

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 1975–1989 (2020)

УДК 517.95

DOI 10.33048/semi.2020.17.133

MSC 35A05

ОДНОМЕРНАЯ МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ ГЕМОДИНАМИКА

А.Е. МАМОНТОВ, Д.А. ПРОКУДИН

ABSTRACT. An overview of various hemodynamic models is given. A model of one-dimensional dynamics of blood as a multicomponent fluid is justified. An initial-boundary value problem is formulated which simulates the flow of blood through a given section of a blood vessel with elastic walls. The transition to Lagrangian variables is made. A result on the global existence of a solution to the problem is formulated.

Keywords: one-dimensional hemodynamics, multicomponent fluid, initial-boundary value problem, mass Lagrangian variables, global existence, flow problem, blood vessel with elastic walls.

В общем случае физические процессы в артериальной системе человека описываются трехмерными нестационарными уравнениями Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости совместно с уравнениями динамики эластичных оболочек сосудов [1]. Однако применение такой сложной многомерной модели требует нахождения решений задач со свободной границей для уравнений Навье–Стокса в сложных областях. Не говоря об очевидной необозримой сложности теоретического анализа подобных моделей, поиск численных решений таких задач связан с огромными вычислительными затратами. Поэтому многомерные модели на практике, как правило, не применяются для глобального описания артериальной системы, а используются упрощенные модели гемодинамики, которые обычно представляют собой нестационарные системы дифференциальных уравнений (обыкновенных или с частными производными). Такие модели позволяют определять не только качественные, но и количественные характеристики движения крови.

МАМОНТОВ, А.Е., ПРОКУДИН, Д.А., ONE-DIMENSIONAL MULTICOMPONENT HEMODYNAMICS.

© 2020 Мамонтов А.Е., Прокудин Д.А.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N 19-11-00069).

Поступила 26 ноября 2020 г., опубликована 3 декабря 2020 г.

Существует множество упрощенных (нестационарных) моделей гемодинамики. Их можно условно разбить на три группы. Наиболее грубым приближением исходной трехмерной (3D) модели являются так называемые модели с сосредоточенными параметрами или «нульмерные» (0D) модели [2]. Суть этих моделей состоит в сопоставлении электрических цепей кровеносной системе. В таком подходе аналогами давления и объемного кровотока являются напряжение и электрический ток, а аналогами сосудов — сопротивления электрической цепи. Вторую группу упрощенных моделей составляют одномерные (1D) модели гемодинамики. Одномерные модели гемодинамики являются, грубо говоря, гидравлическим приближением исходной 3D-модели и получаются ее усреднением по «поперечному» направлению. Что касается 0D-моделей, то они получаются дальнейшим усреднением 1D-моделей по длине сосуда [2], [3]. Наконец, третью группу упрощенных моделей составляют так называемые модели многих масштабов [2], [3] или гибридные модели. Они представляют собой разумную стыковку 3D- и 1D-моделей, 1D- и 0D-моделей, 3D- и 0D-моделей, 2D- и 1D-моделей и т. п.

Мы будем рассматривать одномерную модель гемодинамики. Впервые одномерное приближение гемодинамики было предложено Эйлером [4]. Мы будем иметь дело с одномерной моделью гемодинамики, предложенной в работах [5], [6], [7], [8], [9]. При этом мы сформулируем и изучим обобщение этой модели с целью учета многокомпонентности крови.

1. ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ КРОВИ КАК ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим подробнее одномерные модели, описывающие течение крови в артериях и ее взаимодействие с подвижными стенками. Пусть t — время, а (x, y, z) — декартовы координаты. Будем считать, что идеализацией артерии является эластичная трубка в виде прямого кругового цилиндра, ось которого совпадает с осью z . Этот цилиндр имеет переменное сечение ввиду перепадов давления и вызванных ими колебаний стенок. В расслабленном состоянии радиус сечения также, вообще говоря, может меняться вдоль сосуда, но в простейшем приближении можно считать его постоянным.

Рассмотрим кусок этой трубки длины $L = \text{const}$ от $z = z_1$ до $z = z_2$ (см. рис. 1).

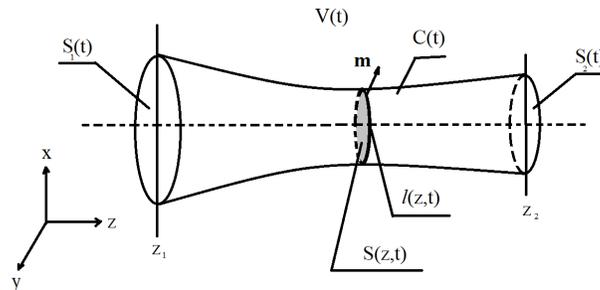


Рис. 1. Упрощенная геометрия кровеносного сосуда.

Через $V(t)$ мы будем обозначать пространственную область, которая является указанной трубкой, заполненной кровью, а через $C(t)$, $S_1(t)$ и $S_2(t)$ — боковую поверхность и основания цилиндра $V(t)$. Область $V(t)$ меняется со временем под воздействием пульсирующей жидкости (крови). Осевое сечение $\{z = \text{const}\}$ цилиндра $V(t)$ будем обозначать через $S = S(z, t)$, а его границу через $l(z, t)$. Через $A = A(z, t)$ мы будем обозначать площадь осевого сечения $S(z, t)$. Также обозначим через \mathbf{m} единичный вектор внешней нормали к l .

