q_T\\
\big\{\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^\top + \pi\mathbf{I} + (\mathrm{tr}\,\mathbf{H} - \operatorname{div}\,\mathbf{w})\mathbf{I} - 2\mathbf{H}\big\}\,\mathbf{n} &=\\
\mathbf{h} \ \text{ на } \ \partial\Omega\times(0,T).
\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\beta\big(\frac{d}{2}(\operatorname{div}\,\mathbf{w} - \mathrm{tr}\,\mathbf{H}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\Gamma + \mathrm{tr}\,\mathbf{H}\Big)\,\mathbf{I}\\
&-\alpha(\frac{1}{2}(\operatorname{div}\,\mathbf{w} - \mathrm{tr}\,\mathbf{H})\,\mathbf{I} - \frac{1}{2}\Gamma + \mathbf{H}) + \frac{1}{2}\mathbf{G} \ \text{ в } \ Q_T, \quad \mathbf{H}\Big|_{t=0} = 0.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\frac{1}{\|\mathbf{g}_0(t)\|_{L^2}}\Big\{\mathbf{\Theta C} - (\mathbf{\Theta C})^\top + \mathbf{D}(\mathbf{w}) - \mathbf{D}^\top(\mathbf{w})\Big\} = \mathbf{R} \ \text{ на } \ (0,T).\tag{3.11}$$

Здесь тензор Γ и постоянные α, β заданы равенствами (3.5) и (3.6). С учетом второго уравнения в системе (3.9) мы можем переписать систему (3.9)-(3.11) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\,\big\{\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^\top + \pi\,\mathbf{I} + \mathrm{tr}\,\mathbf{H}\,\mathbf{I} - 2\mathbf{H}\big\} &= \operatorname{div}\,(Q\,\mathbf{I}) + \mathbf{f} \ \text{ в } \ Q_T,\\
\operatorname{div}\,\mathbf{w} - \mathrm{tr}\,\mathbf{H} &= Q \ \text{ в } \ Q_T\\
\big\{\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^\top + \pi\mathbf{I} + \mathrm{tr}\,\mathbf{H}\,\mathbf{I} - 2\mathbf{H}\big\}\,\mathbf{n} &= Q\mathbf{n} + \mathbf{h} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega\times(0,T).
\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\alpha\mathbf{H} - \beta\,\mathrm{tr}\,\mathbf{H}\,\mathbf{I} + \frac{1}{2}\Big(\alpha\Gamma + \beta\,\mathrm{tr}\,\Gamma\,\mathbf{I}\Big) + \Phi \ \text{ в } \ Q_T,\\
\mathbf{H}(x,0) &= 0 \ \text{ в } \ Q_T.
\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\frac{1}{\|\mathbf{g}_0(t)\|_{L^2}}\Big\{\mathbf{\Theta C} - (\mathbf{\Theta C})^\top + \mathbf{D}(\mathbf{w}) - \mathbf{D}^\top(\mathbf{w})\Big\} = \mathbf{R} \ \text{ в } \ (0,T),\tag{3.14}$$

где $\Phi = (\mathbf{G} - \varkappa Q)/2$.

Полученная система уравнений (3.12)- (3.14) эквивалентна линейному операторному уравнению (3.8). Эта система носит довольно сложный и запутанный характер. Поэтому целесообразно привести ее к треугольному виду исключив из уравнений статики (3.12) фактор роста $\mathbf{H}$. Это даст возможность независимо определить поле деформаций $\mathbf{w}$ и давление π. После этого фактор роста $\mathbf{H}$ и кососимметрическая матрица $\boldsymbol{\Theta}$ легко могут быть найдены в явной форме из уравнений (3.13) и (3.14). Возможность такого расщепления линейной задачи гарантируется следующим предложением, доказательство которого дано в приложении A.

Предложение 3.1. *В классе сильных решений операторное уравнение* (3.8) *равносильно следующей системе интегро-дифференциальных уравнений*

$$\operatorname{div}\left\{\nabla\mathbf{w}+\nabla\mathbf{w}^\top+\pi\,\mathbf{I}-\beta d\int_0^t\pi\,ds\,\mathbf{I}\right\}=\operatorname{div}\,\mathbf{M}+(\mathbf{I}+\mathbb{V})\mathbf{f}\quad\textit{в}\quad Q_T. \tag{3.15}$$

$$\operatorname{div}\,\mathbf{w}-\frac{\varkappa d}{2}\int_0^t\pi\,ds=\mathbf{N}\quad\textit{в}\quad Q_T. \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\left\{\nabla\mathbf{w}+\nabla\mathbf{w}^\top+\pi\,\mathbf{I}-\beta d\int_0^t\pi\,ds\,\mathbf{I}\right\}\mathbf{n}=\mathbf{M}\,\mathbf{n}\\ +(I+\mathbb{V})\mathbf{h}\quad\textit{на}\quad\partial\Omega\times(0,T).\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{H}=\frac{\alpha}{2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Big(\Gamma(s)-\frac{1}{d}\,\operatorname{tr}\,\Gamma(s)\,\mathbf{I}\Big)\,ds+\frac{\varkappa}{2d}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\operatorname{tr}\,\Gamma(s)\,ds\,\mathbf{I}+\\ \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}(\mathbf{G}-\varkappa Q\,\mathbf{I})\,ds+\frac{1}{2d}\int_0^t\left(e^{-\varkappa(t-s)}-e^{-\alpha(t-s)}\right)(\operatorname{tr}\,\mathbf{G}-d\varkappa Q)\,ds\,\mathbf{I}.\end{gathered} \tag{3.18}$$

$$\frac{1}{\|\mathbf{g}(t)\|_{L^2}}\Big\{\boldsymbol{\Theta}\mathbf{C}-(\boldsymbol{\Theta}\mathbf{C})^\top+\mathbf{D}(\mathbf{w})-\mathbf{D}^\top(\mathbf{w})\Big\}=\mathbf{R}\quad\textit{в}\quad(0,T). \tag{3.19}$$

Здесь матричнозначная функция $\mathbf{M}$*, скалярная функция* $\mathbf{N}$ *и оператор Вольтерра* $\mathbb{V}$ *определены равенствами*

$$\begin{gathered}\mathbf{M}=\int_0^t\mathbf{G}\,ds+Q\,\mathbf{I}+\beta(2-d)\int_0^t Q\,ds\mathbf{I},\\ \mathbf{N}=\frac{1}{2}\int_0^t(\,\operatorname{tr}\,\mathbf{G}+\varkappa Q)\,ds+Q,\quad\mathbb{V}u=\alpha\int_0^t u(x,s)\,ds,\end{gathered} \tag{3.20}$$

симметричный тензор Γ *и коэффициенты* α*,* β $\varkappa$ *определены равенствами* (3.5) *и* (3.6).

Из этого предложения вытекает, что для доказательства обратимости оператора $D_\Upsilon\boldsymbol{\Xi}(0):\mathbb{X}_{s+2}\to\mathbb{Y}_s$ достаточно установить существование и единственность решений краевой задачи (3.15)-(3.17) для линеаризованного поля деформаций и давления. После ее решения фактор роста и вспомогательная матрица восстанавливаются по данным задачи с помощью формулы и алгебраического уравнения. Мы установим корректность задачи (3.15)-(3.17) в два этапа. Сначала мы исследуем стационарную версию этой задачи, а потом применим стандартную процедуру для решения уравнений типа Вольтерра.

Стационарная линейная задача. Основной целью этого раздела является исследование следующей стационарной краевой задачи, которая описывает равновесие материала нео-Гука.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\,\big\{\nabla \mathbf{w}+\nabla \mathbf{w}^{\top}+\pi\,\mathbf{I}\big\}&=\operatorname{div}\,\mathbf{F}+\mathbf{f}\ \text{ в }\ Q_T,\\
\operatorname{div}\,\mathbf{w}&=Q\ \text{ в }\ Q_T,\\
\big\{\nabla \mathbf{w}+\nabla \mathbf{w}^{\top}+\pi\,\mathbf{I}\big\}\mathbf{n}&=\mathbf{F}\mathbf{n}+\mathbf{h}\ \text{ на }\ \partial\Omega\times(0,T).
\end{aligned}\tag{3.21}
$$

Мы начнем анализ с вывода формулы Грина для этой задачи. Напомним определение тензора

$$
\Gamma(\mathbf{w},\pi)=\nabla \mathbf{w}+\nabla \mathbf{w}^{\top}+\pi I.\tag{3.22}
$$

Лемма 3.2. *Для любых* $\mathbf{w},\boldsymbol{\xi}\in W^{2,2}(\Omega)$ *и* $\pi,\psi\in W^{1,2}(\Omega)$ *справедливы тождества*

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \operatorname{div}\,\Gamma(\mathbf{w},\pi)\cdot\boldsymbol{\xi}\,dx-\int_\Omega\psi\ \operatorname{div}\,\mathbf{w}\,dx-\int_{\partial\Omega}\Gamma(\mathbf{w},\pi)\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}\,ds=\\
&\int_\Omega \operatorname{div}\,\Gamma(\boldsymbol{\xi},\psi)\cdot\mathbf{w}\,dx-\int_\Omega\pi\ \operatorname{div}\,\boldsymbol{\xi}\,dx-\int_{\partial\Omega}\Gamma(\boldsymbol{\xi},\psi)\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}\,ds=\\
&-\int_\Omega(\nabla\mathbf{w}+\nabla\mathbf{w}^{\top}):\nabla\boldsymbol{\xi}\,dx-\int_\Omega\pi\ \operatorname{div}\,\boldsymbol{\xi}\,dx-\int_\Omega\psi\ \operatorname{div}\,\mathbf{w}\,dx
\end{aligned}\tag{3.23}
$$

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \operatorname{div}\,\Gamma(\mathbf{w},\pi)\cdot\boldsymbol{\xi}\,dx-\int_\Omega\psi\ \operatorname{div}\,\mathbf{w}\,dx-\int_{\partial\Omega}\Gamma(\mathbf{w},\pi)\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}\,ds=\\
&\int_\Omega\partial_j(\partial_j w_i+\partial_i w_j+\pi\delta_{ij})\xi_i\,dx-\int_{\partial\Omega}\Gamma(\mathbf{w},\pi)\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}\,ds-\int_\Omega\psi\ \operatorname{div}\,\mathbf{w}\,dx.
\end{aligned}
$$

