S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1900–1920 (2020) УДК 517.929
DOI 10.33048/semi.2020.17.128 MSC 34K06,34K11

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

А.С. БАЛАНДИН, Т.Л. САБАТУЛИНА

Abstract. We present necessary and sufficient conditions for the oscillation of solutions to linear autonomous functional differential equations with two delays. The conditions are proposed in both the analytic and geometric forms.

Keywords: functional differential equation, delay, concentrated delay, distributed delay, oscillation, effective conditions.

Введение

Исследованию осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием посвящены десятки монографий и сотни статей, в которых установлено много признаков осцилляции, в т.ч. для уравнений весьма общего вида. Среди уравнений с последействием выделяется класс автономных уравнений, для которого, с одной стороны, возможно получение эффективных (выраженных в терминах коэффициентов и запаздываний) критериев осцилляции решений, а не только достаточных признаков. С другой стороны, эти уравнения востребованы при изучении различных процессов в биологии, экономике, механике и т.д. Оказалось, что для автономных уравнений с последействием необходимых и достаточных признаков осцилляции известно совсем немного, и все они относятся к уравнениям с одним запаздыванием. Такие условия были бы полезны и сами по себе, и как отправная точка при исследовании уравнений

Balandin, A.S., Sabatulina, T.L., On oscillation of solutions for linear autonomous functional differential equations with two delays.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, задание FSNM-2020-0028, и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18–01–00928.

Поступила 3 июля 2020 г., опубликована 20 ноября 2020 г.

более общего вида, и при исследовании свойств той или иной модели реального процесса. В данной работе мы получим несколько новых эффективных критериев осцилляции решений автономных уравнений с двумя запаздываниями.

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + \int_0^\omega x(t-s)\,dr(s) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\omega \in \mathbb{R}_+$, функция $r\colon [0,\omega] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$. Интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса. Доопределим функцию x на отрезке $[-\omega, 0]$ произвольным образом, лишь бы функция $\int_t^\omega x(t-s)\,dr(s)$ оставалась суммируемой на $[0,\omega]$. Тогда в перечисленных выше предположениях относительно функции r решение уравнения (1) существует и единственно [1, с. 19–23, теорема 1].

Определение 1. *Решением уравнения* (1) *будем называть локально абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую уравнению* (1) *почти всюду.*

Известно [2, p. 22, Theorem I.14], что функция r представима в виде суммы функции скачков, а также абсолютно непрерывной и сингулярной составляющих. Каждое слагаемое порождает свой класс уравнений: уравнения с сосредоточенными запаздываниями, уравнения с распределёнными запаздываниями, уравнения с сингулярными составляющими. Но при изучении реальных моделей сингулярная составляющая не возникает; более того, она и не должна появиться, так как не имеет физического смысла (см. [2, p. 23]). В данной работе рассматриваются уравнения с сосредоточенными и распределёнными запаздываниями.

На сегодняшний день наиболее исследованными являются уравнения с сосредоточенными запаздываниями

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k x(t-h_k) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Как известно [3], *все решения уравнения* (2) *являются осциллирующими тогда и только тогда, когда квазиполином* $\lambda + \sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda h_k}$ *не имеет вещественных корней.*

На основе этого критерия удалось получить ряд эффективных признаков осцилляции. В частности, для простейшего уравнения $\dot{x}(t) + ax(t-h) = 0$ необходимым и достаточным условием осцилляции всех решений является выполнение неравенства $ah > \frac{1}{e}$ (см. [4]). По-видимому, для уравнения (2) с количеством запаздываний больше одного задача получения коэффициентных критериев осцилляции не ставилась, усилия были направлены на получение достаточных признаков осцилляции и на расширение класса исследуемых уравнений (системы, уравнения нейтрального типа, неавтономные уравнения, нелинейные уравнения) — также с целью получения достаточных признаков. Как будет видно из предлагаемой работы, для уравнения (2) с двумя запаздываниями тоже можно получить необходимое и достаточное условие осцилляции, выраженное в терминах параметров исходной задачи.