1.1. Первая модель. Рассматриваемая одномерная модель гемодинамики описывается при помощи следующей системы уравнений с частными производными [5], [6], [7], [8], [9]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial(A\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(A\rho\bar{u}_z)}{\partial z} = 0,$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial(A\rho\bar{u}_z)}{\partial t} + \frac{\partial(A\rho\bar{u}_z^2)}{\partial z} + A\frac{\partial p}{\partial z} = A\rho f_z + \nu \oint_l \left(\frac{\partial u_z}{\partial \mathbf{m}} \right) dl + A\nu \overline{\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)},$$

в которой $\rho = \text{const} > 0$ — плотность крови; u_z — осевая компонента скорости (считается, что компоненты скоростей, ортогональные оси z , являются пренебрежимо малыми по сравнению с u_z); p — давление; f_z — внешняя массовая сила, действующая в осевом направлении; ν — коэффициент вязкости; черта сверху во втором слагаемом в левой части (1.1), в первом и втором слагаемых в левой части (1.2), а также в последнем слагаемом в правой части (1.2) означает следующую операцию (усреднение):

$$(1.3) \quad \bar{\xi} = \frac{1}{A} \int_S \xi dS.$$

Введем также следующее обозначение:

$$(1.4) \quad Q = A\bar{u}_z.$$

Используя приближенные равенства

$$(1.5) \quad \frac{\nu}{\rho} \oint_l \left(\frac{\partial u_z}{\partial \mathbf{m}} \right) dl \approx \frac{2\pi a}{\rho} \tau_w, \quad \frac{\partial(A\bar{u}_z^2)}{\partial z} \approx \frac{\partial}{\partial z} \left(\delta_1 \frac{Q^2}{A} \right)$$

и равенство

$$(1.6) \quad A\nu \overline{\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)} = \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \quad \left(u_z|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{r=a} = 0 \right),$$

где

$$(1.7) \quad \tau_w = \frac{-2\nu}{(1-\zeta_c)a} \frac{Q}{A} + \frac{a}{4}(1-\zeta_c) \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \zeta_c = \left(\max \left(0, 1 - \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \right) \right)^2,$$

$$\delta_1 = \frac{2 - 2\zeta_c(1 - \ln \zeta_c)}{(1 - \zeta_c)^2},$$

a — локальный радиус, τ_w — напряжение сдвига стенки, α — число Уомерсли, из уравнений (1.1) и (1.2) тогда получаем систему уравнений

$$(1.8) \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

$$(1.9) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\delta_1 \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Af_z + \frac{2\pi a}{\rho} \tau_w + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}.$$

1.2. **Вторая модель.** Приведем еще один вариант одномерной модели гемодинамики [3]:

$$(1.10) \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

$$(1.11) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha_1 \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A} = Af_z,$$

где α_1 — коэффициент Кориолиса, K_R — зависящий от вязкости коэффициент сопротивления.

1.3. **Замыкание моделей.** Для замыкания системы (1.8), (1.9) (или системы (1.10), (1.11)) необходимо использовать уравнение состояния для давления. Для системы (1.8), (1.9) уравнение состояния для давления берется в виде [6], [7], [8]

$$(1.12) \quad p(z, t) = \tilde{p}(A(z, t), z, t).$$

Например, в виде [8]

$$(1.13) \quad p(z, t) = E_s(z) \frac{h(z)}{r_0(z)} \left(1 - \left(\frac{A_0(z)}{A(z, t)} \right)^{1/2} \right),$$

где $E_s(z)$ — статический модуль, $h(z)$ — толщина стенки, $r_0(z)$ — радиус нулевого давления, $A_0(z)$ — площадь нулевого давления.

Для системы (1.10), (1.11) уравнение состояния для давления берется в виде [3], [10]

$$(1.14) \quad p = p_{\text{ext}} + \rho_\omega h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \tilde{\gamma} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \tilde{a} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \tilde{c} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial z^2} + G(\eta),$$

где η — величина отклонения положения стенки от начального состояния, p_{ext} — давление на стенку сосуда извне, ρ_ω — плотность материала стенки, h_0 — толщина стенки, $\tilde{\gamma}$ отвечает за взаимодействие стенки с жидкостью, \tilde{a} характеризует продольные напряжения стенки, \tilde{c} характеризует вязкоупругие свойства стенки, $G(\eta) = b\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3$ — функция, задающая нелинейную упругую реакцию стенки, b, b_2, b_3 — числовые коэффициенты.

Второй член в правой части (1.14), определяющий инерцию, пропорционален ускорению стенки, третий — вязкоупругий член, пропорциональный скорости перемещения стенки, четвертый член соответствует продольному предварительному напряженному состоянию сосуда, пятый — еще один вязкоупругий член, шестой — функция упругой реакции стенки.

