

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 1943–1952 (2020)

УДК 517.958

DOI 10.33048/semi.2020.17.130

MSC 35Q20, 35Q60

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ С КОМПТОНОВСКИМ
РАССЕЯНИЕМ

И.В. ПРОХОРОВ, И.П. ЯРОВЕНКО

ABSTRACT. The paper considers the initial-boundary-value problem for the radiative transfer equation in an inhomogeneous medium with a collision integral that describes Compton scattering by free electrons. The problem is reduced to abstract Cauchy problem in Banach space. Using the theory of strongly continuous semigroups, well-posedness of the Cauchy problem is proved. Conditions of the operator semigroup stability are found.

Keywords: radiative transfer equation, Compton scattering, Cauchy problem, strongly continuous semigroup

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с широким внедрением перспективных технологий в области разработки импульсных источников рентгеновского излучения, и современными исследованиями астрофизических процессов, быстро протекающих в различных небесных объектах, весьма актуальны становятся задачи математического моделирования нестационарного взаимодействия гамма-излучения с веществом [1–3]. При таком взаимодействии преобладающим эффектом становится некогерентное рассеяние, когда гамма-квант сталкиваясь с электроном теряет часть своей энергии в зависимости от угла рассеяния. Соотношение выражающее связь энергии до и после столкновения фотона с электроном носит название закона Комптона [3]. В последнее время наблюдается стабильный рост

PROKHOROV, I.V., YAROVENKO, I.P., THE CAUCHY PROBLEM FOR THE NON-STATIONARY RADIATIVE TRANSFER EQUATION WITH COMPTON SCATTERING.

© 2020 Прохоров И.В., Яровенко И.П.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20–01–00173).

Поступила 23 июня 2020 г., опубликована 26 ноября 2020 г.

исследований для моделей рентгеновской томографии в средах с преобладанием комптоновского рассеяния [4–7].

Несмотря на такой большой интерес к указанным моделям, вопросы строго обоснования корректности краевых задач для уравнения переноса излучения с комптоновским рассеянием достаточно долго оставались без ответа. В работах Аниконова Д.С., Коноваловой Д.С. [8–10] и последующих статьях Яровенко И.П. [11, 12] рассматривались вопросы существования и единственности решений краевых задач для стационарного уравнения переноса излучения с комптоновским рассеянием в различных функциональных пространствах. В [8–12] доказаны теоремы об однозначной разрешимости задачи без традиционных в теории переноса условий «типа неравенств» на коэффициенты уравнения.

В данной работе исследованы вопросы корректности задачи Коши для нестационарного уравнения переноса излучения с комптоновским рассеянием. Доказательство корректности задачи проведено с привлечением теории сильно непрерывных полугрупп, путем сведения начально-краевой задачи к абстрактной задаче Коши [13, 14]. Показано, что спектр генератора сильно непрерывной полугруппы разрешающих операторов содержится в левой полуплоскости комплексной плоскости, и получены условия стабилизации решения задачи Коши.

2. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНOSA ИЗЛУЧЕНИЯ, НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ОСНОВНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Предметом исследования является интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения следующего вида [10]

$$(1) \quad \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_r + \mu(r, \alpha) \right) I(r, \omega, \alpha, t) = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{\omega, \alpha}} \sigma(r, \omega \cdot \omega', \alpha) I(r, \omega', g(\omega \cdot \omega', \alpha), t) d\omega'.$$

Уравнение (1) описывает распространение радиации в выпуклой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^3$, где функция $I(r, \omega, \alpha, t)$ интерпретируется как плотность потока гамма-квантов с энергией $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ в момент времени $t \in [0, \infty)$ в точке $r \in G$, перемещающихся в направлении $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$ со скоростью c . Функция g определяется соотношением Комптона [3] и выражает связь между энергией фотона до рассеяния $\alpha' = g(\omega \cdot \omega', \alpha)$ и энергией после рассеяния α :

$$g(\omega \cdot \omega', \alpha) = \frac{\alpha}{1 + \alpha(\omega \cdot \omega' - 1)}.$$

Для удобства энергия α выражена в безразмерных единицах и связана с энергией фотона E соотношением $\alpha = E/E_0$, где E_0 – энергия покоя электрона [3]. Вектор ω' принадлежит подмножеству единичной сферы

$$\Omega_{\omega, \alpha} = \{\omega' \in \Omega : \alpha \leq g(\omega \cdot \omega', \alpha) \leq \bar{\alpha}\},$$

где $\bar{\alpha}$ – максимальная энергия источников излучения. Неравенства, определяющие множество $\Omega_{\omega, \alpha}$ непосредственно вытекают из соотношения Комптона, связывающего энергии фотона до и после рассеяния с косинусом угла рассеяния, и выражают тот факт, что энергия фотона в результате рассеяния может только уменьшиться.