Интегрируя по частям получим

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\partial_j(\partial_i w_i+\partial_i w_j+\pi\delta_{ij})\xi_i\,dx-\int_{\partial\Omega}\Gamma(\mathbf{w},\pi)\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}\,ds=\\
&-\int_\Omega\partial_j w_i\partial_j\xi_i-\int_\Omega\partial_i w_j\partial_j\xi_i\,dx-\int_\Omega\pi\ \operatorname{div}\,\boldsymbol{\xi}\,dx=\\
&-\int_\Omega\partial_j w_i\partial_j\xi_i-\int_\Omega\partial_j w_i\partial_i\xi_j\,dx-\int_\Omega\pi\ \operatorname{div}\,\boldsymbol{\xi}\,dx=\\
&-\int_\Omega(\nabla\boldsymbol{\xi}+\nabla\boldsymbol{\xi}^{\top}):\nabla\mathbf{w}\,dx-\int_\Omega\pi\ \operatorname{div}\,\boldsymbol{\xi}\,dx
\end{aligned}
$$

Комбинируя полученные результаты находим

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \operatorname{div}\,\Gamma(\mathbf{w},\pi)\cdot\boldsymbol{\xi}\,dx-\int_\Omega\psi\ \operatorname{div}\,\mathbf{w}\,dx-\int_{\partial\Omega}\Gamma(\mathbf{w},\pi)\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}\,ds=\\
&-\int_\Omega(\nabla\mathbf{w}+\nabla\mathbf{w}):\nabla\boldsymbol{\xi}\,dx-\int_\Omega\pi\ \operatorname{div}\,\boldsymbol{\xi}\,dx-\int_\Omega\psi\ \operatorname{div}\,\mathbf{w}\,dx
\end{aligned}\tag{3.24}
$$

Переставляя пары $(\mathbf{w},\pi)$ и $(\boldsymbol{\xi},\psi)$ местами получаем

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \operatorname{div}\,\Gamma(\boldsymbol{\xi},\psi)\cdot\mathbf{w}\,dx-\int_\Omega\pi\ \operatorname{div}\,\boldsymbol{\xi}\,dx-\int_{\partial\Omega}\Gamma(\boldsymbol{\xi},\psi)\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}\,ds=\\
&-\int_\Omega(\nabla\boldsymbol{\xi}+\nabla\boldsymbol{\xi}^{\top}):\nabla\mathbf{w}\,dx-\int_\Omega\pi\ \operatorname{div}\,\boldsymbol{\xi}\,dx-\int_\Omega\psi\ \operatorname{div}\,\mathbf{w}\,dx.
\end{aligned}\tag{3.25}
$$

Очевидные равенства

$$
\mathbf{w}^{\top}:\nabla\boldsymbol{\xi}=\nabla\boldsymbol{\xi}:\nabla\mathbf{w}^{\top}=\nabla\boldsymbol{\xi}^{\top}:\nabla\mathbf{w}
$$

влекут за собой тождество

$$(\nabla \boldsymbol{\xi} + \nabla \boldsymbol{\xi}^\top) : \nabla \mathbf{w} = (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^\top) : \nabla \boldsymbol{\xi}. \tag{3.26}$$

Тождество (3.26) вместе с равенствами (3.24), (3.25) влечет за собой соотношение (3.23)

□

Следствие 3.3. *Для любого векторного поля* $\mathbf{w} \in W^{2,2}(\Omega)$ *и любой кососимметрической матрицы* $\mathbf{S}$ *справедливо тождество*

$$\int_\Omega (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^\top) : (\mathbf{S}x)\, dx = 0. \tag{3.27}$$

Для доказательства достаточно положить $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{S}x$ $\psi = 0$

Если заметить, что

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{F} + f) \cdot \boldsymbol{\xi}\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi}\, ds - \int_\Omega \mathbf{F} : \nabla \boldsymbol{\xi}\, dx + \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\xi}\, ds, \tag{3.28}$$

то из вида исходных уравнений (3.21) и формулы Грина (3.23) естественным образом вытекает определение слабого решения задачи (3.21)

Определение 3.4. *Мы будем говорить, что* $\mathbf{w} \in W^{1,2}(\Omega)$ *и* $\pi \in L^2(\Omega)$ *являются слабым решением задачи* (3.21) *если для любых* $\boldsymbol{\xi} \in W^{1,2}(\Omega)$ *и* $\psi \in L^2(\Omega)$ *выполняются интегральные тождества*

$$\begin{gathered}\int_\Omega (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^\top) : \nabla \boldsymbol{\xi}\, dx + \int_\Omega \pi \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}\, dx + \int_\Omega \psi \operatorname{div} \mathbf{w}\, dx = \\ \int_\Omega \big(\mathbf{F} : \nabla \boldsymbol{\xi} - \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\xi} + \psi\, Q\big)\, dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\xi}\, ds.\end{gathered} \tag{3.29}$$

Замечание 3.5. *Для любой кососимметрической матрицы* $\mathbf{S}$ *и любого постоянного вектора* $\mathbf{c}$ *поле* $\mathbf{w} = \mathbf{c} + \mathbf{S}x$ *и функция* $\pi = 0$ *служат слабыми решениями однородной задачи* (3.21) *с правыми частями* $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{f} = 0$ $Q = 0$ *и* $\mathbf{h} = 0$.

Следующее предложение гарантирует существование и единственность слабых решений задачи (3.21).

Предложение 3.6. *Пусть пара* $(\operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{f}, \mathbf{F}\mathbf{n} + \mathbf{h})$, $\mathbf{F}, \mathbf{f} \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{h} \in L^2(\partial\Omega)$, *уравновешена, то есть удовлетворяет условиям*

$$\begin{gathered}\int_\Omega \mathbf{f}\, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{h}\, ds = 0, \\ \int_\Omega \mathbf{F} : \mathbf{S}\, dx - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot (\mathbf{S}x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{S}x)\, ds = 0,\end{gathered} \tag{3.30}$$

которые должны выполняться для всех кососимметрических матриц $\mathbf{S}$ *и которые идентичным условиям определения 2.2. Пусть* $Q \in L^2(\Omega)$. *Тогда задача* (3.21) *имеет единственное слабое решение, удовлетворяющее условиям ортогональности*

$$\int_\Omega \mathbf{w}(x,t)\, dx = 0, \quad \int_\Omega (\nabla \mathbf{w}(x,t) - \nabla \mathbf{w}^\top(x,t))\, dx = 0 \tag{3.31}$$

и допускающее оценку

$$\|\mathbf{w}\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\pi\|_{L^2(\Omega)} \le c(\|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|Q_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{h}\|_{L^2(\partial\Omega)}). \tag{3.32}$$

Здесь постоянная c зависит только от области Ω.

Доказательство. Шаг 1. Зафиксируем функции $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}$, Q $\mathbf{h}$, удовлетворяющие всем условиям предложения 3.6. Обозначим через $\mathbb{H}$ замкнутое подпространство пространства $W^{1,2}(\Omega)$, состоящее из всех функций $\mathbf{w}$, удовлетворяющих условиям ортогональности (3.31) . Норма в пространстве $\mathbb{H}$ может быть выбрана в виде

$$\|\mathbf{w}\|^2_{\mathbb{H}} = \int_\Omega |\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^\top|^2\, dx \tag{3.33}$$

В силу неравенства Корна существует постоянная $c > 0$, зависящая только от области Ω, такая, что для всех $\mathbf{w} \in \mathbb{H}$ выполняются неравенства

$$c^{-1}\|\mathbf{w}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \le c\|\mathbf{w}\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{3.34}$$

Мы будем искать пару $(\mathbf{w}, \pi)$ как критическую точку функционала

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}(\mathbf{w}, \pi) = \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^\top|^2\, dx + \int_\Omega \pi \operatorname{div}\, \mathbf{w}\, dx - \\ \int_\Omega \big(\mathbf{F} : \nabla \mathbf{w} - \mathbf{f}\cdot \mathbf{w} + \pi\, Q\big)\, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{h}\cdot \mathbf{w}\, ds.\end{aligned} \tag{3.35}$$

С этой целью мы рассмотрим следующую задачу о максимине

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{w}, \pi) = \max_{\tilde\pi \in L^2(\Omega)}\ \min_{\tilde{\mathbf{w}}\in\mathbb{H}}\ \mathbf{\Psi}(\tilde{\mathbf{w}}, \tilde\pi). \tag{3.36}$$

Ее решение начнем с исследования вспомогательной вариационной задачи для фиксированного $\pi \in L^2(\Omega)$

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{w}_\pi, \pi) = \min_{\tilde{\mathbf{w}}\in\mathbb{H}}\ \mathbf{\Psi}(\tilde{\mathbf{w}}, \pi). \tag{3.37}$$

Шаг 2. Для фиксированного π функционал $\mathbf{\Psi}(\cdot, \pi)$ является коэрцитивным и строго выпуклым в пространстве $\mathbb{H}$. Следовательно задача (3.37) имеет единственное решение в пространстве $\mathbb{H}$. Так как функционал $\mathbf{\Psi}(\cdot, \pi)$ является квадратичным, то вычисление его производной Гато в точке экстремума приводит к интегральному тождеству

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla \mathbf{w}_\pi + \nabla \mathbf{w}_\pi^\top) : (\nabla \boldsymbol{\xi} + \nabla \xi^\top)\, dx + \int_\Omega \pi \operatorname{div}\, \boldsymbol{\xi}\, dx = \\ \int_\Omega \big(\mathbf{F} : \nabla \boldsymbol{\xi} - \mathbf{f}\cdot \boldsymbol{\xi}\big)\, dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{h}\cdot \boldsymbol{\xi}\, ds.\end{aligned} \tag{3.38}$$

которое выполняется для любого элемента $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{H}$. Охарактеризуем основные свойства решений этой вариационной задачи. Покажем, что интегральное тождество (3.38) выполняется для любого элемента $\boldsymbol{\xi} \in W^{1,2}(\Omega)$ из более широкого гильбертова пространства $W^{1,2}(\Omega)$. Кроме того, оно может быть записано в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\nabla \mathbf{w}_\pi + \nabla \mathbf{w}_\pi^\top) : \nabla \boldsymbol{\xi}\, dx + \int_\Omega \pi \operatorname{div}\, \boldsymbol{\xi}\, dx = \\ \int_\Omega \big(\mathbf{F} : \nabla \boldsymbol{\xi} - \mathbf{f}\cdot \boldsymbol{\xi}\big)\, dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{h}\cdot \boldsymbol{\xi}\, ds.\end{aligned} \tag{3.39}$$

С этой целью заметим что каждый вектор $\boldsymbol{\xi} \in W^{1,2}(\Omega)$ допускает представление