Примем, что $A = \pi(\eta + R_0)^2$, $q = \frac{Q}{\pi}$ и перепишем уравнения (1.10), (1.11) в следующем виде:

$$(1.15) \quad \frac{\partial(\eta + R_0)^2}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

$$(1.16) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q}{\eta + R_0} \right)^2 + \frac{K_R}{\pi} \frac{q}{(\eta + R_0)^2} + \\ + \frac{(\eta + R_0)^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(p_{\text{ext}} + \rho_\omega h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \tilde{\gamma} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \tilde{a} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \tilde{c} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial z^2} + G(\eta) \right) = \\ = (\eta + R_0)^2 f_z.$$

2. ДИНАМИКА КРОВИ КАК МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим следующее обобщение (первой) одномерной модели гемодинамики (обобщение системы (1.8), (1.9)) с учетом многокомпонентности крови (более точно, будем считать, что кровь состоит из N компонент) [11], [12] ($i = 1, \dots, N$):

$$(2.1) \quad \frac{\partial(A\rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial(A\rho_i \bar{u}_{zi})}{\partial z} = 0,$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial(A\rho_i \bar{u}_{zi})}{\partial t} + \frac{\partial(A\rho_i \bar{u}_{zi}^2)}{\partial z} + A \frac{\partial p_i}{\partial z} = \\ = A\rho_i f_{zi} + \sum_{j=1}^N a_{ij} (\bar{u}_{zj} - \bar{u}_{zi}) + \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \oint_l \left(\frac{\partial u_{zj}}{\partial \mathbf{m}} \right) dl + A \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \overline{\left(\frac{\partial^2 u_{zj}}{\partial z^2} \right)},$$

в которой ρ_i — плотность i -й компоненты; u_{zi} — осевая компонента скорости i -й составляющей; p_i — давление в i -й компоненте; f_{zi} — внешняя массовая сила, действующая на i -ю компоненту в осевом направлении; ν_{ij} — коэффициенты вязкостей, которые образуют симметричную матрицу $\mathbf{N} > 0$, $a_{ij} \geq 0$ — коэффициенты обмена импульсом, которые образуют симметричную матрицу.

Для системы (2.1)–(2.2) стандартным образом могут быть сформулированы начально-краевые задачи. Анализ одного варианта задачи (с некоторыми вариациями самой модели) приводится далее.

3. МОДИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ

Изложим ряд уточняющих соображений и предположений к модели (2.1), (2.2) (то есть к многокомпонентному аналогу (1.8), (1.9)).

3.1. Малость поперечных изменений. Отметим что для произвольной величины f имеем (см. (1.3))

$$f^2 - \bar{f}^2 = (f - \bar{f})^2 + 2\bar{f}(f - \bar{f}),$$

откуда

$$\overline{f^2} - \bar{f}^2 = \overline{(f - \bar{f})^2}.$$

Если f слабо зависит от x, y (предельный случай — зависит только от t и z), то есть $f - \bar{f}$ мало по сравнению с f , то это позволяет считать приближенно равными величины \bar{f}^2 и $\overline{f^2}$. Кроме того, величиной

$$\oint_l \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{m}} \right) dl = \int_S \Delta_{x,y} f dS$$

в этом случае также можно пренебречь.

Таким образом, если предположить слабую зависимость продольных скоростей u_{zi} от поперечных переменных x, y , то третье слагаемое в правой части (2.2) можно опустить, а во втором слагаемом в левой части заменить $\overline{u_{zi}^2}$ на $\overline{u_{zi}^2}$.

3.2. Коммутация усреднений и производных по z . Несложно проверить соотношение

$$\frac{\partial}{\partial z}(A\bar{f}) = A\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)},$$

справедливое для любой величины f , обращающейся в нуль на l . Другими словами, на таких величинах операции $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\int_S(\cdot)dS$ коммутируют. В частности,

ввиду предположений (1.6) в качестве f можно взять u_{zi} и $\frac{\partial u_{zi}}{\partial z}$, в результате чего получим

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(A\bar{u}_{zi}) = A\overline{\left(\frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial z^2}\right)}.$$

Таким образом, последнее слагаемое в правой части (2.2) можно записать в виде

$$(3.1) \quad \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(A\bar{u}_{zj}).$$

3.3. Уточнение определяющих уравнений для площади сечения и давления. Будем предполагать, что

$$(3.2) \quad A = \psi(p), \quad p = \sum_{i=1}^N p_i,$$

где функция ψ задана. Функция ψ может, например, иметь вид как в (1.13):

$$(3.3) \quad p = E_s h \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{A_0}} - \frac{1}{\sqrt{A}} \right), \quad A = \left(A_0^{-1/2} - \frac{p}{E_s h \sqrt{\pi}} \right)^{-2},$$

где величины $E_s > 0$ и $h > 0$ заданы и для простоты предполагаются постоянными. Отметим характерные особенности определяющих уравнений (3.3):

- (1) Давление p принимает значения от 0 до $p_* = E_s h \sqrt{\frac{\pi}{A_0}} > 0$, а площадь сечения A принимает значения от $A_0 > 0$ до $+\infty$ (далее для простоты считаем A_0 постоянной, т. е. не зависящей от продольной координаты z).
- (2) Зависимость между p и A монотонна, то есть ψ монотонно возрастает и имеет монотонную обратную.

Соотношения (3.3) могут заменяться иными, но с сохранением перечисленных особенностей, имеющих физический смысл.