Коэффициенты μ и σ в уравнении (1) называются коэффициентом полного взаимодействия и дифференциальным сечением рассеяния, соответственно. Функция $\sigma(r, \omega \cdot \omega', \alpha)$ выражается через плотность электронов в среде и сечение рассеяния Кляйна – Нишины [3]

$$\sigma_{KN}(\alpha, \alpha') = \frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\alpha'}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha} \right) \left(2 + \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha} \right)$$

при энергии $\alpha' = g(\omega \cdot \omega', \alpha)$, где $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$, $\underline{\alpha} > 0$, $\bar{\alpha} < \infty$.

Как правило, процесс переноса излучения происходит в неоднородной среде, поэтому коэффициенты уравнения (1) представляют собой кусочно-непрерывные функции в области G . Для характеристики неоднородности среды введем в рассмотрение некоторое подмножество $G_0 \subset G$ плотное в G и состоящее из конечного объединения попарно-непересекающихся областей G_1, G_2, \dots, G_p . Предполагается, что границы областей G_i являются гладкими поверхностями класса $C^1(\partial G_i)$ и множество G_0 удовлетворяет условию обобщенной выпуклости [15, 16]. Условие обобщенной выпуклости накладывает ограничение на строение множества G_0 , заключающиеся в том, что любая прямая, имеющая общую точку с G_0 , пересекает ∂G_0 в конечном числе точек.

Будем предполагать, что функции $\mu \geq \text{const} > 0$ и $\sigma \geq 0$ принадлежат пространствам $C_b(G_0 \times [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}])$ и $C_b(G_0 \times [-1, 1] \times [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}])$, соответственно, где через $C_b(Y)$ обозначено банахово пространство непрерывных и ограниченных на некотором множестве Y функций с нормой $\|f\|_{C_b(Y)} = \sup_{y \in Y} |f(y)|$.

Введем еще ряд обозначений: $X = G \times \Omega \times [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$; $X_0 = G_0 \times \Omega \times [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$; $\Gamma^\pm = \partial G \times \Omega_\pm(r) \times [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$; $\Omega_\pm = \{\omega \in \Omega : \text{sgn}(n(r) \cdot \omega) = \pm 1\}$, где $n(r)$ единичный вектор внешней нормали в точке $r \in \partial G$.

В работе рассматривается начально-краевая задача для уравнения (1) с начальными и граничными условиями следующего вида:

$$(2) \quad I|_{t=0} = I_0 \quad \text{на } X,$$

$$(3) \quad I = 0 \quad \text{на } \Gamma^- \times [0, +\infty).$$

Функция $I_0(r, \omega, \alpha) \geq 0$ в соотношении (2) описывает состояние процесса в начальный момент времени $t = 0$. Однородное условие (3) интерпретируется как отсутствие излучения, поступающего извне в область G .

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через $L_{r,\omega}$ луч исходящий из точки r в направлении ω , то есть $L_{r,\omega} = \{z \in \mathbb{R}^3 : z = r + t\omega, t > 0\}$. Согласно условию обобщенной выпуклости луч пересекает множество ∂G_0 в конечном числе точек $\{r + t_i\omega, i = 1, \dots, q(r, \omega)\}$. Пусть $d(r, \omega)$ — расстояние от точки $r \in G$ до границы области G в направлении ω , тогда из определения множеств G_0 и G получаем $d(r, \omega) = t_{q(r,\omega)}$. Из выпуклости области G вытекает, что $d \in C_b(G_0 \times \Omega)$ [16].