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{c} + \mathbf{S}x + \boldsymbol{\xi}^*, \quad \boldsymbol{\xi}^* \in \mathbb{H},$$

в котором $\boldsymbol{S}$– кососимметрическая матрица, а $\mathbf{c}$ – постоянный вектор. Очевидно

$$\nabla(\mathbf{S}x) + \nabla(\mathbf{S}x)^\top = 0, \quad \text{div } \mathbf{S}x = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla \mathbf{w}_\pi + \nabla \mathbf{w}_\pi^\top) : (\nabla \boldsymbol{\xi} + \nabla \xi^\top)\, dx + \int_\Omega \pi \text{ div } \boldsymbol{\xi}\, dx = \\ &\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla \mathbf{w}_\pi + \nabla \mathbf{w}_\pi^\top) : (\nabla \boldsymbol{\xi}^* + \nabla {\xi^*}^\top)\, dx + \int_\Omega \pi \text{ div } \boldsymbol{\xi}^*\, dx. \end{aligned} \tag{3.40}$$

С другой стороны, из условий равновесия (3.30) вытекает равенство

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \big(\mathbf{F} : \nabla \boldsymbol{\xi} - \mathbf{f}\cdot \boldsymbol{\xi}\big)\, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\xi}\, ds = \\ &\int_\Omega \big(\mathbf{F} : \nabla \boldsymbol{\xi}^* - \mathbf{f}\cdot \boldsymbol{\xi}^*\big)\, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\xi}^*\, ds. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Так как $\boldsymbol{\xi}^* \in \mathbb{H}$, тождество (3.38) выполняется при замене $\boldsymbol{\xi}$ на $\boldsymbol{\xi}^*$. Отсюда и из (3.40)-(3.41) следует, что это тождество также выполняется для любого поля $\boldsymbol{\xi} \in W^{1,2}(\Omega)$. Замечая, что

$$\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{w}_\pi + \nabla \mathbf{w}_\pi^\top) : (\nabla \boldsymbol{\xi} + \nabla \boldsymbol{\xi}^\top) = (\nabla \mathbf{w}_\pi + \nabla \mathbf{w}_\pi^\top) : \nabla \boldsymbol{\xi}$$

приходим к тождеству (3.2). Далее, полагая $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{w}_\pi$ в (3.38), мы получим равенство

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \pi \text{ div } \mathbf{w}_\pi\, dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathbf{w}_\pi + \nabla \mathbf{w}_\pi^\top|^2\, dx + \\ &\int_\Omega \big(\mathbf{F} : \mathbf{w}_\pi - \mathbf{f}\cdot \mathbf{w}_\pi\big)\, dx - \int_{\partial\Omega} \big(\mathbf{F}\mathbf{n} + \mathbf{h}\big)\cdot \mathbf{w}_\pi\, ds. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Отсюда и из (3.35) вытекает следующее представление для маргинальной функции

$$\mathfrak{P}(\pi) \equiv \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{w}_\pi, \pi) = -\frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla \mathbf{w}_\pi + \nabla \mathbf{w}_\pi^\top|^2\, dx - \int_\Omega \pi\, Q\, dx. \tag{3.43}$$

Наконец отметим, что норма $\|\pi\|_{L^2(\Omega)}$ допускает оценку через норму $\|\mathbf{w}_\pi\|_{\mathbb{H}}$. Действительно, согласно лемме Боговского существует векторное поле $\boldsymbol{\xi}$ со следующими свойствами

$$\text{div } \boldsymbol{\xi} = \pi \ \text{ в } \ \Omega, \quad \boldsymbol{\xi} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad \|\boldsymbol{\xi}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le c(\Omega)\|\pi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Подстановка этого поля в (3.39) дает неравенство

$$\begin{aligned} \int_\Omega \pi^2\, dx \le \Big(\int_\Omega |\nabla \mathbf{w}_\pi + \nabla \mathbf{w}_\pi^\top|^2\, dx\Big)^{1/2} \Big(\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{\xi}|^2\, dx\Big)^{1/2} + \\ \Big(\int_\Omega \pi^2\Big)^{1/2}\Big(|\text{ div } \boldsymbol{\xi}|2\, dx\Big)^{1/2} + \\ 4\Big(\int_\Omega (|\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{f}|^2)\, dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{\xi}|^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2)\, dx\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

которое влечет за собой оценку

$$\|\pi\|_{L^2(\Omega)} \le \|\mathbf{w}_\pi\|_{\mathbb{H}} + c(\|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}). \tag{3.44}$$

Шаг 3. Рассмотрим вариационную задачу для маргинальной функции $\mathfrak{P}$

$$\mathfrak{P}(\pi) = \max_{\tilde{\pi}\in L^2(\Omega)} \mathfrak{P}(\tilde{\pi}). \tag{3.45}$$

Пусть π_n соответствующая максимизирующая последовательность. Из тождества (3.38) с $\pi = 0$ и $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{w}_\pi$ находим

$$\|\mathbf{w}_\pi\|_{\mathbb{H}} \le c(\|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{h}\|_{L^2(\partial\Omega)}). \tag{3.46}$$

Отсюда и из (3.43) вытекает неравенство

$$\mathfrak{P}(0) \ge -c(\|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{h}\|_{L^2(\partial\Omega)}),$$

которое влечет за собой оценку

$$-\mathfrak{P}(\pi_n) \le c(\|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{h}\|_{L^2(\partial\Omega)}) \tag{3.47}$$

Напомним, что маргинальная функция допускает представление

$$-\mathfrak{P}(\pi_n) \equiv \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{w}_{\pi_n}, \pi_n) = \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla\mathbf{w}_{\pi_n} + \nabla\mathbf{w}_{\pi_n}^\top|^2\,dx + \int_\Omega \pi_n\,Q\,dx.$$

Отсюда и из (3.47) находим

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla\mathbf{w}_{\pi_n} + \nabla\mathbf{w}_{\pi_n}^\top|^2\,dx - c\Big(\int_\Omega |\pi_n|\,dx\Big)^{1/2}\|Q\|_{L^2(\Omega)}&\\ \le c(\|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{h}\|_{L^2(\partial\Omega)})^2&.\end{aligned}$$

Применяя к последнему интегралу в левой части неравенство Коши и напоминая определение (3.33) нормы в пространстве $\mathbb{H}$ приходим к неравенству

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\mathbf{w}_{\pi_n}\|^2_{\mathbb{H}} - \delta\|\pi_n\|^2_{L^2(\Omega)} \le&\\ c(\delta)\Big(\|Q\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{h}\|_{L^2(\partial\Omega)}\Big)^2&.\end{aligned}$$

в котором δ произвольное положительное число. Комбинируя этот результат с (3.44) и выбирая δ достаточно малым находим

$$\|\mathbf{w}_{\pi_n}\|_{\mathbb{H}} \le c(\delta)\Big(\|Q\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{h}\|_{L^2(\partial\Omega)}\Big). \tag{3.48}$$

Опять применяя (3.44) получаем

$$\|\pi_n\|_{L^2(\Omega)} \le c\Big(\|Q\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{h}\|_{L^2(\partial\Omega)}\Big). \tag{3.49}$$

Переходя к подпоследовательности, мы можем считать что найдутся $\pi \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{w}^* \in \mathbb{H}$ со следующими свойствами

$$\pi_n \to \pi \ \text{ слабо в } \ L^2(\Omega), \quad \mathbf{w}_{\pi_n} \to \mathbf{w}^* \ \text{ слабо в } \ \mathbb{H} \ \text{ при } \ n\to\infty.$$

Подставляя π_n, $\mathbf{w}_{\pi_n}$ в интегральное тождество (3.39) и переходя к пределу при $n\to\infty$ приходим к выводу, что $\mathbf{w}^* = \mathbf{w}_\pi$ и маргинальная функция $\mathfrak{P}(\pi)$ определяется соотношением (3.43). Подставляя π_n, $\mathbf{w}_{\pi_n}$ в представление (3.43) и используя тот факт, что норма $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ слабо полунепрерывна снизу заключаем что

$$\mathfrak{P}(\pi) \ge \limsup_{n\to\infty} \mathfrak{P}(\pi_n).$$

Следовательно π служит решением вариационной задачи (3.45). Заметим, что $\mathbf{w}_\pi$ и π допускают оценки (3.46) и (3.49). Далее заметим, что $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{w}, \pi)$ является квадратичным функционалом в $\mathbb{H}\times L^2(\Omega)$. Кроме того, отображение

$L^2(\Omega) \ni \pi \to \mathbf{w}_\pi \in \mathbb{H}$ является непрерывным линейным оператором. Так как при фиксированном π функция $\mathbf{w}_\pi$ служит решением вариационной задачи (3.37) , то выполняются следующие соотношения для частных производных Гато функционалов $\mathbf{\Psi}$ и $\mathfrak{P}$

$$D_\pi \mathfrak{P}(\pi) = D_{\mathbf{w}} \mathbf{\Psi}(\mathbf{w}_\pi, \pi) \circ D_\pi \mathbf{w}_\pi(\pi) + D_\pi \mathbf{\Psi}(\mathbf{w}_\pi, \pi), \quad D_{\mathbf{w}} \mathbf{\Psi}(\mathbf{w}_\pi, \pi) = 0.$$

Так как π является критической точкой маргинальной функции $\mathfrak{P}(\pi)$, то отсюда и из представления (3.35) для функционала $\mathbf{\Psi}$ вытекает, что для любой функции $\psi \in L^2(\Omega)$ выполняется равенство

$$D_\pi \mathfrak{P}(\pi)[\psi] = D_\pi \mathbf{\Psi}(\mathbf{w}_\pi, \pi)[\psi] = \int_\Omega (\ \mathrm{div}\ \mathbf{w}_\pi - Q)\psi = 0. \tag{3.50}$$

Комбинируя этот результат с интегральным тождеством (3.39), заключаем, что пара $(\mathbf{w}_\pi, \pi)$ служит слабым решением задачи (3.21). Завершая доказательство, заметим, что оценка (3.32) является очевидным следствием оценок (3.48)-(3.49). □

Предложение 3.7. *Пусть $s \geq 0$ – целое число и пара* $(\ \mathrm{div}\ \mathbf{F} + \mathbf{f}, \mathbf{F}\mathbf{n} + \mathbf{h})$, $\mathbf{F} \in W^{s+1,2}(\Omega)$, $\mathbf{f} \in W^{s,2}(\Omega)$, $\mathbf{h} \in W^{s+1/2}(\partial\Omega)$ *уравновешена, то есть удовлетворяет условиям* (3.30). *Пусть $Q \in W^{s+1,2}(\Omega)$. Тогда задача* (3.21) *имеет единственное решение $\mathbf{w} \in W^{s+2}(\Omega)$, $\pi \in W^{s+1}(\Omega)$, удовлетворяющее условиям ортогональности* (3.31) *и допускающее оценку*

$$\begin{gathered} \|\mathbf{w}\|_{W^{s+2,2}(\Omega)} + \|\pi\|_{W^{s+1,2}(\Omega)} \leq \\ c(\|\mathbf{F}\|_{W^{s+1,2}(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{s,2}(\Omega)} + \|Q\|_{W^{s+1,2}(\Omega)} + \|\mathbf{h}\|_{W^{s+1/2,2}(\partial\Omega)}). \end{gathered} \tag{3.51}$$

Здесь постоянная c зависит только от s и области Ω.