3.4. Уточнение определяющих уравнений для давлений и плотностей. Будем предполагать, что

$$(3.4) \quad p_i = \xi_i p, \quad p = \varphi(\rho), \quad \rho = \sum_{i=1}^N \rho_i, \quad \xi_i = \frac{\rho_i}{\rho},$$

где функция φ задана, и введены обозначения для плотности крови ρ и концентраций компонент ξ_i . Поскольку кровь является жидкостью, то предполагаются следующие свойства φ :

- (1) Плотность ρ принимает значения от $\rho_* > 0$ до $\rho^* > \rho_*$, а давление p принимает значения от 0 до $+\infty$.
- (2) Зависимость между p и ρ монотонна, то есть φ монотонно возрастает и имеет монотонную обратную.

Указанные свойства могут быть учтены, например, при помощи следующего модельного уравнения:

$$(3.5) \quad \varphi(\rho) = \frac{\rho - \rho_*}{\rho^* - \rho} (\rho^* - \rho_*) c^2,$$

где $c > 0$ — скорость звука в слабо сжатой жидкости:

$$(3.6) \quad \varphi'(\rho_*) = c^2.$$

Уравнение (3.5) может заменяться иными, но с сохранением указанных свойств и обозначения (3.6).

3.5. Малость давлений и растяжений стенок. Будем предполагать, что давление крови невелико, и соответственно малы отклонения радиуса сосуда от нерастянутого состояния и плотности от несжатого состояния. Запишем эти факты в следующем виде:

$$(3.7) \quad \rho = \rho_* + \delta\rho, \quad A = A_0 + \delta A, \quad p = \delta p,$$

где все величины с символом δ достаточно малы и неотрицательны. Тогда легко находим

$$(3.8) \quad \delta A = k \delta p, \quad \delta p = c^2 \delta \rho,$$

где $k = \psi'(0) > 0$. Например, в (3.3) верно $k = \frac{2A_0^{3/2}}{E_s h \sqrt{\pi}}$. Отметим, что каких-либо ограничений (малости) на кинематику течения априори не налагается, а также не ограничиваются изменения концентраций ξ_i .

Ввиду (3.8) получаем

$$(3.9) \quad A \frac{\partial p_i}{\partial z} \simeq c^2 \frac{\partial}{\partial z} (A \rho_i - A \xi_i \rho_*).$$

3.6. Дополнительные упрощающие предположения. Примем следующие упрощения (не вытекающие из (3.7)):

- (1) В (3.1) заменим A на A_0 . Это возможно, например, в предположении о том что вязкие силы достаточно малы, по крайней мере того же порядка что и малые величины в (3.7).
- (2) В (3.9) отбросим выражение $A \xi_i \rho_*$. Это возможно, например, в предположении о том что изменения толщины сосуда и концентраций происходят достаточно медленно по длине сосуда.

Все эти ограничения могут быть описаны как длинноволновое приближение.

3.7. Формулировка системы уравнений. Обозначим

$$(3.10) \quad \tilde{\rho}_i = A\rho_i, \quad \tilde{u}_i = \bar{u}_{zi}, \quad \tilde{f}_i = f_{zi}, \quad \tilde{\nu}_{ij} = A_0\nu_{ij}, \quad \tilde{p}_i = c_i^2\tilde{\rho}_i.$$

Тогда с учетом вышеизложенных предположений и соотношений система (2.1), (2.2) запишется в виде

$$(3.11) \quad \frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\rho}_i \tilde{u}_i)}{\partial z} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$(3.12) \quad \frac{\partial(\tilde{\rho}_i \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\rho}_i \tilde{u}_i^2)}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial z} = \sum_{j=1}^N a_{ij}(\tilde{u}_j - \tilde{u}_i) + \sum_{j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial z^2} + \tilde{\rho}_i \tilde{f}_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Эта система совпадает математически с системой уравнений баротропного движения многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей с линейной связью давлений и плотностей, но входящие в нее величины имеют несколько иной физический смысл. В связи с этим имеются следующие особенности:

- (1) Должно выполняться ограничение

$$\tilde{\rho} := \sum_{i=1}^N \tilde{\rho}_i \geq A_0\rho_*,$$

то есть для входных данных это условие должно налагаться, и для решения доказываться. Кроме того, должны обеспечиваться ограничения сверху на плотности и давления для проверки априорных предположений малости (см. раздел 3.5) и физических ограничений (см. разделы 3.3 и 3.4).

- (2) При решении (3.11), (3.12) вычисляются только линейные плотности $\tilde{\rho}_i$, а не отдельно сечение A и объемные плотности ρ_i . После решения задачи можно найти A , воспользовавшись (3.8):

$$A - A_0 = kc^2 \left(\frac{\tilde{\rho}}{A} - \rho_* \right).$$

Решая (приближенно ввиду малости величины $\delta A = A - A_0$) это уравнение, находим

$$A = A_0 + A_0 \frac{\tilde{\rho} - A_0\rho_*}{\tilde{\rho} + \frac{A_0^2}{kc^2}}.$$

После этого находятся и остальные физические параметры течения (давления и плотности крови в целом и ее компонент, концентрации, растяжение стенок).

4. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА КЛАССОВ РЕШЕНИЙ

Систему уравнений (3.11), (3.12) будем рассматривать при $0 < z < L$, $0 < t < T$, где длина участка сосуда $L > 0$ и промежуток времени $T > 0$ заданы.