Желание исследовать уравнение с распределённым запаздыванием приводит к необходимости обобщить на уравнение (1) сформулированный выше критерий осцилляции (из работы [3]), сводящий задачу осцилляции к изучению расположения нулей характеристической функции на комплексной плоскости. Во многих работах (в т.ч. в [5]) такое обобщение формулируют, но, к сожалению, строго не доказывают, поэтому в данном исследовании мы считаем необходимым доказать его. На основе обобщённого критерия мы получим эффективные необходимые и достаточные условия осцилляции для уравнений: а) с двумя сосредоточенными запаздываниями, б) с двумя распределёнными запаздываниями, в) с одним сосредоточенным и одним распределённым запаздыванием.

1. Вспомогательные результаты

Будем называть определённую на положительной полуоси непрерывную функцию *осциллирующей*, если она имеет на полуоси неограниченную справа последовательность нулей. Уравнение (1) назовём *осциллирующим*, если все его решения осциллируют.

В исследовании важную роль играет функция $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$F(\lambda) = \lambda + \int_0^{\omega} e^{-\lambda\xi}\, dr(\xi),$$

которая называется *характеристической функцией* уравнения (1).

Теорема 1. *Уравнение* (1) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда функция F не имеет вещественных корней.*

Доказательство. Необходимость. Если функция F имеет вещественный корень λ^*, то уравнение (1) имеет неосциллирующее решение $x(t) = e^{\lambda^* t}$.

Достаточность. Известно [6], что, во-первых, существует такое $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, что функция F не имеет нулей при $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$, а во-вторых, множество нулей функции F конечно в каждой вертикальной полосе на комплексной плоскости. Следовательно, количество нулей функции F с наибольшей вещественной частью конечно. Отметим, что все нули функции F разбиваются на комплексно-сопряжённые пары. Пусть n — количество комплексно-сопряжённых пар нулей функции F с наибольшей вещественной частью, сами нули обозначим через λ_j, $\operatorname{Re}\lambda_j = \alpha_{\max}$, $\operatorname{Im}|\lambda_j| = \beta_j$, $j = 1, \ldots, n$.

В силу [7] любое решение уравнения (1) представимо в виде

$$x(t) = e^{\alpha_{\max} t} \sum_{j=1}^{n} \left(A_j(t)\cos\beta_j t + B_j(t)\sin\beta_j t\right) + z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где A_j и B_j — полиномы, $\lim\limits_{t\to+\infty} |z(t)|e^{-\alpha_{\max} t} = 0$. Обозначим через m_0 максимальную степень полиномов A_j, B_j, $j = 1, \ldots, n$. Тогда решение уравнения (1) можно записать в виде

$$\frac{x(t)}{t^{m_0} e^{\alpha_{\max} t}} = w(t) + \varepsilon(t),$$

где $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$, $w(t) = \sum_{j=1}^{n} R_j \cos(\beta_j t - \varphi_j)$, $\varphi_j \in \mathbb{R}$, $0 < \beta_1 < \ldots < \beta_n$, $R_j \in \mathbb{R}_+$, причём те R_j, которые соответствуют максимальной степени m_0 полиномов A_j и B_j, не равны нулю.