Доказательство. Краевая задача (3.21) имеет полное сходство со второй краевой задачей для системы уравнений Стокса. Вычисления, идентичные тем, что были проделаны в работе Солонникова [9], показывают, что задача (3.21) является эллиптической по Даглису-Ниренбергу с теми же показателями, что и система Стокса. В частности, гладкость решения повышается вместе с повышением гладкости правых частей и для любого целого $s \geq 2$ слабое решение допускает оценку

$$\begin{gathered} \|\mathbf{w}\|_{W^{s+2,2}(\Omega)} + \|\pi\|_{W^{s+1,2}(\Omega)} \leq c(\|\mathbf{w}\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\pi\|_{L^2(\Omega)}) + \\ c(\|\mathbf{F}\|_{W^{s+1,2}(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{s,2}(\Omega)} + \|Q\|_{W^{s+1,2}(\Omega)} + \|\mathbf{h}\|_{W^{s+1/2,2}(\partial\Omega)}). \end{gathered}$$

Применение предложения 3.6 завершает доказательство. □

Как следствие, мы получаем следующий результат для случая, когда правые части задачи (3.21) дополнительно зависят от временной переменной. Напомним определения 2.4, 2.5 для банаховых пространств $\mathcal{V}_s$, $\mathcal{Q}_s$, $\mathcal{T}_s$.

Следствие 3.8. *Пусть целое $s \geq 2$ и*

$$\mathbf{F} \in C(0, T; W^{s+1,2}(\Omega)), \quad (\mathrm{div}\ \mathbf{F} + \mathbf{f}, Q, \mathbf{F}\mathbf{n} + \mathbf{h}) \in \mathcal{T}_s,$$

где банахово пространство $\mathcal{T}_s$ дано определением 2.5. Тогда задача (3.21) *имеет единственное решение $(\mathbf{w}, \pi) \in \mathcal{V}_{s+2} \times \mathcal{Q}_{s+1}$, которое допускает оценку*

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{V}_{s+2}} + \|\pi\|_{\mathcal{Q}_{s+1}} \leq c(\|(\ \mathrm{div}\ \mathbf{F} + \mathbf{f}, \mathbf{F}\mathbf{n} + \mathbf{h})\|_{\mathcal{T}_s} + \|Q\|_{\mathcal{Q}_{s+1}}. \tag{3.52}$$

Доказательство. Из определений 2.4 и 2.5 пространств $\mathcal{V}_s$ и $\mathcal{T}_s$ следует, что $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{h}$ и Q удовлетворяют всем условиям предложения 3.7 для всех $t \in (0,T)$. Поэтому существование и единственность решений $(\mathbf{w}(t), \pi(t)$ для каждого момента времен t следует из предложения 3.7. Кроме того, оценка (3.52) является прямым следствием оценки (3.51). Непрерывность решений $(\mathbf{w}(t), \pi(t))$ по временной переменной следует из их единственности и непрерывности по правых частей по t. □

Нестационарная линейная задача. Теперь мы в состоянии доказать разрешимость краевой задачи (3.15)-(3.17), которая согласно предложению3.1 является главной частью основной линейной задачи (3.9)-(3.11). Этот результат дается следующим предложением.

Предложение 3.9. *Пусть целое $s \geq 0$ и $(\mathbf{f}, \mathbf{N}, \mathbf{h}) \in \mathcal{T}_s$. Кроме того, предположим, что матричнозначная функция $\mathbf{M}$ симметрична и принадлежит классу $C(0,T; W^{s+1,2}(\Omega))$. Тогда задача* (3.15)-(3.17) *имеет единственное решение $(\mathbf{w}, \pi) \in \mathcal{V}_{s+2} \times \mathcal{Q}_{s+1}$, которое допускает оценку*

$$\|(\mathbf{w}, \pi)\|_{\mathcal{V}_{s+2}\times\mathcal{Q}_{s+1}} \leq c\|(\mathbf{f}, \mathbf{N}, \mathbf{h})\|_{\mathcal{T}_s} + c\|\mathbf{M}\|_{C(0,T;W^{s+1,2}(\Omega))}, \tag{3.53}$$

где постоянная c зависит только от s, T и Ω.

Доказательство. Мы будем искать решение задачи (3.15)-(3.17) по стандартной итерационной схеме

$$\operatorname{div}\left\{\nabla \mathbf{w}_{n+1} + \nabla \mathbf{w}_{n+1}^\top + \pi_{n+1}\mathbf{I}\right\} = \operatorname{div}\left(\beta d\int_0^t \pi_n\, ds\,\mathbf{I} + \mathbf{M}\right) + (\mathbf{I} + \mathbb{V})\mathbf{f} \quad \text{в} \quad Q_T. \tag{3.54}$$

$$\operatorname{div}\, \mathbf{w}_{n+1} = \frac{\varkappa d}{2}\int_0^t \pi_n\, ds + \mathbf{N} \quad \text{в} \quad Q_T. \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}\left\{\nabla \mathbf{w}_{n+1} + \nabla \mathbf{w}_{n+1}^\top + \pi_{n+1}\mathbf{I}\right\}\mathbf{n} = \left(\beta d\int_0^t \pi_n\, ds\,\mathbf{I} + \mathbf{M}\right)\mathbf{n}\\ +(I + \mathbb{V})\mathbf{h} \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),\end{aligned} \tag{3.56}$$

$\mathbf{w}_0 = 0$, $\pi_0 = 0$. Так как матрица $\mathbf{M}$ симметрична и пара $^{\mathbf{f}}, \mathbf{h})$ уравновешена, то пара

$$(\operatorname{div}\, \mathbf{M} + (I + \mathbb{V})\mathbf{f}, \mathbf{M}\mathbf{n} + (I + \mathbb{V})\mathbf{h})$$

также уравновешена и правая часть уравнений (3.54)-(3.56) удовлетворяет условиям следствия 3.27 . Его применение показывает, что при $n = 0$ задача (3.54)-(3.56) имеет единственное решение, допускающее оценку

$$\|(\mathbf{w}_1, \pi_1)\|_{\mathcal{V}_{s+2}\times\mathcal{Q}_{s+1}} \leq c\|(\mathbf{f}, \mathbf{N}, \mathbf{h})\|_{\mathcal{T}_s} + c\|(\mathbf{M}, \mathbf{N})\|_{C(0,T;W^{s+1,2}(\Omega))}, \tag{3.57}$$

Далее, при $n \geq 1$ имеем следующую систему уравнений для разности между двумя соседними приближениями

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left\{\nabla(\mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{w}_n) + \nabla(\mathbf{w}_{n+1} - \nabla \mathbf{w}_n)^\top + (\pi_{n+1} - \pi_n)\,\mathbf{I}\right\} =\\ \operatorname{div}\left(\beta d\int_0^t (\pi_n - \pi_{n-1})\, ds\,\mathbf{I}\right) \quad \text{в} \quad Q_T.\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\operatorname{div}\,(\mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{w}_n) = \frac{\varkappa d}{2}\int_0^t (\pi_n - \pi_{n-1})\, ds \quad \text{в} \quad Q_T. \tag{3.59}$$

$$\begin{gathered}\big\{\nabla(\mathbf{w}_{n+1}-\mathbf{w}_n)+\nabla(\mathbf{w}_{n+1}-\mathbf{w}_n)^\top+(\pi_{n+1}-\pi_n)\,\mathbf{I}\big\}\mathbf{n}=\\ \Big(\beta d\int_0^t(\pi_n-\pi_{n-1})\,ds\,\mathbf{I}\Big)\,\mathbf{n}\ \ \text{на}\ \ \partial\Omega\times(0,T),\end{gathered}\tag{3.60}$$

Поскольку матрица $(\pi_n-\pi_{n-1})\mathbf{I}$ симметрична, то пара

$$\Big(\mathrm{div}\ \big((\pi_n-\pi_{n-1})\,\mathbf{I}\big),(\pi_{n+1}-\pi_n)\,\mathbf{n}$$

уравновешена. Отсюда и из предложения (3.7) с $\mathbf{F}=(\pi_{n+1}-\pi_n)\,\mathbf{I}$ вытекает, что задача (3.58)-(3.60) имеет решение, которое удовлетворяет неравенству

$$\begin{gathered}\|\mathbf{w}_{n-1}(t)-\mathbf{w}_n(t)\|_{W^{s+2}(\Omega)}+\|\pi_{n+1}(t)-\pi_n(t)\|_{W^{s+1,2}(\Omega)}\leq\\ c\int_0^t\|\pi_{n+1}(s)-\pi_n(s)\|_{W^{s+1,2}(\Omega)}\,ds,\quad 0\leq t\leq T.\end{gathered}$$

Применяя стандартную процедуру оценки последовательных приближений для уравнений Вольтерра, отсюда и из (3.57) заключаем, что последовательность $(\mathbf{w}_n,\pi_n)$ сходится в пространстве $\mathcal{V}_{s+2}\times\mathcal{Q}_{s+1}$ к пределу $(\mathbf{w},\pi)$, удовлетворяющему неравенству (3.53). □

Разрешимость основной линейной задачи. Сейчас мы в состоянии доказать разрешимость основной линейной краевой задачи (3.9)-(3.11).

Теорема 3.10. *Для любого целого $s\geq 0$ и любого вектора $\mathbf{Z}=(\mathbf{f},Q,\mathbf{h},\mathbf{G},\mathbf{R})\in\mathbb{Y}_s$ задача* (3.9)-(3.11) *имеет единственное решение $\Upsilon=(\mathbf{w},\pi,\mathbf{H},\mathbf{S})\in\mathbb{X}_{s+2}$, допускающее оценку*

$$\|\Upsilon\|_{\mathbb{X}_{s+2}}\leq c\|\mathbf{Z}\|_{\mathbb{Y}_s},\tag{3.61}$$

в которой постоянная c зависит только от s, Ω и T.