4.1. Начально-краевая задача. В начальный момент времени заданы скорости и линейные плотности компонент:

$$(4.1) \quad \tilde{\rho}_i|_{t=0} = \tilde{\rho}_{0i}, \quad \tilde{u}_i|_{t=0} = \tilde{u}_{0i}.$$

Скорость втекания крови в участок сосуда и вытекания предполагается заданной:

$$(4.2) \quad \tilde{u}_i|_{z=0,L} = V,$$

где $V > 0$. Кроме того, следует задать плотности на входе:

$$(4.3) \quad \tilde{\rho}_i|_{z=0} = \beta_i,$$

где $\beta_i \geq 0$, причем $\sum_{i=1}^N \beta_i \geq A_0 \rho_*$.

Для простоты можно было бы начать изучение с модельного (хотя и не имеющего прикладного смысла) случая $V = 0$, тогда условие (4.3) не нужно. Но на практике задача протекания изучена (в однокомпонентном случае) в [13], и нет необходимости в упрощении. Вообще говоря, величина V может быть переменной (зависеть от t), причем различной на входе и выходе:

$$(4.4) \quad \tilde{u}_i|_{z=0} = V_1 > 0, \quad \tilde{u}_i|_{z=L} = V_2 \geq 0.$$

При этом у каждой компоненты эти скорости могли бы быть своими, но эта общность представляется малоинтересной по смыслу задачи (отклонения скоростей компонент от средней скорости потока малы по сравнению со средней скоростью, а на концах ими можно пока пренебречь для простоты). Другими словами, эффект разности скоростей компонент (и как следствие изменение концентраций со временем на разных участках) предполагается достигать за счет внутренних механизмов течения¹, а не за счет управления на концах.

Далее будем действовать по аналогии с [13], где задача протекания (в однокомпонентном случае) изучена под названием задачи 1.

4.2. Схема решения. Задачу (3.11), (3.12), (4.1), (4.4), (4.3) назовем Задачей А. Локальное существование классического решения Задачи А получается комбинацией аргументов работ [13], [14], [15], [16]. Следовательно, доказательство глобального существования классического решения сводится к получению соответствующих априорных оценок. О существовании и единственности (подходящим образом определенного) сильного обобщенного решения можно будет сказать отдельно, также по аналогии с рассуждениями из [13].

Пусть задано число $\alpha \in (0, 1)$. Будем предполагать что входные данные Задачи А удовлетворяют следующим требованиям:

$$(4.5) \quad \tilde{u}_{0i} \in C^{2+\alpha}(0, L), \quad \tilde{\rho}_{0i} \in C^{1+\alpha}(0, L), \quad V_{1,2} \in C^{1+\alpha/2}(0, T), \quad \beta_i \in C^2(0, T),$$

$$(4.6) \quad \tilde{u}_{0i}(0) = V_1(0), \quad \tilde{u}_{0i}(L) = V_2(0), \quad \tilde{\rho}_{0i}(0) = \beta_i(0),$$

$$(4.7) \quad V_1 > 0, \quad \tilde{\rho}_{0i} > 0, \quad \beta_i > 0,$$

тогда в частности

$$(4.8) \quad 0 < m_0 \leq (V_1, \tilde{\rho}_{0i}, \beta_i) \leq M_0 < +\infty$$

¹Впрочем, этот эффект в полноте ожидается только при переменных $A_0(z)$, пока же мы предположили постоянство A_0 .

с некоторыми постоянными m_0 и M_0 . Кроме того, предполагаются условия согласования первого порядка в точках $(0, 0)$ и $(L, 0)$.

Наша цель — показать существование решения Задачи А класса

$$(4.9) \quad \tilde{u}_i \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T), \quad \tilde{\rho}_i \in C^{1+\alpha, (3+\alpha)/2}(Q_T), \quad \tilde{\rho}_i > 0,$$

где $Q_T = (0, L) \times (0, T)$.

5. ЛАГРАНЖЕВЫ ПЕРЕМЕННЫЕ

Ввиду локальной классической разрешимости (т. е. в классе (4.9), где вместо T стоит достаточно малое число) при условиях (4.5)–(4.7), и по крайней мере при достаточно малых t , корректна следующая схема перехода к лагранжевой постановке.

5.1. Массовые лагранжевы координаты. При любых $(\tau, z, t) \in (0, T) \times (0, L) \times (0, T)$ определим величину $\chi_i(\tau, z, t)$ как решение задачи Коши

$$(5.1) \quad \frac{\partial \chi_i}{\partial \tau} = \tilde{u}_i(\chi_i, \tau), \quad \chi_i(t, z, t) = z$$

(объемная лагранжева координата). Обозначим $z_{i*}(t) = \chi_i(t, 0, 0)$ — координата материальной частицы i -й компоненты, стартующей в начальный момент в левом конце области течения. Тогда $Q_T = Q_{i-} \cup Q_{i+} \cup s_i$, где

$$Q_{i-} = \{ (z, t) \in Q_T \mid z < z_{i*}(t) \},$$

$$Q_{i+} = \{ (z, t) \in Q_T \mid z > z_{i*}(t) \},$$

$$s_i = \{ (z, t) \in Q_T \mid z = z_{i*}(t) \}.$$

В дальнейшем нам временно потребуется разбиение на 2 случая:

Случай 1*i*. $z_{i*}(T) = L_{i*} \leq L$ — время T достаточно мало, так что материальная частица i -й компоненты, стартующая в начальный момент в левом конце области течения, не успевает ее покинуть.