Пусть R — ненулевой R_j с наименьшим индексом j, обозначим этот индекс через j_0, $\beta = \beta_{j_0}$, $\varphi = \varphi_{j_0}$. Рассмотрим функцию

$$y(t) = \sum_{j=j_0}^{n} \frac{R_j}{\beta_j^{4m}} \cos(\beta_j t - \varphi_j).$$

Из того, что $\beta < \beta_j$ при всех $j > j_0$, вытекает, что при достаточно больших m выполняется неравенство

$$\frac{R}{\beta^{4m}} > \sum_{j=j_0+1}^{n} \frac{R_j}{\beta_j^{4m}}.$$

Возьмём $\theta_l = \frac{\varphi+2\pi l}{\beta}$, $l \in \mathbb{N}$. Вычислим

$$y(\theta_l) = \frac{R}{\beta^{4m}} + \sum_{j=j_0+1}^{n} \frac{R_j}{\beta_j^{4m}} \cos(\beta_j \theta_l - \varphi_j) \geqslant \frac{R}{\beta^{4m}} - \sum_{j=j_0+1}^{n} \frac{R_j}{\beta_j^{4m}} > 0,$$

$$y\left(\theta_l + \frac{\pi}{\beta}\right) \leqslant -\frac{R}{\beta^{4m}} + \sum_{j=j_0+1}^{n} \frac{R_j}{\beta_j^{4m}} < 0.$$

Если $j_0 = n$, то $y(\theta_l) = \frac{R}{\beta^{4m}} > 0$, $y\left(\theta_l + \frac{\pi}{\beta}\right) = -\frac{R}{\beta^{4m}} < 0$.

Таким образом, функция y имеет бесконечное множество нулей и экстремумов в $\mathbb{R}_+$, причём максимумы и минимумы функции y равномерно отделены от нуля. С помощью теоремы о среднем значении убеждаемся, что все производные функции y обладают этим свойством, а значит, и функция w, поскольку $y^{(4m)}(t) = w(t)$. Следовательно, функция x осциллирует. □

Приведём критерии осцилляции уравнений с одним сосредоточенным и распределенным запаздыванием.

Ниже считаем, что $a, b \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}_+$. Пусть $D_{01} = \{(u,v)\colon u > e^{-v-1}\}$. На рис. 1 область D_{01} закрашена.

Предложение 1 ([8]; [5], p. 40, Corollary 2.2.1)**.** *Уравнение*

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-h) = 0 \tag{3}$$

является осциллирующим тогда и только тогда, когда $(bh, ah) \in D_{01}$.

Следствие 1 ([4, 9])**.** *При* $a = 0$ *уравнение* (3) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда* $bh > \frac{1}{e}$.

Зададим кривую $v = \phi(u)$ параметрически:

$$u = \frac{\zeta^2}{e^\zeta(\zeta-1)+1}, \quad v = \zeta + \frac{\zeta\left(1-e^\zeta\right)}{e^\zeta(\zeta-1)+1}, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

Обозначим $D_{02} = \{(u,v)\colon v > \phi(u)\}$. На рис. 2 область D_{02} закрашена.

Предложение 2 ([10])**.** *Уравнение*

$$\dot{x}(t) + ax(t) + c\int_{t-h}^{t} x(s)\,ds = 0 \tag{4}$$

является осциллирующим тогда и только тогда, когда точка $\left(ch^2, ah\right) \in D_{02}$.

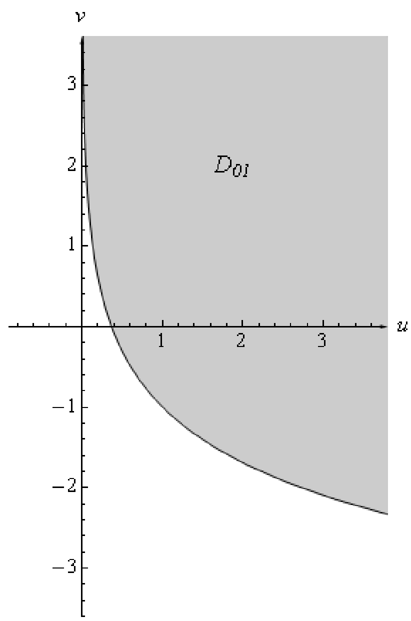


Рис. 1. Область D_{01}.