Доказательство. Доказательство основано на применении предложения 3.1. Согласно этому предложению краевая задача (3.9)-(3.11)после некоторых преобразований принимает треугольную форму. Для построения ее решения сначала необходимо решить независимую краевую задачу (3.15)-(3.17) для поля деформаций $\mathbf{w}$ и давления π. После этого фактор роста $\mathbf{H}$ восстанавливается по $\mathbf{w}$, π и данным задачи с помощью явной формулы (3.18). Далее матрица $\mathbf{S}$ находится по $\mathbf{w}$ и заданной кососимметрческой матрице $\mathbf{R}$ путем решения алгебраического уравнения (3.19).

Из формул (3.20) вытекает, что матрица $\mathbf{M}$ и скалярная функция $\mathbf{N}$ в условиях предложения 3.9 допускают явное выражение через данные задачи и допускают оценку

$$\|\mathbf{M}\|_{C(0,T;W^{s+1,2}(\Omega)}+\|\mathbf{N}\|_{C(0,T;W^{s+1,2}(\Omega)}\leq c\|Z\|_{\mathbb{Y}_s}.\tag{3.62}$$

Отсюда и из предложения 3.9 вытекает, что при заданном векторе $\mathbf{Z}$, задача (3.15)-(3.17) для поля деформаций $\mathbf{w}$ и давления π имеет единственное решение $(\mathbf{w},\pi)\in\mathcal{V}_{s+2}\times\mathcal{Q}_{s+1}$, которое удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{V}_{s+2}}+\|\pi\|_{\mathcal{Q}_{s+1}}\leq c\|Z\|_{\mathbb{Y}_s}.\tag{3.63}$$

Из формулы (3.18) очевидным образом вытекает, что матричнозначная функция $\mathbf{H}\in\mathcal{W}_{s+1}$ корректно определена и допускает оценку

$$\|\mathbf{H}\|_{\mathcal{W}_{s+1}}\leq c\|Z\|_{\mathbb{Y}_s}.\tag{3.64}$$

Остается решить алгебраическое уравнение (3.19). Так как пара $(0,\mathbf{g}_0)$ уравновешена, то матрица $\mathbf{C}(t)$, определенная соотношением (2.10) симметрична и астатическая матрица $\mathbf{C}+\mathbf{C}^\top = 2\mathbf{C}$. Пусть - λ_i – собственные числа матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{O}(t)$- ортогональная матрица, приводящая $\mathbf{C}$ к диагональной форме,

$$\mathbf{O}\,\mathbf{C}\,\mathbf{O}^\top = \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\le i\le d}.$$

Заметим, что матрица $\mathbf{C}$ непрерывно зависит от t . Хорошо известно, что при подходящем выборе нумерации собственных чисел, матрица $\mathbf{O}$ и λ_i становятся непрерывными функциями временной переменной. С учетом этих обозначений уравнение (3.19) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\|\mathbf{g}_0\|_{L^2(\partial\Omega)}}\Big\{\mathbf{J}\mathbf{W} - (\mathbf{J}\mathbf{W})^\top\Big\} = \mathbf{\Sigma}, \tag{3.65}$$

где новая неизвестная матрица $\mathbf{W}$ и матрица $\mathbf{\Sigma}$ определяются равенствами

$$\mathbf{W} = \mathbf{O}\Theta\mathbf{O}^\top, \quad \mathbf{\Sigma} = \mathbf{O}\left(\mathbf{R} - \frac{1}{\|\mathbf{g}_0\|_{L^2(\partial\Omega)}}\big(\mathbf{D}(\mathbf{w}) - \mathbf{D}(\mathbf{w})^\top\big)\right)\mathbf{O}^\top. \tag{3.66}$$

Напомним что векторное поле $\mathbf{w}$ уже определено и допускает оценку (3.63). Так как $\mathbf{S}$, $\mathbf{R}$ кососимметричны, то матрицы $\mathbf{W}$, $\mathbf{\Sigma}$ также кососимметричны. Из условия невырожденности 2.6 и оценки

$$|\mathbf{w}| \le c\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V}_{s+2}} \le c\|\mathbf{Z}\|_{\mathbb{Y}_s}$$

вытекают неравенства

$$|\Theta| \le |\mathbf{W}|, \quad |\mathbf{\Sigma}| \le c|\mathbf{R}| + c\|\mathbf{Z}\|_{\mathbb{Y}_s}. \tag{3.67}$$

Решение уравнения (3.66) дается явной формулой

$$W_{ii} = 0, \quad W_{ij} = \frac{\|\mathbf{g}_0\|_{L^2(\partial\Omega)}}{\lambda_i+\lambda_j}\Sigma_{ij} \quad \text{при} \quad i \ne j/$$

Заметим, что $\lambda_i = \mu_i/2$, где μ_i - собственные числа астатической матрицы. Отсюда и из условия невырожденности 2.6 заключаем, что уравнение (3.65) имеет единственное решение, которое допускает оценку.

$$\|\mathbf{W}\|_{C(0,T)} \le c\|\mathbf{Z}\|_{\mathbb{Y}_s} \tag{3.68}$$

Следовательно уравнение (3.19) однозначно разрешимо. Из неравенств (3.67) и (3.68) вытекает, что его решение допускает оценку

$$\|\Theta\|_{C(0,T)} \le c\|\mathbf{Z}\|_{\mathbb{Y}_s} \tag{3.69}$$

Тем самым мы доказали, что основная линейная задача (3.9)-(3.11) имеет единственное решение $\Upsilon \in \mathbb{X}_{s+2}$ для любого заданного вектора $\mathbf{Z} \in \mathbb{Y}_s$. Остается заметить, что нужная оценка (3.61) очевидным образом следует из оценок (3.63), (3.64) и (3.69) □

Так как краевая задача (3.9)-(3.11) равносильна линейному операторному уравнению (3.8), то из теоремы (3.10) вытекает

Следствие 3.11. *Для любого целого $s \ge 3$ существует ограниченный линейный оператор $\big(D_\Upsilon\,\mathbf{\Xi}(0)\big)^{-1} : \mathbb{Y}_s \to \mathbb{X}_{s+2}$, норма которого допускает оценку*

$$\|\big(D_\Upsilon\,\mathbf{\Xi}(0)\big)^{-1}\| \le c, \tag{3.70}$$

где постоянная c зависит только от s, Ω и T.

4. Доказательство Теоремы 2.8

Теперь мы в состоянии завершить доказательства теоремы 2.8 – главного результата настоящей работы. Для этого достаточно установить локальную разрешимость операторного уравнения (2.12) и доказать, что для построенного решения модифицирующее слагаемое $\mathbf{E}\varphi$ равно нулю. Заметим, что согласно выражению (2.8f) для компоненты Ξ_3, оператор $\boldsymbol{\Xi}$ линейно зависит от параметра $\varepsilon \in (-1,1)$. Поэтому далее мы будем писать $\boldsymbol{\Xi}(\Upsilon,\varepsilon)$ вместо $\boldsymbol{\Xi}(\Upsilon)$. Тогда уравнение (2.12) примет вид.

$$\boldsymbol{\Xi}(\Upsilon,\varepsilon) = 0. \tag{4.1}$$

Согласно лемме 2.7 оператор $\boldsymbol{\Xi}: B_{s+2}(\rho_0)\times(-1,1) \to \mathbb{Y}_s$ определен и непрерывно дифференцируем. Кроме того, очевидно $\boldsymbol{\Xi}(0,0) = 0$. Далее, согласно следствию 3.11, оператор $D_\Upsilon\boldsymbol{\Xi}(0,\varepsilon)$, который не зависит от ε, имеет ограниченный обратный. Из теоремы о неявной функции следует существование положительной постоянной $\varepsilon_0 > 0$ такой , что уравнение(4.1) обладает однопараметрическим непрерывно дифференцируем семейством решений $\Upsilon_\varepsilon : (-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \to \mathbb{X}_{s+2}$ таким, что

$$\|\Upsilon_\varepsilon\|_{\mathbb{X}_{s+2}} \le c|\varepsilon|. \tag{4.2}$$

Осталось показать, что модифицирующий член $\mathbf{E}\varphi$ в операторном уравнении (4.1) равен нулю при подходящем выборе ε_0. Для краткости письма будем писать Υ вместо Υ_ε. С этой целью мы используем слегка видоизмененный метод Валента, [10].

Зафиксируем произвольно $t \in (0,T)$ и рассмотрим статическую задачу (2.8d)-(2.8f). Положим

$$\mathcal{E} := \mathbf{E}(\Upsilon)\,\varphi. \tag{4.3}$$

Тогда система (2.8d) имеет вид

$$\partial_p T_{ip}(\mathbf{F}_g, \nabla\mathbf{u}, p) + \mathcal{E}_i = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times\{t\}.$$

Умножая обе части этого равенства на u_j и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{gathered}\int_\Omega (\mathcal{E}_i u_j - \mathcal{E}_j u_i)\,dx + \int_{\partial\Omega}(g_i u_j - g_j u_i)\,ds = \\ \int_\Omega \big(T_{ip}\partial_p u_j - T_{jp}\partial_p u_i\big)\,dx \equiv \int_\Omega \omega_{ij}\,dx.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Покажем, что матрица $\boldsymbol{\omega}$ тождественно равна нулю. Легко видеть, что она допускает представление

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}(\nabla\mathbf{u})^\top - \big(\,\mathbf{T}(D\mathbf{u})^\top\,\big)^\top.$$

Из формулы (1.26) для тензора напряжений находим

$$\mathbf{T} = (\det\mathbf{F}_g)\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}\mathbf{F}_g^{-\top} + p(\det\nabla\mathbf{u})(\nabla\mathbf{u})^{-\top}.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{T}(\nabla u)^\top = (\det\mathbf{F}_g)\big(\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{F}_g^{-1}\big)\,\big(\nabla u\mathbf{F}_g^{-1}\big)^\top + p(\det\nabla\mathbf{u})\,\mathbf{I}.$$

Следовательно матрица $\mathbf{T}(\nabla\mathbf{u})^\top$ симметрична, что влечет равенство $\boldsymbol{\omega} = 0$. Отсюда и из (4.4) вытекает соотношение

$$\int_\Omega (\mathcal{E}_i u_j - \mathcal{E}_j u_i)\, dx + \int_{\partial\Omega} (g_i u_j - g_j u_i)\, ds = 0. \tag{4.5}$$