Случай 2*i*. $z_{i*}(t_{i*}) = L$ при некотором $t_{i*} < T$ — противоположная ситуация (достаточно большое время и/или короткий сосуд).

5.2. Область определяемая втеканием. В области Q_{i-} вводим массовую лагранжеву координату x_i по следующему алгоритму. Найдем сначала $\xi_i \in (0, T)$, при котором

$$(5.2) \quad \chi_i(\xi_i, z, t) = 0,$$

после чего положим

$$(5.3) \quad x_i = - \int_0^{\xi_i} \beta_i(\tau) V_1(\tau) d\tau.$$

Таким образом, в области Q_{i-} эйлерова система координат (z, t) при каждом i может быть заменена на массовые лагранжевы координаты (x_i, t) , при этом сначала по формуле (5.2) формируется величина $\xi_i(z, t)$, а затем по формуле (5.3) ξ_i переходит в x_i . Пересчитаем производные произвольной величины $\alpha(t, z) = \gamma(t, x_i)$ в двух системах координат.

С одной стороны, имеем очевидные соотношения

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial z},$$

из которых легко выражаем

$$(5.4) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\frac{\partial x_i}{\partial t}}{\frac{\partial x_i}{\partial z}}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial z}}{\frac{\partial x_i}{\partial z}}.$$

С другой стороны, из (5.2) имеем

$$(5.5) \quad \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \frac{\partial \chi_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial z} + \frac{\partial \chi_i}{\partial z} = 0 \quad \text{при } \tau = \xi_i,$$

откуда

$$(5.6) \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = -\frac{\frac{\partial \chi_i}{\partial t}}{\frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_i}}, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial \chi_i}{\partial z}}{\frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_i}} \quad \text{при } \tau = \xi_i.$$

Кроме того, из (5.3) видим что

$$(5.7) \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = -\beta_i(\xi_i) V_1(\xi_i) \frac{\partial \xi_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial z} = -\beta_i(\xi_i) V_1(\xi_i) \frac{\partial \xi_i}{\partial z}.$$

Наконец, дифференцируя (5.1) по z , получаем задачу Коши

$$(5.8) \quad \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial \tau \partial z}(\tau, z, t) = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial z}(\chi_i(\tau, z, t), \tau) \frac{\partial \chi_i}{\partial z}(\tau, z, t), \quad \frac{\partial \chi_i}{\partial z}(t, z, t) = 1,$$

решая которую находим

$$(5.9) \quad \frac{\partial \chi_i}{\partial z}(\tau, z, t) = \exp \left(\int_t^\tau \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial z}(\chi_i(s, z, t), s) ds \right),$$

а дифференцируя (5.1) по t , получаем задачу Коши

$$(5.10) \quad \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial \tau \partial t}(\tau, z, t) = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial z}(\chi_i(\tau, z, t), \tau) \frac{\partial \chi_i}{\partial t}(\tau, z, t),$$

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial t}(t, z, t) = -\frac{\partial \chi_i}{\partial \tau}(t, z, t) = -\tilde{u}_i(z, t),$$

решая которую находим

$$(5.11) \quad \frac{\partial \chi_i}{\partial t}(\tau, z, t) = -\tilde{u}_i(z, t) \exp \left(\int_t^\tau \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial z}(\chi_i(s, z, t), s) ds \right).$$

В результате из (5.6), (5.7), (5.9), (5.11) и (5.4) получаем

$$(5.12) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \tilde{u}_i(z, t) \frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

Далее, для величины $\hat{\rho}_i(\tau, z, t) = \tilde{\rho}_i(\tau, \chi_i(\tau, z, t))$ имеем начальные данные $\hat{\rho}_i(\xi_i, z, t) = \beta_i(\xi_i)$ и уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{\rho}_i(\tau, z, t) &= \frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial \tau}(\tau, \chi_i(\tau, z, t)) + \frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial z}(\tau, \chi_i(\tau, z, t)) \frac{\partial \chi_i}{\partial \tau}(\tau, z, t) = \\ &= -\hat{\rho}_i(\tau, z, t) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial z}(\tau, \chi_i(\tau, z, t)) \end{aligned}$$

(здесь использовано (3.11) и (5.1)). Решая эту задачу Коши, находим $\widehat{\rho}_i(\tau, z, t)$, и при $\tau = t$ получаем

$$(5.13) \quad \exp \left(\int_{\xi_i}^t \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial z} (\chi_i(\tau, z, t), \tau) d\tau \right) = \frac{\beta_i(\xi_i)}{\widetilde{\rho}_i(t, z)}.$$

Теперь ввиду (4.4), (5.1), (5.2), (5.4), (5.6), (5.7), (5.9), (5.13) окончательно находим

$$(5.14) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = \frac{1}{\widetilde{\rho}_i(t, z)} \frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

В результате система (3.11), (3.12) в новой системе координат примет вид

$$(5.15) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \rho_i^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$(5.16) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^N \frac{a_{ij}}{\rho_i} (u_j - u_i) + \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + f_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где все величины без волн являются соответствующими величинами с волнами, пересчитанными в новых координатах (а у коэффициентов вязкости волны убраны для единообразия).