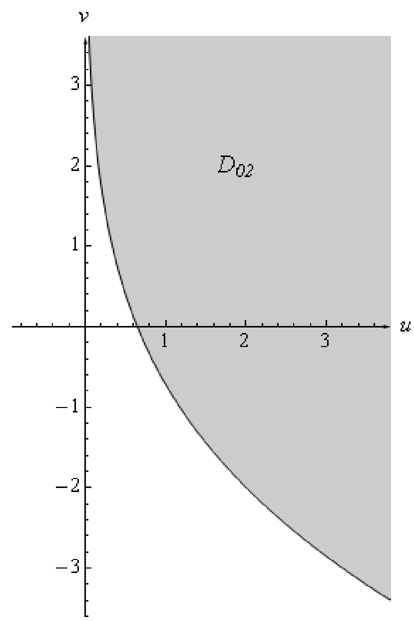


Рис. 2. Область D_{02}.

Следствие 2 ([10], [11]). *При $a = 0$ уравнение* (4) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда $ch^2 > k_0 = \zeta_0(2 - \zeta_0)$, где ζ_0 — положительный корень уравнения*

$$e^{-\zeta} = 1 - \frac{\zeta}{2}. \tag{5}$$

Заметим, что $\zeta_0 \approx 1.59362\dots$ и $k_0 \approx 0.64761\dots$

Цель данной работы — расширить класс уравнений, для которых можно построить область осцилляции как множество в пространстве параметров. Если границы области допускают простое описание, то мы получим новый эффективный критерий осцилляции в аналитической форме.

Рассмотрим три класса функционально-дифференциальных уравнений с двумя ненулевыми запаздываниями разной природы:

$$\dot{x}(t) + bx(t-p) + cx(t-q) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

$$\dot{x}(t) + b\int_{t-p}^{t} x(s)\,ds + c\int_{t-q}^{t} x(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

$$\dot{x}(t) + bx(t-p) + c\int_{t-q}^{t} x(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{8}$$

где $b, c \in \mathbb{R}$. Не нарушая общности, считаем, что $p, q > 0$. Результаты для случаев $p = 0$ или $q = 0$ приведены выше.

Выбором единицы масштаба по оси t сделаем запаздывание q равным единице. Таким образом, получаем следующие уравнения

$$\dot{x}(t) + bx(t-h) + cx(t-1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{9}$$

$$\dot{x}(t) + b\int_{t-h}^{t} x(s)\,ds + c\int_{t-1}^{t} x(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{10}$$

$$\dot{x}(t) + bx(t-h) + c\int_{t-1}^{t} x(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{11}$$

исследование которых будем проводить на основе теоремы 1.

Характеристические функции уравнений (9), (10), (11) имеют вид

$$F(\lambda) = \lambda + bF_j(\lambda, h) + cF_l(\lambda, 1), \quad j, l \in \{1, 2\},$$

где

$$F_1(\lambda, h) = e^{-\lambda h}, \quad F_2(\lambda, h) = \int_0^h e^{-\lambda\xi}\,d\xi = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda} & \text{при} \quad \lambda \neq 0, \\ h & \text{при} \quad \lambda = 0, \end{cases}$$

$j = l = 1$ для (9), $j = l = 2$ для (10), $j = 1$ и $l = 2$ для (11).

Лемма 1. *Пусть выполнено одно из условий*

(1) $c < 0$ *и* $h < 1$.
(2) $b < 0$ *и* $h > 1$.

Тогда функция F имеет хотя бы один вещественный корень.

Доказательство. Пусть $\zeta \in \mathbb{R}$. Заметим, что $\lim\limits_{\zeta\to+\infty} F(\zeta) = +\infty$. В условиях леммы 1 имеем $\lim\limits_{\zeta\to-\infty} F(\zeta) = -\infty$. Следовательно, функция F имеет хотя бы один вещественный корень. □

Лемма 2. *Пусть для некоторых $b_0, c_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ и $j, l \in \{1, 2\}$ функция*

$$F_0(\lambda) = \lambda + b_0F_j(\lambda, h) + c_0F_l(\lambda, 1)$$

имеет хотя бы один вещественный корень. Тогда функция F имеет хотя бы один вещественный корень при всех $b, c \in \mathbb{R}$ таких, что $b \leqslant b_0$, $c \leqslant c_0$.