Напомним, что $u_i = x_i + S_{ip}x_p + v_i$ и пара $(0, \mathbf{g})$ уравновешена. Отсюда вытекает, что

$$\int_{\partial\Omega} (g_j u_j - g_i u_j)\, ds = S_{ip} \int_{\partial\Omega} x_p g_j\, ds - S_{jp} \int_{\partial\Omega} x_p g_i\, ds +$$
$$\int_{\partial\Omega} (g_j v_j - g_i v_j)\, ds = S_{ip}C_{pj} - S_{jp}C_{pi} + D_{ij}(\mathbf{v}) - D_{ji}(\mathbf{v}) =$$
$$(\mathbf{SC})_{ij} - (\mathbf{SC})^\top_{ij} + D_{ij}(\mathbf{v}) - D^\top_{ij}(\mathbf{v}) = 0.$$

Здесь мы воспользовались уравнением (2.8h). Отсюда и из (4.5) находим

$$\int_\Omega (\mathcal{E}_i u_j - \mathcal{E}_j u_i)\, dx = 0. \tag{4.6}$$

Из формулы (4.3) для $\mathcal{E}$ и соотношений (2.5) для векторного поля φ следует,что

$$\int_\Omega (\mathcal{E}_i x_j - \mathcal{E}_j x_i)\, dx = E_{ij}. \tag{4.7}$$

Напомним, что $\mathbf{u} = x + \mathbf{S}x + \mathbf{v}$. Из равенств (4.6) и (4.7) вытекает соотношение

$$\mathbf{E} = \mathbf{V}^\top - \mathbf{V},$$

в котором $\mathbf{V}$ – матрица с элементами

$$V_{ij} = E_{ip} \int_\Omega \varphi_p (\mathbf{S}x + \mathbf{v})_j\, dx.$$

Очевидно она допускает оценку

$$|\mathbf{V}| \le c|\mathbf{E}|(\|\mathbf{S}\|_{C(0,T)} + \|\mathbf{v}\|_{C(\Omega\times(0,T))}) \le c|\mathbf{E}|\|\Upsilon_\varepsilon\|_{\mathbb{X}_{s+2}} \le c\varepsilon_0|\mathbf{E}|.$$

Выбирая ε_0 достаточно малым, мы окончательно получаем $\mathbf{E} = 0$, что завершает доказательство теоремы 2.8.

Приложение А. Доказательство предложения 3.1

Доказательство предложения 3.1 опирается на следующие вспомогательные леммы о решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений и интегрального уравнения типа Вольтерра.

Вспомогательное дифференциальное уравнение. Рассмотрим задачу Коши для модельной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\alpha\mathbf{H} - \beta\ \mathrm{tr}\ \mathbf{H}\, I + \Sigma \quad \text{в} \quad Q_T, \tag{5.1a}$$

$$\mathbf{H}(x, 0) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{5.1b}$$

Следующая лемма дает точное решение этой задачи

Лемма А.1. *Единственное решение задачи Коши* (5.1) *дается формулой*

$$\mathbf{H}(x,t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Sigma(s)\, ds + \frac{1}{d}\Big\{ \int_0^t \big(e^{-\varkappa(t-s)} - e^{-\alpha(t-s)}\big)\ \mathrm{tr}\ \Sigma(s)\, ds \Big\}, \tag{5.2}$$

где $\varkappa = \alpha + \beta d$, d– размерность пространства.

Доказательство. Из уравнений (5.1) очевидным образом вытекают следующие уравнения для $\operatorname{tr} \mathbf{H}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr} \mathbf{H} = -\varkappa \operatorname{tr} \mathbf{H} + \operatorname{tr} \Sigma \ \text{ в } \ Q_T, \qquad \operatorname{tr} \mathbf{H}(x,0) = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{5.3}$$

которые влекут за собой равенство

$$\operatorname{tr} \mathbf{H} = \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)} \operatorname{tr} \Sigma(s)\, ds.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (5.1a) переводит это уравнение в обыкновенное уравнение для $\mathbf{H}$. Решение последнего выписывается в явной форме и имеет вид

$$\mathbf{H} = \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \Sigma(s)\, ds - \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \Big\{ \int_0^s e^{-\varkappa(s-\tau)} \operatorname{tr} \Sigma(\tau)\, d\tau \Big\} I. \tag{5.4}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \Big\{ \int_0^s e^{-\varkappa(s-\tau)} \operatorname{tr} \Sigma(\tau)\, d\tau \Big\} &= \int_0^t \operatorname{tr} \Sigma(\tau) \Big\{ \int_\tau^t e^{(\alpha-\varkappa)s - \alpha t + \varkappa\tau)} ds \Big\}\, d\tau \\
&= \int_0^t \operatorname{tr} \Sigma(\tau) e^{-\alpha t + \varkappa \tau} \Big\{ \int_\tau^t e^{(\alpha-\varkappa)s)} ds \Big\}\, d\tau \\
&= \frac{1}{\alpha - \varkappa} \int_0^t \operatorname{tr} \Sigma(\tau) e^{-\alpha t + \varkappa\tau} (e^{(\alpha-\varkappa)t} - e^{(\alpha-\varkappa)\tau})\, d\tau \\
&= -\frac{1}{\beta d} \int_0^t \operatorname{tr} \Sigma(s) (e^{-\varkappa(t-s)} - e^{-\alpha(t-s)})\, ds.
\end{aligned}$$

Подстановка этих равенств в (5.4) приводит к нужному представлению (5.2) □

Вспомогательное интегральное уравнение. Введем в рассмотрение функцию $\mathbf{H}_\Gamma$ заданную равенством

$$2\mathbf{H}_\Gamma = \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \Big(\Gamma(s) - \frac{1}{d} \operatorname{tr} \Gamma(s)\, I \Big)\, ds + \frac{\varkappa}{d} \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)} \operatorname{tr} \Gamma(s)\, ds\, I. \tag{5.5}$$

Функцию $\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma$ можно рассматривать как линейный оператор над Γ. Вопрос об обращении этого оператора сводится к решению линейного интегрального уравнения типа Вольтерра

$$\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma = \mathbf{Z} \ \text{ в } \ Q_T. \tag{5.6}$$

Его решение дается следующей леммой.

Лемма A.2. *Единственное решение уравнения* (5.6) *дается формулой*

$$\Gamma = \mathbf{Z} + \alpha \int_0^t \mathbf{Z}(s)\, ds + \beta \int_0^t \operatorname{tr} \mathbf{Z}(s)\, ds\ I. \tag{5.7}$$

Доказательство. Используя равенство (5.5), перепишем уравнение (5.6) в эквивалентной форме

$$\Gamma - \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \Big(\Gamma(s) - \frac{1}{d} \operatorname{tr} \Gamma(s)\, I \Big)\, ds - \frac{\varkappa}{d} \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)} \operatorname{tr} \Gamma(s)\, ds\, I = \mathbf{Z}. \tag{5.8}$$

Используя это уравнение, сначала найдем $\operatorname{tr}\Gamma$. Вычисляя след от обеих частей (5.8) получим

$$\operatorname{tr}\Gamma - \varkappa\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\operatorname{tr}\Gamma(s)\,ds = \operatorname{tr}\mathbb{Z}.$$

Применяя к обеим частям этого уравнения дифференциальный оператор $d/dt+\varkappa$, и замечая, что

$$\Big(\frac{d}{dt}+\varkappa I\Big)\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\operatorname{tr}\Gamma(s)\,ds = \Gamma(t)$$

находим

$$\frac{d}{dt}\operatorname{tr}\Gamma = \frac{d}{dt}\operatorname{tr}\mathbf{Z} + \varkappa\operatorname{tr}\mathbf{Z}.$$

Интегрируя обе части этого равенства по временной переменной с учетом равенств $\operatorname{tr}\Gamma(0) = \operatorname{tr}\mathbf{Z}(0)$, находим

$$\operatorname{tr}\Gamma(t) = \operatorname{tr}\mathbf{Z}(t) + \varkappa\int_0^t \operatorname{tr}\mathbf{Z}(t).$$

Подставляя это выражение в (5.8), придем к равенству

$$\begin{gathered}\Gamma - \alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Gamma(s)\,ds +\\ \frac{\alpha}{d}\Big\{\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\operatorname{tr}\mathbf{Z}(s)\,ds + \varkappa\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\int_0^s \operatorname{tr}\mathbf{Z}(\tau)\,d\tau\Big\}I -\\ \frac{\varkappa}{d}\Big\{\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\operatorname{tr}\mathbf{Z}(s)\,ds + \varkappa\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\int_0^s \operatorname{tr}\mathbf{Z}(\tau)\,d\tau\Big\}I.\end{gathered}\tag{5.9}$$

Далее заметим

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\int_0^s \operatorname{tr}\mathbf{Z}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\alpha}\int_0^t \operatorname{tr}\mathbf{Z}(s) - \frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\operatorname{tr}\mathbf{Z}\,ds.$$

$$\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\int_0^s \operatorname{tr}\mathbf{Z}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\varkappa}\int_0^t \operatorname{tr}\mathbb{Z}(s) - \frac{1}{\varkappa}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\operatorname{tr}\mathbf{Z}\,ds.$$

Подстановка этих равенств в (5.9) дает

$$\begin{gathered}\Gamma - \alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Gamma(s)\,ds +\\ \frac{\alpha}{d}\big(1-\frac{\varkappa}{\alpha}\big)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\operatorname{tr}\mathbf{Z}(s)\,ds\,I + \frac{\varkappa}{d}\int_0^t \operatorname{tr}\mathbf{Z}(s)\,ds\,I -\\ \frac{\varkappa}{d}\int_0^t \operatorname{tr}\mathbf{Z}\,ds\,I = \mathbf{Z}.\end{gathered}$$

Отсюда и из равенства $(1-\varkappa/\alpha) = d\beta/\alpha$ находим

$$\Gamma - \alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Gamma(s)\,ds - \beta\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\operatorname{tr}\mathbf{Z}\,ds\,I = \mathbf{Z}.$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $d/dt+\alpha$ и замечая, что

$$\Big(\frac{d}{dt}+\alpha I\Big)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Gamma(s)\,ds = \Gamma(t), \quad \Big(\frac{d}{dt}+\alpha\Big)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\operatorname{tr}\mathbf{Z}(s)\,ds = \operatorname{tr}\mathbf{Z}(t),$$