Рассмотрим оператор $\mathcal{L} : D \rightarrow C_b(X_0)$, определенный выражением

$$\mathcal{L}f = \omega \cdot \nabla_r f(r, \omega, \alpha) + \mu(r, \alpha)f(r, \omega, \alpha),$$

где первое слагаемое в определении оператора \mathcal{L} понимается как производная в точке r по направлению ω :

$$\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega, \alpha) = \left. \frac{df(r + \tau\omega, \omega, \alpha)}{d\tau} \right|_{\tau=0}.$$

Множество D является областью определения оператора \mathcal{L} и состоит из функций f , удовлетворяющих условиям:

1. для всех $(r, \omega, \alpha) \in X_0$ функция $f(r + t\omega, \omega, \alpha)$ абсолютно непрерывная по t на отрезке $[-d(r, -\omega), d(r, \omega)]$;
2. для всех $(r, \omega, \alpha) \in X_0$ справедливо условие $f(r - d(r, -\omega)\omega, \omega, \alpha) = 0$;
3. функция $\mathcal{L}f$ принадлежит пространству $C_b(X_0)$.

Оператор \mathcal{L} имеет ограниченный обратный

$$(4) \quad \mathcal{L}^{-1}F = \int_0^{d(r, -\omega)} \exp\left(-\int_0^\tau \mu(r - \omega\tau', \alpha) d\tau'\right) F(r - \tau\omega, \omega, \alpha) d\tau,$$

действующий из $C_b(X_0)$ в D , причем

$$(5) \quad \|\mathcal{L}^{-1}F\|_{C_b(X_0)} \leq (1 - \exp(-\bar{\mu}d)) \left\| \frac{F}{\mu} \right\|_{C_b(X_0)},$$

где $\bar{\mu} = \|\mu\|_{C_b(G_0 \times [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}])}$ и d — диаметр области G . Достаточно трудоемкое и нетривиальное доказательство непрерывности функции $f = \mathcal{L}^{-1}F$ на множестве X_0 при $\mu \in C_b(G_0 \times [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}])$, $F \in C_b(X_0)$ можно найти в [16]. Заметим, что из соотношений (4), (5) вытекает вложение $D \subset C_b(X_0)$.

Так как функции σ и g , как функции переменных $(r, \omega, \omega', \alpha)$ непрерывны и ограничены на множестве $G_0 \times \Omega \times \Omega_{\alpha, \omega} \times [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$, то оператор столкновений

$$\mathcal{S}f = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{\omega, \alpha}} k(r, \omega \cdot \omega', \alpha) f(r, \omega', g(\omega \cdot \omega', \alpha)) d\omega',$$

переводит пространство $C_b(X_0)$ в себя. Этот факт является следствием теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Учитывая свойства линейных операторов \mathcal{L} и \mathcal{S} , определим оператор

$$\mathcal{A} = -c(\mathcal{L} - \mathcal{S}),$$

действующий в банаховом пространстве $C_b(X)$, с областью определения D .

Решением начально-краевой задачи (1), (2), (3) будем называть вектор-функцию $I(t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

значения $I(t)$ при всех $t \in [0, +\infty)$ принадлежат D ;

в каждой точке t существует сильная производная функции $I(t)$, принадлежащая пространству $C([0, +\infty); C_b(X_0))$;

справедливы соотношения

$$(6) \quad \frac{\partial I(t)}{\partial t} = \mathcal{A}I(t),$$

и

$$(7) \quad I(0) = I_0,$$

где $I_0 \in D$. Таким образом, изучение начально-краевой задачи (1), (2), (3) сведено к исследованию корректности абстрактной задачи Коши в банаховом пространстве.

4. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для доказательства корректности задачи (6), (7) достаточно показать, что найдется такое число β , что резольвента $\mathcal{R}_\lambda = (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}$ оператора \mathcal{A} существует для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Re } \lambda > \beta$, и ее норма ограничена числом $1/(\text{Re } \lambda - \beta)$. В этом случае теорема Хилле-Иосиды [13, 14] гарантирует существование единственной сильно непрерывной полугруппы $\mathcal{U}(t)$ разрешающих операторов ($I(t) = \mathcal{U}(t)I_0$), причем норма однопараметрического семейства операторов $\mathcal{U}(t)$ не превосходит величины $M \exp(\beta t)$, $M \geq 1$. Такой подход наиболее прост в реализации и был использован нами при доказательстве корректности начально-краевых задач для уравнения переноса с обобщенными условиями сопряжения на границах раздела сред [17–20].