Доказательство. Для всех $\zeta \in \mathbb{R}$ выполняется $F(\zeta) \leqslant F_0(\zeta)$, причём для некоторого $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ справедливо $F_0(\zeta_0) = 0$. Значит, $F(\zeta_0) \leqslant F_0(\zeta_0) = 0$. С другой стороны, $\lim\limits_{\zeta\to+\infty} F(\zeta) = +\infty$. Тогда функция F имеет хотя бы один вещественный корень. □

Лемма 3. *Пусть $h \in (0, 1)$. Тогда для любого $b \in \mathbb{R}$ найдётся такое $c_0 \in \mathbb{R}_+$, что при всех $c > c_0$ функция F не имеет вещественных корней, и либо при некотором $\zeta = \zeta_0 \in \mathbb{R}$*

$$\begin{cases} \zeta + bF_j(\zeta, h) + c_0F_l(\zeta, 1) = 0, \\ 1 + b\dfrac{d}{d\zeta}F_j(\zeta, h) + c_0\dfrac{d}{d\zeta}F_l(\zeta, 1) = 0, \end{cases}$$

либо $c_0 = 0$.

Доказательство. Из $F(\zeta)=0$, считая c функцией от ζ, найдём c:

$$c=c(\zeta,b)=-\frac{\zeta+bF_j(\zeta,h)}{F_l(\zeta,1)}.$$

Заметим, что $F_l(\zeta,1)\neq 0$ при всех $\zeta\in\mathbb{R}$ и $l\in\{1,2\}$. Следовательно, функция $c(\zeta,b)$ непрерывна при всех $\zeta\in\mathbb{R}$ и каждом фиксированном b. Кроме того, $\lim\limits_{\zeta\to-\infty}c(\zeta,b)=0$, $\lim\limits_{\zeta\to+\infty}c(\zeta,b)=-\infty$. Значит, при каждом фиксированном b существует $c_0=\sup\limits_{\zeta}c(\zeta,b)$, причём $c_0\geqslant 0$.

Пусть c_0 достигается при некотором $\zeta_0\in\mathbb{R}$. Очевидно, что существует $\frac{dc(\zeta,b)}{d\zeta}$ при всех ζ. Найдём ζ_0 такое, что $\left.\frac{dc}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0}=0$. Учитывая $F(\zeta_0)=0$, получаем $\left.\frac{dF}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0}=0$. Наконец, из леммы 2 вытекает $c_0=c(\zeta_0,b)$.

Остаётся рассмотреть случай, когда c_0 достигается на $-\infty$. Тогда $c_0=0$. $\square$

Аналогично получается

Лемма 4. *Пусть $h>1$. Тогда для любого $c\in\mathbb{R}$ найдётся такое $b_0\in\mathbb{R}_+$, что при всех $b>b_0$ функция F не имеет вещественных корней, и либо*

$$\begin{cases}\zeta+b_0F_j(\zeta,h)+cF_l(\zeta,1)=0,\\ 1+b_0\dfrac{d}{d\zeta}F_j(\zeta,h)+c\dfrac{d}{d\zeta}F_l(\zeta,1)=0\end{cases}$$

при некотором $\zeta\in\mathbb{R}$, либо $b_0=0$.