находим
$$\frac{d}{dt}\Gamma = \frac{d}{dt}\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} + \beta \text{ tr } \mathbf{Z}\, I.$$
Интегрируя обе части этого равенства по временной переменной с учетом равенства $\Gamma(0) = \mathbf{Z}(0)$, находим
$$\text{tr } \Gamma(t) = \mathbf{Z}(t) + \alpha \int_0^t \mathbf{Z}(s)\, ds + \beta \int_0^t \text{ tr } \mathbf{Z}(s)\, ds\, I,$$
что завершает доказательство. □

Введем в рассмотрение два оператора типа Вольтерра
$$\mathbb{V}u(t) = \alpha \int_0^t u(s)\, ds, \quad \mathbb{A}u(t) = \beta \int_0^t \text{ tr } u(s)\, ds\, I. \tag{5.10}$$
Тогда утверждение леммы A.2 можно записать в виде
$$(I + \mathbb{V} + \mathbb{A})(\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma) = \Gamma. \tag{5.11}$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (3.13) **для фактора роста.**

Вернемся к задаче Коши (3.13). Полагая
$$\Sigma_\Gamma = \frac{1}{2}(\alpha\, \Gamma + \beta \text{ tr } \Gamma\, I), \quad \Sigma_\Phi = \Phi, \tag{5.12}$$
разобьем решение задачи (3.13) на два слагаемых
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\Gamma + \mathbf{H}_\Phi, \tag{5.13}$$
которые даются формулой (5.3) с Σ равным Σ_Γ и Σ_Φ соответственно. Из (5.3) находим
$$\mathbf{H}_\Phi = \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Phi(s)\, ds + \frac{1}{d}\int_0^t \left(e^{-\varkappa(t-s)} - e^{-\alpha(t-s)}\right) \text{tr } \Phi(s)\, ds. \tag{5.14}$$
Далее заметим, что $\mathbf{H}_\Gamma$ определяется равенством (5.5). Действительно, в силу равенства (5.12) имеем
$$\text{tr } \Sigma_\Gamma = \frac{\varkappa}{2} \text{ tr } \Gamma.$$
Отсюда, из леммы A.1 и формуле (5.12) для Σ_Γ вытекает, что
$$\mathbf{H}_\Gamma = \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Big(\frac{\alpha}{2}\Gamma(s) + \frac{\beta}{2} \text{ tr } \Gamma\Big)ds +$$
$$\frac{\varkappa}{2d}\int_0^t (e^{-\varkappa(t-s)} - e^{-\alpha(t-s)}) \text{ tr } \Gamma(s)\, ds.$$
Замечая, что
$$\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Big(\frac{\beta}{2} - \frac{\varkappa}{2d}\Big) \text{ tr } \Gamma ds = -\frac{\alpha}{2d}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \text{tr } \Gamma(s)\, ds,$$
приходим к нужному соотношению (5.5). Объединяя равенства (5.5) и (5.14), придем к следующему выражению для матрицы фактора роста
$$\begin{aligned}\mathbf{H} = \frac{\alpha}{2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Big(\Gamma(s) - \frac{1}{d} \text{ tr } \Gamma(s)\, I\Big)\, ds + \frac{\varkappa}{2d}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)} \text{ tr } \Gamma(s)\, ds\, I +\\ \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Phi(s)\, ds + \frac{1}{d}\int_0^t \left(e^{-\varkappa(t-s)} - e^{-\alpha(t-s)}\right) \text{ tr } \Phi(s)\, ds.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Преобразование уравнений динамики. С учетом соотношения (5.13) первое уравнение в основной линейной системе (3.12) может быть записано в виде

$$\operatorname{div}\,\big\{\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma\big\} = \operatorname{div}\,\big\{Q\,I + 2\mathbf{H}_\Phi\big\} + \mathbf{f} \ \text{ в } \ Q_T \tag{5.16}$$

Аналогичным образом записывается краевое условие на боковой поверхности цилиндра. Применяя к обеим частям уравнения (5.16) оператор $I + \mathbf{V}$, перепишем его с учетом тождества (5.11)в виде

$$\operatorname{div}\,\big\{\Gamma - \mathbb{A}(\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma\big\} + \mathbf{f} - \operatorname{div}\,(I+\mathbb{V})\big\{Q\,I + 2\mathbf{H}_\Phi\big\} + (I+\mathbb{V})\mathbf{f} \ \text{ в } \ Q_T. \tag{5.17}$$

Заметим, что в силу выражения (5.5) уравнение (5.17) не содержит фактора роста $\mathbf{H}$. Тем самым мы исключили фактор роста из линеаризованного уравнения равновесия моментов.

Нашей следующей задачей является исключение фактор роста из линеаризованного уравнения баланса массы – второго уравнения в системе (3.12):

$$\operatorname{div}\,\mathbf{w} - \operatorname{tr}\,\mathbf{H} = Q \ \text{ в } \ Q_T. \tag{5.18}$$

Согласно (5.13), его можно переписать в следующей эквивалентной форме

$$\operatorname{div}\,\mathbf{w} - \operatorname{tr}\,\mathbf{H}_\Gamma = Q + \operatorname{tr}\,\mathbf{H}_\Phi \ \text{ в } \ Q_T. \tag{5.19}$$

Равенство (5.5) очевидным образом влечет за собой соотношение

$$\operatorname{tr}\,\mathbf{H}_\Gamma = \frac{\varkappa}{2}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\,\operatorname{tr}\,\Gamma\,ds.$$

Отсюда и из равенства $\operatorname{tr}\,\Gamma = 2\,\operatorname{div}\,\mathbf{w} + d\pi$ находим

$$\operatorname{tr}\,\Gamma = \varkappa\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\,\operatorname{div}\,\mathbf{w}\,ds + \frac{\varkappa d}{2}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\pi\,ds.$$

Используя это соотношение, мы можем записать уравнение (5.19) в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\,\mathbf{w} - \varkappa\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\operatorname{div}\,\mathbf{w}\,ds - \frac{\varkappa d}{2}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\,\pi\,ds = \\ \operatorname{tr}\,\mathbf{H}_\Phi + Q \ \text{ в } \ Q_T.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Соотношение (5.14) влечет за собой равенство

$$\operatorname{tr}\,\mathbf{H}_\Phi = \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\,\operatorname{tr}\,\Phi\,ds,$$

с учетом которого уравнение (5.20) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\,\mathbf{w} - \varkappa\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\operatorname{div}\,\mathbf{w}\,ds - \frac{\varkappa d}{2}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\,\pi\,ds = \\ \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\,\operatorname{tr}\,\Phi\,ds + Q \ \text{ в } \ Q_T.\end{aligned}$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $d/dt + \varkappa$, получаем

$$\frac{d}{dt}\,\operatorname{div}\,\mathbf{w} - \frac{\varkappa d}{2}\pi = \operatorname{tr}\,\Phi + \frac{d}{dt}Q + \varkappa Q.$$

Интегрируя обе части по временной переменной, окончательно находим

$$\operatorname{div}\,\mathbf{w} - \frac{\varkappa d}{2}\int_0^t \pi\,ds = \int_0^t \operatorname{tr}\,\Phi\,ds + Q + \varkappa\int_0^t Q\,ds. \tag{5.21}$$

Это уравнение не содержит фактора роста. Тем самым мы исключили $\mathbf{H}$ из линеаризованного уравнения баланса массы (5.18). Чтобы завершить вывод расщепленной линеаризованной задачи осталось упростить вид полученного уравнения (5.17).

Дальнейшее преобразование уравнений динамики. Наша дальнейшая цель – преобразование уравнения (5.17) с целью исключения из него операторов $\mathbb{V}$ и $\mathbb{A}$. С этой целью вычислим все члены в этом уравнении, которые содержат $\operatorname{tr}\Gamma$, $\mathbf{H}_\Gamma$, $\mathbf{H}_\Phi$ и $\mathbf{H}_{in}$. Начнем с вычисления $\mathbb{A}(\Gamma-2\mathbf{H}_\Gamma)$. Из выражения (5.5) находим.

$$\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma = \Gamma - \alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Big(\Gamma - \frac{1}{d}\operatorname{tr}\Gamma\, I\Big)\,ds - \frac{\varkappa}{d}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\operatorname{tr}\Gamma\,ds\mathbf{I},$$

что влечет

$$\operatorname{tr}(\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma) = \operatorname{tr}\Gamma - \varkappa\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\operatorname{tr}\Gamma\,ds.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma) \equiv \beta\int_0^t \operatorname{tr}(\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma)\,ds\,I = \\ \beta\int_0^t \operatorname{tr}\Gamma\,ds\,I - \beta\varkappa\int_0^t\Big\{\int_0^s e^{-\varkappa(s-\tau)}\operatorname{tr}\Gamma(\tau)\,d\tau\Big\}\,ds = \\ b\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\operatorname{tr}\Gamma(s)\,ds\,I.\end{aligned}$$

Далее, используя соотношение $\operatorname{tr}\Gamma = 2\operatorname{div}\mathbf{w} + d\pi$, находим

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma) \equiv \beta\int_0^t \operatorname{tr}(\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma)\,ds = \\ 2\beta\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\operatorname{div}\mathbf{w}\,ds\,I + \beta d\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\pi\,ds\,I.\end{aligned}$$

С другой стороны, уравнение (5.21) дает

$$2\operatorname{div}\mathbf{w} = \varkappa d\int_0^t \pi\,ds + 2\int_0^t \operatorname{tr}\Phi\,ds + 2Q + 2\varkappa\int_0^t Q\,ds.$$

Подстановка этого выражения в предыдущее соотношение приводит к равенству

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma) = \\ \beta d\Big\{\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\pi\,ds + \varkappa\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\Big(\int_0^s \pi(\tau)\,d\tau\Big)\,ds\Big\}\,I + \\ 2\beta\Big\{\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}Q\,ds + \varkappa\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\Big(\int_0^s Q(\tau)\,d\tau\Big)\,ds\Big\}\,I + \\ 2\beta\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\Big(\int_0^s \operatorname{tr}\Phi(\tau)\,d\tau\Big)\,ds\,I.\end{aligned}$$

Замечая, что

$$\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)} q\,ds + \varkappa \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\Big(\int_0^s q(\tau)\,d\tau\Big)\,ds = \int_0^t q ds,$$
$$\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)} Q\,ds + \varkappa \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\Big(\int_0^s Q(\tau)\,d\tau\Big)\,ds = \int_0^t Q\,ds.$$

получаем

$$\mathbb{A}(\Gamma - 2\mathbf{H}_\Gamma) = \beta d \int_0^t \pi\,ds\,I + 2\beta\int_0^t Q\,ds\,I + 2\beta \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\Big(\int_0^s \text{ tr } \Phi(\tau)\,d\tau\Big)\,ds\,I. \tag{5.22}$$