Для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ введем в рассмотрение семейство операторов

$$\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L} + \frac{\lambda}{c}\mathcal{I},$$

где \mathcal{I} единичный оператор. Оператор \mathcal{L}_λ , также как и оператор \mathcal{L} , при

$$(8) \quad \text{Re } \lambda > \lambda_-, \quad \text{где } \lambda_- = -c \inf_{(r,\alpha) \in G_0 \times [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]} \mu(r, \alpha),$$

имеет ограниченный обратный

$$(9) \quad \mathcal{L}_\lambda^{-1}F = \int_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\int_0^\tau \mu(r - \omega\tau', \alpha) d\tau' - \frac{\lambda}{c}\tau\right) F(r - \tau\omega, \omega, \alpha) d\tau,$$

причем

$$(10) \quad \|\mathcal{L}_\lambda^{-1}F\|_{C_b(X_0)} \leq \frac{c(1 - \exp(-(\text{Re } \lambda - \lambda_-)d/c))}{\text{Re } \lambda - \lambda_-} \|F\|_{C_b(X_0)} \leq \frac{c}{\text{Re } \lambda - \lambda_-} \|F\|_{C_b(X_0)}.$$

Везде далее, если не оговорено противное, предполагается справедливость неравенства (8). Если на линейном функциональном множестве D определить норму

$$(11) \quad \|f\|_D = \|\mathcal{L}_\lambda f\|_{C_b(X_0)},$$

тогда из соотношения (10) непосредственно вытекает неравенство

$$(12) \quad \|f\|_{C_b(X_0)} \leq \frac{c}{\text{Re } \lambda - \lambda_-} \|f\|_D.$$

Из (12) следует, что сходимость последовательности функций в пространстве D влечет за собой сходимость в пространстве $C_b(X_0)$. Так как пространство $C_b(X_0)$ банахово, то нетрудно показать, что и D с нормой (11) также образует банахово пространство (см., например, [15, 16]).

Учитывая определение оператора \mathcal{L}_λ , для резольвенты оператора \mathcal{A} справедливы соотношения

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda &= (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} = (\lambda\mathcal{I} + c(\mathcal{L} - \mathcal{S}))^{-1} = (\mathcal{L} + \frac{\lambda}{c}\mathcal{I} - \mathcal{S})^{-1}c^{-1} = \\ &= (\mathcal{L}_\lambda - \mathcal{S})^{-1}c^{-1} = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^{-1}\mathcal{L}_\lambda^{-1}c^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства существования и ограниченности резольвенты оператора \mathcal{A} достаточно показать существование ограниченного оператора $(\mathcal{I} - \mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^{-1}$. В следующем разделе мы покажем, что оператор $(\mathcal{I} - \mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})$,

также как и оператор \mathcal{L}_λ имеет ограниченный обратный при выполнении условия (8).

5. ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

Прежде, чем перейти к доказательству основного утверждения, докажем две вспомогательные леммы. В первом утверждении устанавливаются некоторые свойства операторов $(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n$, а во втором получена вспомогательная оценка для резольвенты оператора \mathcal{A} .

Лемма 1. Для всех $(r, \omega, \alpha) \in X_0$ справедливо неравенство

$$(14) \quad |(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n f(r, \omega, \alpha)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{c \|\sigma\|_{C_b(X_0)}}{2(\operatorname{Re} \lambda - \lambda_-)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \right) \right)^n \|f\|_{C_b(X_0)},$$

Доказательство. Предварительно для любых $n \geq 0$ и $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ покажем справедливость вспомогательного неравенства

$$(15) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{\omega, \alpha}} \left(\frac{1}{g(\omega \cdot \omega', \alpha)} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \right)^n d\omega' \leq \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \right)^{n+1}.$$

Если при интегрировании на единичной сфере Ω использовать параметризацию

$$\omega = \omega(\nu, \gamma) = (\cos \gamma \sqrt{1 - \nu^2}, \sin \gamma \sqrt{1 - \nu^2}, \nu),$$