Схема построения области осцилляции состоит в следующем. Из лемм 3 и 4 вытекает, что необходимо изучить систему

$$\begin{cases}uF_j(\zeta,h)+vF_l(\zeta,1)=-\zeta,\\ u\dfrac{d}{d\zeta}F_j(\zeta,h)+v\dfrac{d}{d\zeta}F_l(\zeta,1)=-1.\end{cases}\tag{12}$$

Система (12) является системой линейных алгебраических уравнений относительно u и v. Кроме того, система (12) имеет единственное решение $u=u(\zeta),v=v(\zeta)$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta(\zeta)=\begin{vmatrix}F_j(\zeta,h) & F_l(\zeta,1)\\ \frac{d}{d\zeta}F_j(\zeta,h) & \frac{d}{d\zeta}F_l(\zeta,1)\end{vmatrix}=F_j(\zeta,h)\frac{d}{d\zeta}F_l(\zeta,1)-F_l(\zeta,1)\frac{d}{d\zeta}F_j(\zeta,h)\neq 0.$$

Пусть $M=\{\zeta\in\mathbb{R}\colon\Delta(\zeta)\neq 0\}$. Если ζ будет пробегать все значения из множества M, то на плоскости (u,v) мы получим кривую $\Gamma=\{(u,v)\colon u=u(\zeta),v=v(\zeta),\zeta\in M\}$. Из точек, лежащих на кривой Γ и оси Ou (или Ov), нужно выбрать те, что принадлежат границе области осцилляции. Если зависимость $v=v(u)$ является монотонно убывающей функцией, то все точки кривой Γ принадлежат границе области осцилляции. Однако, как будет показано далее, данная кривая может иметь точки самопересечения. Тогда в силу лемм 3 и 4 среди точек с одинаковой координатой по оси Ou границе будет принадлежать только точка с наибольшей координатой по оси Ov, то есть лежащая выше остальных.

Введём обозначение

$$g(\zeta)=u\frac{d^2}{d\zeta^2}F_j(\zeta,h)+v\frac{d^2}{d\zeta^2}F_l(\zeta,1).$$

Обозначим $M_0 = \{\zeta \in M \colon g(\zeta) = 0\}$.

Лемма 5. *Пусть $u = u(\zeta)$, $v = v(\zeta)$ — решение системы* (12). *Справедливы следующие утверждения:*

(1) $\frac{du}{d\zeta}\frac{dv}{d\zeta} < 0$ *при всех* $\zeta \in M \setminus M_0$.

(2) $\frac{du}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\xi_0} = \frac{dv}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\xi_0} = 0$ *при каждом* $\xi_0 \in M_0$.

Доказательство. Считая u и v функциями от ζ, продифференцируем (12) по ζ:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\zeta}F_j(\zeta,h) + \dfrac{dv}{d\zeta}F_l(\zeta,1) = 0, \\ \dfrac{du}{d\zeta}\dfrac{d}{d\zeta}F_j(\zeta,h) + \dfrac{dv}{d\zeta}\dfrac{d}{d\zeta}F_l(\zeta,1) = -u\dfrac{d^2}{d\zeta^2}F_j(\zeta,h) - v\dfrac{d^2}{d\zeta^2}F_l(\zeta,1). \end{cases} \tag{13}$$

Из $F_1(\zeta,h), F_2(\zeta,h) > 0$ следует, что $\frac{du}{d\zeta}$ и $\frac{dv}{d\zeta}$ не могут быть одного знака, также невозможно, чтобы только одно из данных выражений обращалось в нуль. При этом заметим, что $\frac{du}{d\zeta} = \frac{dv}{d\zeta} = 0$ только при

$$u\frac{d^2}{d\zeta^2}F_j(\zeta,h) + v\frac{d^2}{d\zeta^2}F_l(\zeta,1) = 0, \tag{14}$$

то есть $g(\zeta) = 0$. □

После того как построена граница, можно указать саму область осцилляции. Из лемм 3 и 4 вытекает, что области осцилляции принадлежат точки, лежащие выше границы.

В разделах 2–4 используется только что описанная схема для получения эффективных необходимых и достаточных признаков осцилляции уравнений (6)–(8).