Остается указать, во что отображается область Q_{i-} при описанной замене переменных. По определению χ_i имеем $\chi_i(\tau, \beta, \alpha) = \chi_i(\tau, \chi_i(\gamma, \beta, \alpha), \gamma)$, и в частности

$$\chi_i(\xi_i, z_{i*}(t), t) = \chi_i(\xi_i, \chi_i(t, 0, 0), t) = \chi_i(\xi_i, 0, 0) = z_{i*}(\xi_i).$$

В частности, при $\xi_i = 0$ получаем $\chi_i(0, z_{i*}(t), t) = 0$, т. е. $\xi_i(z_{i*}(t), t) = 0$, т. е.

$$(5.17) \quad z = z_{i*}(t) \iff \xi_i = 0 \iff x_i = 0.$$

С другой стороны, при $z = 0$ имеем $\chi_i(\xi_i, 0, t) = 0$, что означает одновременное выполнение соотношения $\chi_i = 0$ и при $\tau = \xi_i$, и при $\tau = t$, откуда получаем $\xi_i = t$, то есть

$$(5.18) \quad x_i = a_i(t) := - \int_0^t \beta_i(\tau) V_1(\tau) d\tau.$$

Итак, в лагранжевой системе координат Q_{i-} превращается в область $0 < t < T$, $a_i(t) < x_i < 0$.

5.3. Область определяемая начальными данными. Для любой точки $(z, t) \in Q_{i+}$ положим

$$(5.19) \quad x_i = \int_0^{\chi_i(0, z, t)} \widetilde{\rho}_{0i}(s) ds.$$

Тогда

$$(5.20) \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = \widetilde{\rho}_{0i}(\chi_i(0, z, t)) \frac{\partial \chi_i}{\partial t}(0, z, t), \quad \frac{\partial x_i}{\partial z} = \widetilde{\rho}_{0i}(\chi_i(0, z, t)) \frac{\partial \chi_i}{\partial z}(0, z, t),$$

что снова дает (5.12).

Для величины $\widehat{\rho}_i(\tau, z, t) = \widetilde{\rho}_i(\tau, \chi_i(\tau, z, t))$ теперь имеем начальные данные $\widehat{\rho}_i(0, z, t) = \widetilde{\rho}_{0i}(\chi_i(0, z, t))$ и по-прежнему то же уравнение, что и ранее; решая получившуюся задачу Коши, находим при $\tau = t$

$$\widehat{\rho}_i(t, z, t) = \widetilde{\rho}_{0i}(\chi_i(0, z, t)) \exp \left(- \int_0^t \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial z}(\chi_i(s, z, t), s) ds \right).$$

Ввиду (5.4), (5.9), (5.20) снова получаем (5.14), что приводит к той же системе уравнений (5.15), (5.16). Остается указать, во что отображается область Q_{i+} при описанной замене переменных. По-прежнему верно (5.17), то есть следует отдельно рассмотреть случай $z = L$. Нужно понять, во что переходит точка вида (L, t) при замене переменных. Здесь возможны два варианта.

Вариант 1 (реализуется всегда в случае $1i$, или же в случае $2i$ при условии $t < t_{i*}$). Тогда точке (L, t) соответствует

$$x_i = \int_0^{\chi_i(0, L, t)} \widetilde{\rho}_{0i}(s) ds.$$

Уравнение (3.11) запишем в виде

$$(5.21) \quad \operatorname{div}_{\tau, z}(\widetilde{\rho}_i, \widetilde{\rho}_i \widetilde{u}_i) = 0$$

и проинтегрируем по области $0 < \tau < t$, $\chi_i(\tau, L, t) < z < L$. Интеграл по криволинейной части границы исчезает ввиду (5.1), и получаем

$$\int_0^t \widetilde{\rho}_i(L, \tau) V_2(\tau) d\tau = \int_{\chi_i(0, L, t)}^L \widetilde{\rho}_{0i}(z) dz = M_i - \int_0^{\chi_i(0, L, t)} \widetilde{\rho}_{0i}(z) dz,$$

где

$$(5.22) \quad M_i = \int_0^L \widetilde{\rho}_{0i}(z) dz.$$

Таким образом, правая граница $z = L$ принимает вид

$$(5.23) \quad x_i = b_i(t) := M_i - \int_0^t \widetilde{\rho}_i(L, \tau) V_2(\tau) d\tau.$$

Вариант 2 (реализуется в случае $2i$ при условии $t > t_{i*}$). Тогда точке (L, t) соответствует

$$(5.24) \quad x_i = - \int_0^{\xi_i} \beta_i(\tau) V_1(\tau) d\tau,$$

где $\chi_i(\xi_i, L, t) = 0$. Проинтегрируем (5.21) по области $0 < z < L$, $0 < \tau < \tau_{i*}(z)$, где $\chi_i(\tau_{i*}(z), L, t) = z$. Интеграл по криволинейной части границы снова исчезает ввиду (5.1), и (5.24) превращается опять в (5.23).