Подстановка этого выражения в уравнение (5.17) приводит его к виду

$$\begin{aligned}\text{div } \Big\{\Gamma - \beta d\int_0^t \pi\,ds\,I\Big\} = 2\beta \text{div } \Big\{ \int_0^t Q\,ds I + \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\Big(\int_0^s \text{ tr } \Phi(\tau)\,d\tau\Big)\,ds\,I\Big\} \\ + \text{ div } \Big\{(I+\mathbb{V})\big\{Q\,I + 2\mathbf{H}_\Phi\big\}\Big\} + (I+\mathbb{V})\mathbf{f} \quad \text{в} \quad Q_T\end{aligned} \tag{5.23}$$

Теперь преобразуем все члены этих уравнениях, содержащие Φ . Собирая их вместе получим выражение

$$2\beta \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\Big(\int_0^s \text{ tr } \Phi(\tau)\,d\tau\Big)\,ds\,I + 2(I+\mathbb{V})\mathbf{H}_\Phi$$

Вычислим выражение $(I+\mathbb{V})\mathbf{H}_\Phi$. Имеем

$$\begin{aligned}(I+\mathbb{V})(\mathbf{H}_\Phi) = \mathbf{H}_\Phi + \alpha\int_0^t \mathbf{H}_\Phi = \\ \Big(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\Phi\,ds + \alpha\int_0^t\int_0^s e^{-\alpha(s-\tau)}\,\Phi(\tau)\,d\tau\,ds\Big) - \\ \frac{1}{d}\Big(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \text{ tr } \Phi\,ds + \alpha\int_0^t\int_0^s e^{-\alpha(s-\tau)} \text{tr } \Phi(\tau)\,d\tau\,ds\Big) + \\ \frac{1}{d}\Big(\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)} \text{ tr } \Phi\,ds + a\int_0^t\int_0^s e^{-\varkappa(s-\tau)} \text{tr } \Phi(\tau)\,d\tau\,ds\Big)\end{aligned} \tag{5.24}$$

С учетом тождеств

$$\int_0^t\int_0^s e^{-\alpha(s-\tau)} \text{tr } \Phi(\tau)\,d\tau\,ds = \frac{1}{\alpha}\int_0^t \text{ tr } \Phi\,ds - \frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \text{ tr } \Phi\,ds,$$

$$\int_0^t\int_0^s e^{-\varkappa(s-\tau)} \text{tr } \Phi(\tau)\,d\tau\,ds = \frac{1}{\varkappa}\int_0^t \text{ tr } \Phi\,ds - \frac{1}{\varkappa}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)} \text{ tr } \Phi,\,ds,$$

соотношение (5.24) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(I+\mathbb{V})(\mathbf{H}_\Phi) = \mathbf{H}_\Phi + \alpha\int_0^t \mathbf{H}_\Phi = \\ \int_0^t \Phi\,ds - \frac{1}{d}\int_0^t \text{ tr }\Phi + \\ \frac{1}{d}\frac{\alpha}{\varkappa}\int_0^t \text{ tr }\Phi\,ds + \frac{1}{d}(1-\frac{\alpha}{\varkappa})\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\text{ tr }\Phi\,ds.\end{aligned}$$

Замечая, что $1-\alpha/\varkappa = \beta d/\varkappa$, окончательно получим

$$(I+\mathbb{V})(\mathbf{H}_\Phi) = \int_0^t \Phi\,ds - \frac{\beta}{\varkappa}\int_0^t \text{ tr }\Phi + \frac{\beta}{\varkappa}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\text{ tr }\Phi\,ds. \tag{5.25}$$

Далее имеем

$$2\beta\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\Big(\int_0^s \text{ tr }\Phi(\tau)\,d\tau\Big)\,ds = \frac{2\beta}{\varkappa}\int_0^t \text{ tr }\Phi\,ds - \frac{2\beta}{\varkappa}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\text{ tr }\Phi\,ds.$$

Комбинируя это равенство с равенством (5.25), находим

$$2\beta\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\Big(\int_0^s \text{ tr }\Phi(\tau)\,d\tau\Big)\,ds + 2(I+\mathbb{V})(\mathbf{H}_\Phi) = 2\int_0^t \Phi\,ds. \tag{5.26}$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.23), получим

$$\begin{aligned}\text{div }\big\{\Gamma - bd\int_0^t \pi\,ds\,I\big\} = \text{div }\big\{2\beta\int_0^t Q\,dsI + 2\int_0^t \Phi\,dsI\big\} \\ \text{div }\big\{(I+\mathbb{V})\big\{Q\,I\big\}\big\} + (I+\mathbb{V})\mathbf{f} \ \text{ в } \ Q_T\end{aligned} \tag{5.27}$$

Далее напомним, что

$$2\Phi = \mathbf{G} - \varkappa QI.$$

Отсюда и из равенства $\varkappa = \alpha + \beta d$ следует, что

$$\begin{aligned}2\int_0^t \Phi\,ds + 2\beta\int_0^t Q\,ds\,I + (I+\mathbb{V})(QI) = \\ QI + b(2-d)\int_0^t Q\,dsI + \int_0^t \mathbf{G}\,ds.\end{aligned} \tag{5.28}$$

Подстановка этих соотношений в уравнение (5.27) преобразует его к виду

$$\begin{aligned}\text{div }\big\{\Gamma - \beta d\int_0^t \pi\,ds\,I\big\} = \text{div }\big\{\int_0^t \mathbf{G}\,ds + Q\,I + b(2-d)\int_0^t Q\,dsI\big\} \\ +(I+\mathbb{V})\Big(\mathbf{f}\Big) \ \text{ в } \ Q_T.\end{aligned} \tag{5.29}$$

Применяя аналогичные преобразования к граничному условию в системе (3.12), перепишем его форме

$$\begin{aligned}\big\{\Gamma - \beta d\int_0^t \pi\,ds\,I\big\}\mathbf{n} = \\ \big\{\int_0^t \mathbf{G}\,ds + Q\,I + \beta(2-d)\int_0^t Q\,dsI\big\}\mathbf{n} \\ +(I+\mathbb{V})\Big(\mathbf{h}\Big) \ \text{ на } \ \partial\Omega\times(0,T).\end{aligned} \tag{5.30}$$

Далее, из выражения для Φ следует, что уравнение (5.21) может быть записано в эквивалентной форме

$$\text{div }\mathbf{w}-\frac{\varkappa d}{2}\int_0^t \pi\,ds=\frac{1}{2}\int_0^t(\text{ tr }\mathbf{G}+\varkappa Q)\,ds+Q. \tag{5.31}$$

Если ввести в рассмотрение матричнозначную функцию $\mathbf{M}$ и скалярную функцию $\mathbf{N}$, определенные равенствами

$$\begin{gathered}\mathbf{M}=\int_0^t\mathbf{G}\,ds+Q\,I+\beta(2-d)\int_0^t Q\,dsI,\\ \mathbf{N}=\frac{1}{2}\int_0^t(\text{ tr }\mathbf{G}+\varkappa Q)\,ds+Q,\end{gathered} \tag{5.32}$$

то уравнения (5.29)–(5.31), с учетом равенства

$$\Gamma=\nabla\mathbf{w}+\nabla\mathbf{w}^\top+\pi\,I,$$

могут быть записаны в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}\text{div }\big\{\nabla w+\nabla w^\top+\pi\,I-\beta d\int_0^t\pi\,ds\,I\big\}=\text{div }\mathbf{M}&\\ +(I+\mathbb{V})\mathbf{f}\quad\text{в}\quad Q_T.&\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\text{div }\mathbf{w}-\frac{\varkappa d}{2}\int_0^t\pi\,ds=\mathbf{N}. \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}\big\{\nabla w+\nabla w^\top+\pi\,I-\beta d\int_0^t\pi\,ds\,I\big\}\mathbf{n}=\mathbf{M}\,\mathbf{n}&\\ +(I+\mathbb{V})\mathbf{h}\quad\text{на}\quad\partial\Omega\times(0,T).&\end{aligned} \tag{5.35}$$

Легко видеть, что полученные уравнения совпадают с уравнениями (3.15)–(3.17). Завершая доказательство предложения (3.1), остается дополнить систему (3.15)-(3.17) формулой (5.15) для фактора роста $\mathbf{H}$ и уравнением (3.19) для кососимметрической матрицы Θ.

References

[1] P. Ciarlet, *Mathematical elasticity. Volume I: Three-dimensional elasticity,* Studies in Mathematics and its Applications, **20**, North–Holland, Amsterdam etc., 1988. Zbl 0648.73014

[2] P. Ciarletta, D. Ambrosi, G.A. Maugin, *Mass transport in morphogenetic processes: a second gradient theory for volumetric growth and material remodeling.* J. Mech. Phys. Solids, **60**:3, (2012), 432–450. Zbl 1244.74084

[3] S.C. Cowin, *Tissue growth and remodeling* Annu. Rev. Biomed. Eng., **6** (2004), 77–107.

[4] D. Ebin , R. Saxton , *The initial-value problem for elastodynamics of incompressible bodies,* Arch. Ration. Mech. Anal., **94** (1986), 15–38. Zbl 0599.73012

[5] D. Ebin *Global solutions of the equations of elastodynamics of incompressible neo-Hookean materials,* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **90**:9 (1993), 3802-3805. Zbl 0771.73015

[6] M. Epstein, G. Maugin, *Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies,* Int. J. Plast., **16**:7-8 (2000), 951-978. Zbl 0979.74006

[7] E. Rodriguez, A. Hoger, A. McCulloch, *Stress-dependent finite growth law in soft elastic tissue,* J. Biomech., **27** (1994), 455-467.

[8] R. Skalak, G. Dasgupta, M. Moss, E. Otten, P. Dullemeijer, H. Vilmann, *Analytical description of growth,* J. Theor. Biol. **94**:3 (1982), 555–577. MR0661193

[9] V.A. Solonnikov, *On general boundary problems for systems which are elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg. I,* Am. Math. Soc., Transl., II. Ser., **56** (1964), 193-232. Zbl 0175.11703

[10] T. Valent, *Boundary value problems of finite elasticity. Local theorems on existence, uniqueness, and analytic dependence on data,* Springer Tracts in Natural Philosophy, **31**, Springer-Verlag, New York etc., 1988. Zbl 0648.73019

Plotnikov Pavel Igorevich
Lavrentyev institute of hydrodynamics,
15, Lavrentyeva ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: piplotnikov@mail.ru