2. Уравнение с двумя сосредоточенными запаздываниями

Применим приведённую выше схему к уравнению (9). Не нарушая общности, можно считать, что $h \leqslant 1$. С помощью следствия 1 получаем, что при $h = 1$ уравнение (9) является осциллирующим тогда и только тогда, когда $b + c > \frac{1}{e}$. В случае $h = 0$ применяем предложение 1. Далее считаем, что $h \in (0,1)$.

В данном разделе $j = l = 1$, $F(\lambda) = \lambda + be^{-\lambda h} + ce^{-\lambda}$, $\Delta(\zeta) = (h-1)e^{-\zeta(1+h)} \neq 0$ при всех ζ. Следовательно, для каждой фиксированной пары ζ, h система (12) имеет единственное решение

$$u = -\frac{1+\zeta}{1-h}e^{\zeta h}, \quad v = \frac{1+\zeta h}{1-h}e^{\zeta}. \tag{15}$$

По лемме 1 $v \geqslant 0$. Из $v \geqslant 0$ следует, что $\zeta \geqslant -\frac{1}{h}$. Поэтому

$$g(\zeta) = \zeta h + 1 + h \geqslant h > 0.$$

Из леммы 5 вытекает, что кривая Γ, определённая на множестве $\zeta \geqslant -\frac{1}{h}$ равенствами (15), задаёт на плоскости (u,v) монотонно убывающую на $u \in \left(-\infty, \frac{1}{eh}\right]$ функцию $v = \varphi_{01}(u)$. Теперь легко дать описание области осцилляции уравнения (9).

Лемма 6. *Уравнение* (9) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \left\{(u,v)\colon v > \varphi_{01}(u), u \leqslant \frac{1}{eh}\right\} \cup \left\{(u,v)\colon v \geqslant 0, u > \frac{1}{eh}\right\}.$$

Доказательство. Допустим $b > \frac{1}{eh}$. Значит, в силу следствия 1 и лемм 1 и 2, уравнение (9) является осциллирующим тогда и только тогда, когда $c \geqslant 0$.

Допустим $b \leqslant \frac{1}{eh}$. Пусть точка (u_0, v_0) лежит на кривой $v = \varphi_{01}(u)$. По доказанному выше это означает, что для функции $F_0(\zeta) = \zeta + u_0 e^{-\zeta h} + v_0 e^{-\zeta}$ найдётся такое $\tilde{\zeta}$, что $F_0(\tilde{\zeta}) = 0$ и $F_0(\zeta) > 0$ при $\zeta \neq \tilde{\zeta}$. Возьмём точку (u_0, v). Если $v > v_0$, то $F(\zeta) = F_0(\zeta) + (v - v_0)e^{-\zeta} > 0$ при любых ζ. Если $v < v_0$, то по лемме 2 функция F имеет хотя бы один вещественный корень. $\square$

Вернёмся к уравнению (6). Для него возможны три случая.

Случай 1: $p < q$. Обозначим $\varphi_{11}(u) = \frac{1}{q}\varphi_{01}(uq)$, где φ_{01} определена равенствами (15) при $h = \frac{p}{q}$. Из свойств φ_{01} следует, что функция $\varphi_{11}(u)$ монотонно убывает при $u \in \left(-\infty, \frac{1}{ep}\right]$. В параметрической форме функция $v = \varphi_{11}(u)$ задаётся равенствами

$$u = -\frac{1+\zeta q}{q-p} e^{\zeta p}, \quad v = \frac{1+\zeta p}{q-p} e^{\zeta q}, \quad \zeta \geqslant -\frac{1}{p}.$$

Теорема 2. *При* $p < q$ *уравнение* (6) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \left\{(u,v)\colon v > \varphi_{11}(u), u \leqslant \frac{1}{ep}\right\} \cup \left\{(u,v)\colon v \geqslant 0, u > \frac{1}{ep}\right\}.$$

Доказательство. Заменой переменных $t \mapsto tq$ и обозначением $h = \frac{p}{q}$ уравнение (6) сводится к уравнению (9) с коэффициентами bq и cq. Применяя лемму 6, получаем теорему 2. $\square$

На рис. 3 (а) область осцилляции закрашена. Результат теоремы 2 был анонсирован в работе [12].