где $\nu = \omega \cdot \omega' \in [-1, 1]$, $\gamma \in [0, 2\pi)$, $d\omega = d\nu d\gamma$, то, учитывая следующие выражения для функции $g(\nu, \alpha)$ и ее производной

$$(16) \quad g(\nu, \alpha) = \frac{\alpha}{1 + \alpha(\nu - 1)}, \quad \frac{\partial g}{\partial \nu} = -\frac{\alpha^2}{(1 + \alpha(\nu - 1))^2} = -g^2,$$

получаем

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{\omega, \alpha}} \left(\frac{1}{g(\omega \cdot \omega', \alpha)} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \right)^n d\omega' &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \chi_{[\alpha, \bar{\alpha}]}(g(\nu, \alpha)) \left(\frac{1}{g(\nu, \alpha)} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \right)^n d\nu d\gamma = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \chi_{[\alpha, \bar{\alpha}]}(g(\nu, \alpha)) \left(\frac{1}{g(\nu, \alpha)} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \right)^n d\nu = -\frac{1}{2} \int_{\alpha^*}^{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \right)^n \frac{d\alpha'}{\alpha'^2} \leq \\ &\leq -\frac{1}{2} \int_{\bar{\alpha}}^{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \right)^n \frac{d\alpha'}{\alpha'^2} = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

При построении цепочки неравенств (17) использовались следующие обозначения $\alpha^* = \min\{\bar{\alpha}, g(-1, \alpha)\}$, где $g(-1, \alpha) = \frac{\alpha}{1 - 2\alpha}$.

Теперь приступим непосредственно к оценке выражения $|(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n f|$ на множестве X_0 при любых $n \geq 1$. При всех $\text{Re } \lambda > \lambda_-$ из (17) всюду на X_0 получаем

$$\begin{aligned}
 (18) \quad |(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S}f)(r, \omega, \alpha)| &= \left| \int_0^{d(r, -\omega)} \exp\left(-\int_0^\tau \mu(r - \tau'\omega, \alpha) d\tau' - \frac{(\text{Re } \lambda + i\text{Im } \lambda)\tau}{c}\right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{\omega, \alpha}} \sigma(r - \tau\omega, \omega \cdot \omega, \alpha) d\omega' d\tau \right| \|f\|_{C_b(X_0)} \leq \\
 &\leq \int_0^{d(r, -\omega)} \exp\left(-\frac{(\text{Re } \lambda - \lambda_-)\tau}{c}\right) \frac{\|\sigma\|_{C_b(X_0)}}{4\pi} \int_{\Omega_{\omega, \alpha}} d\omega' d\tau \|f\|_{C_b(X_0)} \leq \\
 &\leq C \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\bar{\alpha}}\right) \|f\|_{C_b(X_0)},
 \end{aligned}$$

где через C обозначено

$$(19) \quad C(\lambda) = \frac{c\|\sigma\|_{C_b(X_0)}}{2(\text{Re } \lambda - \lambda_-)}.$$

Имея в наличии оценку (18), при любом n находим

$$\begin{aligned}
 (20) \quad |(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n f| &\leq C \left|(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^{n-1} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\bar{\alpha}}\right)\right| \|f\|_{C_b(X_0)} \leq \\
 &\leq \frac{C^2}{2!} \left|(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^{n-2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\bar{\alpha}}\right)^2\right| \|f\|_{C_b(X_0)} \leq \dots \leq \frac{C^n}{n!} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\bar{\alpha}}\right)^n \|f\|_{C_b(X_0)},
 \end{aligned}$$

где C определена в (19). Сравнивая полученный в (20) результат с тем, что требовалось доказать, заключаем справедливость утверждения леммы. \square

Лемма 2. *Резольвента оператора \mathcal{A} существует при $\text{Re } \lambda > \lambda_-$ и удовлетворяет соотношению*

$$(21) \quad \|\mathcal{R}_\lambda\| \leq \frac{\exp(\Lambda/(\text{Re } \lambda - \lambda_-))}{\text{Re } \lambda - \lambda_-},$$

где

$$(22) \quad \Lambda = \frac{c\|\sigma\|_{C_b(X_0)}}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\bar{\alpha}}\right).$$