5.4. Постановка в задачи в лагранжевых координатах. Таким образом, в любом случае область течения в лагранжевых координатах принимает вид

$$(5.25) \quad Q_T^i = \{ 0 < t < T, a_i(t) < x_i < b_i(t) \}.$$

При этом $a_i(t) < 0$ известны заранее и задаются формулой (5.18), а $b_i(t)$ задаются формулой (5.23), которую после перехода к лагранжевой системе следует записать в виде

$$(5.26) \quad b_i(t) = M_i - \int_0^t \rho_i(b_i(\tau), \tau) V_2(\tau) d\tau,$$

где известная величина M_i определена в (5.22), а (5.26) является уравнением для заранее неизвестной правой границы. Отметим что $b_i(t) > 0$ при $t < t_{i*}$, а далее (что реализуется в случае 2i) $b_i(t)$ меняет знак.

В области Q_T^i ищется классическое решение системы (5.15), (5.16). Требуется выполнение начальных

$$(5.27) \quad \rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}, \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}, \quad 0 < x_i < M_i$$

и граничных

$$(5.28) \quad \begin{aligned} u_i(a_i(t), t) = V_1(t) > 0, \quad u_i(b_i(t), t) = V_2(t) \geq 0, \\ \rho_i(a_i(t), t) = \beta_i(t), \quad 0 < t < T \end{aligned}$$

условий.

6. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Действуя аналогично [13], можно получить следующий результат.

Теорема. Пусть выполнены условия на входные данные Задачи А, перечисленные в разделе 4.2. Тогда существует единственное классическое решение Задачи А в классе (4.9).

REFERENCES

- [1] T.J. Pedley, *The fluid mechanics of large blood vessels*, Cambridge University Press, Cambridge etc., 1980. Zbl 0449.76100
- [2] L. Formaggia, A. Veneziani, *Reduced and multiscale models for the human cardiovascular system*, Politecnico di Milano, Milan, 2003.
- [3] A. Quarteroni, L. Formaggia, *Mathematical modelling and numerical simulation of the cardio-vascular system*, Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [4] L. Euler, *Principia pro motu sanguinis per arterias determinando*, Euler Archive — All Works, **855** (1862), <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/855>.
- [5] Thomas J.R. Hughes, J. Lubliner, *On the one-dimensional theory of blood flow in the larger vessels*, Math. Biosci., **18** (1973), 161–170. Zbl 0262.92004
- [6] D. Bessems, M. Rutten, F.N. van de Vosse, *A wave propagation model of blood flow in large vessels using an approximate velocity profile function*, J. Fluid Mech., **580** (2007), 145–168. Zbl 1175.76171
- [7] D. Bessems, C.G. Giannopapa, M.C. Rutten, F.N. van de Vosse, *Experimental validation of a time-domain-based wave propagation model of blood flow in viscoelastic vessels*, J. Biomech., **41** (2008), 284–291.
- [8] R. Raghu, I.Vignon-Clementel, C.A. Figueroa, C. Taylor, *Comparative study of viscoelastic arterial wall models in nonlinear one-dimensional finite element simulations of blood flow*, J. Biomech. Eng., **133**:8 (2011), Article 081003.

- [9] G. Mulder, A. Marzo, A.C.B. Bogaerds, S.C. Coley, P. Rongen, D.R. Hose, F.N. van de Vosse, *Patient-specific modeling of cerebral blood flow geometrical variations in a 1d model*, Cardiovascular Engineering and Technology, **2** (2011), 334–348.
- [10] A.M. Barlukova, A.A. Cherevko, A.P. Chupakhin, *Traveling waves in a one-dimensional model of hemodynamics*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **55**:6 (2014), 917–926. Zbl 1329.76411
- [11] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the equations of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multicomponents*, J. Math. Fluid Mech., **21**:1 (2019), Article 9. Zbl 1411.76150
- [12] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of a problem for the equations of the dynamics of one-temperature mixtures of heat-conducting viscous compressible fluids*, Dokl. Math., **99**:3 (2019), 273–276. Zbl 1428.35386
- [13] S.Ya. Belov, *On the initial-boundary value problems for barotropic motions of a viscous gas in a region with permeable boundaries*, J. Math. Kyoto Univ., **34**:2 (1994), 369–389. Zbl 0812.35096
- [14] S.N. Antontsev, A.V. Kazhikhov, V.N. Monakhov, *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, Studies in Mathematics and its Applications, **22**, North-Holland, Amsterdam etc., 1990. Zbl 0696.76001
- [15] V.A. Solonnikov, *The solvability of the initial-boundary value problem for the equations of motion of the viscous compressible fluid*, Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova, **56** (1976), 128–142. Zbl 0338.35078
- [16] V.A. Solonnikov, A.V. Kazhikhov, *Existence theorems for the equations of motion of a compressible viscous fluid*, Ann. Rev. Fluid Mech., **13** (1981), 79–95. Zbl 0492.76074

ALEXANDER EVGENYEVICH MAMONTOV, DMITRIY ALEXEYEVICH PROKUDIN
LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,
15, LAVRENT'YEV AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: aem@hydro.nsc.ru, prokudin@hydro.nsc.ru