Доказательство. Из утверждения леммы 1 вытекает, что при любом n оператор $(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n$ ограничен из $C_b(X_0)$ в $C_b(X_0)$, причем

$$(23) \quad \|(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n\| \leq \frac{\Lambda^n}{n!(\text{Re } \lambda - \lambda_-)^n}.$$

где Λ определена в (22). Учитывая неравенство (23) для нормы резольвенты оператора \mathcal{A} получаем

$$(24) \quad \|\mathcal{R}_\lambda\| = \|((\mathcal{I} - \mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^{-1}\mathcal{L}_\lambda^{-1}c^{-1})\| \leq \|\mathcal{L}_\lambda^{-1}c^{-1}\| \sum_{n=0}^{\infty} \|(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n\| \leq \\ \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \lambda_-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n}{n!(\operatorname{Re} \lambda - \lambda_-)^n} = \frac{\exp(\Lambda/(\operatorname{Re} \lambda - \lambda_-))}{\operatorname{Re} \lambda - \lambda_-}.$$

Утверждение леммы доказано. \square

Теорема 1. *Задача Коши (6),(7) однозначно разрешима и при выполнении условия*

$$(25) \quad \lambda_- + \Lambda < 0$$

ее решение стабилизируется к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Подберем константу β так, чтобы для любого $\operatorname{Re} \lambda > \beta$ выполнялось неравенство

$$(26) \quad \frac{\exp(\Lambda/(\operatorname{Re} \lambda - \lambda_-))}{\operatorname{Re} \lambda - \lambda_-} \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \beta}.$$

Из справедливости (26) вытекает

$$(27) \quad \beta \geq \lambda_- + (\operatorname{Re} \lambda - \lambda_-)(1 - \exp(\Lambda/(\operatorname{Re} \lambda - \lambda_-))).$$

Так как для всех $\operatorname{Re} \lambda > \lambda_-$

$$(28) \quad 1 - \exp(\Lambda/(\operatorname{Re} \lambda - \lambda_-)) \leq \Lambda/(\operatorname{Re} \lambda - \lambda_-),$$

то неравенство (26) будет верно для всех λ , удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} \lambda > \beta = \lambda_- + \Lambda$.

Из (26) и леммы 2 вытекает, что норма резольвенты производящего оператора \mathcal{A} не превосходит $\frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \beta}$. Применяя теорему Хилле-Иосиды [13, 14] заключаем, что существует единственная сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$ разрешающих операторов задачи Коши (6),(7)

$$(29) \quad I(t) = \mathcal{U}(t)I_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta - i\epsilon}^{\Delta + i\epsilon} e^{-\lambda t} (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} I_0 d\lambda, \quad \Delta > \beta,$$

причем $\|\mathcal{U}(t)\| \leq M \exp(\beta t)$, где $\beta = \lambda_- + \Lambda$. Отсюда в частности вытекает стабилизация к нулю решения задачи Коши к нулю при $\beta = \lambda_- + \Lambda < 0$. \square

Согласно Лемме 2 спектр оператора \mathcal{A} содержится в комплексной полуплоскости, все элементы которой, имеют отрицательную вещественную часть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \operatorname{Re} \lambda + i\operatorname{Im} \lambda$, $\operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_- < 0$. Не смотря на отмеченный факт, теорема гарантирует устойчивость полугруппы $\mathcal{U}(t)$ только при выполнении условия $\lambda_- + \Lambda < 0$. Такая ситуация не редкость в теории сильно непрерывных полугрупп с неограниченными производящими операторами [13, 14].

Тем не менее в достаточно узком интересующем нас диапазоне энергий $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ всегда можно добиться малости величины Λ , определяемой соотношением (22), так, чтобы обеспечить выполнение условия (25), гарантирующего устойчивость полугруппы разрешающих операторов задачи Коши.

REFERENCES

- [1] G.V. Fetisov, *X-ray diffraction methods for structural diagnostics of materials: progress and achievements*, Phys. Usp., **63** 2020, 2–32.
- [2] V. Suleimanov, J. Poutanen, K. Werner, *X-ray bursting neutron star atmosphere models using an exact relativistic kinetic equation for Compton scattering*, Astronomy & Astrophysics, **545** (2012), Article ID A120.
- [3] D.I. Nagirner, J. Poutanen, *Single Compton scattering*, Astrophysics and Space Physics Reviews, **9**, Harwood Academic Publishers, Amsterdam, 1994.
- [4] I.P. Yarovenko, *The method for solving tomography problem based on the specifics of the Compton scattering*, Vychisl. Tekhnol., **17**:6 (2012), 99–109. Zbl 1420.92062
- [5] I.G. Kazantsev, U.L. Olsen, H.F. Poulsen, P.C. Hansen, *A spectral geometric model for Compton single scatter in PET based on the single scatter simulation approximation*, Inverse Probl., **34**:2 (2018), Article ID 024002. Zbl 1400.78012
- [6] James Webber, Eric L Miller, *Compton scattering tomography in translational geometries*, Inverse Probl., **36**:2 (2020), Article ID 025007. Zbl 07161823
- [7] Yang Zhang, *Recovery of singularities for the weighted cone transform appearing in Compton camera imaging*, Inverse Probl., **36**:2 (2020), Article ID 025014. Zbl 1442.44003
- [8] D.S. Anikonov, D.S. Konovalova, *The Kinetic Transport Equation in the case of Compton scattering*, Sib. Math. J., **43**:5 (2002), 795–807. Zbl 1052.82026
- [9] D.S. Anikonov, D.S. Konovalova, *Compton effect in transport theory*, Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk, **398**:4 (2004), 462–465. Zbl 1083.78004
- [10] D.S. Anikonov, D.S. Konovalova, *The boundary-value problem for the transport equation with purely Compton scattering*, Sib. Math. J., **46**:1 (2005), 1–12. Zbl 1094.35034
- [11] I.P. Yarovenko, *On the solvability of the boundary value problem for the radiation transfer equation with the Compton scattering effect*, Dal'nevost. Mat. Zh., **14**:1 (2014), 109–121. Zbl 1335.35245
- [12] I.P. Yarovenko, *Unique solvability of boundary value problem for a polychromatic radiation transfer equation*, Dal'nevost. Mat. Zh., **19**:1 (2019), 96–107. Zbl 1434.35212
- [13] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied mathematics science, **44**, Springer-Verlag, New-York etc., 1983. Zbl 0516.47023
- [14] Ph. Clément, H.J.A.M. Heijmans, S. Angenent, C.J. van Duijn, B. de Pagter, *One-parameter semigroups*, CWI Monographs, **5**, North-Holland, Amsterdam etc., 1987. Zbl 0636.47051
- [15] V.S. Vladimirov, *Mathematical problems of the uniform-speed theory of transport*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **61**, AN SSSR, Moscow, 1961. MR0156658
- [16] D.S. Anikonov, A.E. Kovtanyuk, I.V. Prokhorov, *Transport equation and tomography*, VSP, Utrecht-Boston, 2002. Zbl 1042.45009
- [17] I.V. Prokhorov, *Solvability of the initial-boundary value problem for an integro-differential equation*, Sib. Math. J., **53**:2 (2012), 301–309. Zbl 1254.45011
- [18] I.V. Prokhorov, A.A. Sushchenko, *On the well-possessedness of the Cauchy problem for the equation of radiative transfer with Fresnel matching conditions*, Sib. Math. J., **56**:4 (2015), 736–745. Zbl 1332.45010
- [19] I.V. Prokhorov, A.A. Sushchenko, A. Kim, *Initial boundary value problem for the radiative transfer equation with diffusion matching conditions*, J. Appl. Ind. Math., **11**:1 (2017), 115–124. Zbl 1374.45015
- [20] I.V. Prokhorov, *The Cauchy problem for the radiation transfer equation with Fresnel and Lambert matching conditions*, Math. Notes, **105**:1 (2019), 80–90. Zbl 1421.35364

IGOR VASILIEVICH PROKHOROV
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS FEB RAS,
7, RADIO STR.,
VLADIVOSTOK, 690041, RUSSIA
FAR EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
8, SUKHANOVA STR. ,
VLADIVOSTOK, 690950, RUSSIA
Email address: prokhorov@iam.dvo.ru

IVAN PETROVICH YAROVENKO
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS FEB RAS,
7, RADIO STR.,
VLADIVOSTOK, 690041, RUSSIA
Email address: yarovenko@iam.dvo.ru