Случай 2: $p = q$. С помощью следствия 1 получаем

Теорема 3. *При* $p = q$ *уравнение* (6) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \left\{(u,v)\colon u + v > \frac{1}{ep}\right\}.$$

На рис. 3 (б) область осцилляции закрашена.

Случай 3: $p > q$. Очевидно, этот случай сводится к случаю 1, если поменять местами b и c, p и q. В параметрической форме функция $v = \varphi_{12}(u)$ задаётся равенствами

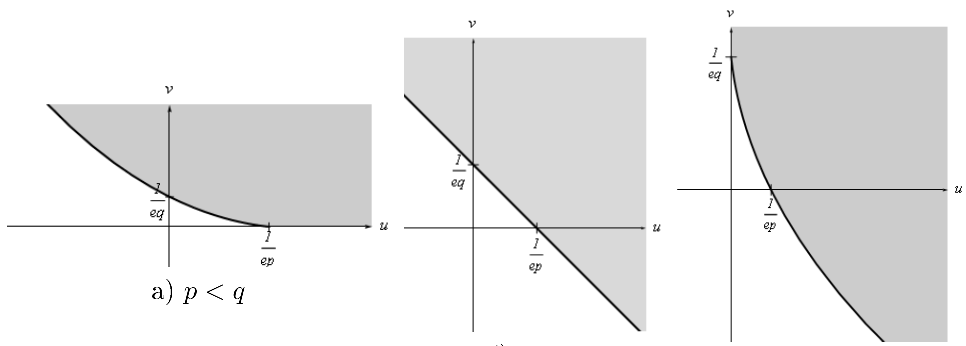
$$u = -\frac{1+\zeta q}{q-p} e^{\zeta p}, \quad v = \frac{1+\zeta p}{q-p} e^{\zeta q}, \quad \zeta \geqslant -\frac{1}{q}.$$

Функция $\varphi_{12}(u)$ монотонно убывает при $u \in [0, +\infty)$.

Теорема 4. *При* $p > q$ *уравнение* (6) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \{(u,v)\colon v > \varphi_{12}(u), u \geqslant 0\}.$$

На рис. 3 (в) область осцилляции закрашена.



а) $p < q$ б) $p = q$ в) $p > q$

Рис. 3. Область осцилляции уравнения (6).

3. Уравнение с двумя распределёнными запаздываниями

По той же схеме исследуем уравнение (10). Не нарушая общности, можно считать, что $h \leqslant 1$. С помощью следствия 2 получаем, что при $h = 1$ уравнение (10) является осциллирующим тогда и только тогда, когда $b+c > \zeta_0(2-\zeta_0)$, где ζ_0 — положительный корень уравнения (5). В случае $h = 0$ применяем следствие 2. Далее считаем, что $h \in (0, 1)$.

В данном разделе $j = l = 2$,

$$F(\lambda) = \lambda + b\frac{1-e^{-\lambda h}}{\lambda} + c\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}, \quad \Delta(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2}e^{-\zeta(1+h)}g_0(\zeta),$$

где

$$g_0(\zeta) = h(e^{\zeta} - 1) - e^{\zeta h} + 1.$$

В точке $\zeta = 0$ функцию $\Delta(\zeta)$ доопределим по непрерывности. В силу $\Delta(0) = -\frac{h(1-h)}{2} < 0$, при $\zeta = 0$ система (12) имеет единственное решение $u = -\frac{2}{h(1-h)}$, $v = \frac{2}{1-h}$. Заметим, что $g_0(0) = 0$, функция g_0 монотонно возрастает при $\zeta > 0$ и монотонно убывает при $\zeta < 0$. Значит, $\Delta(\zeta) < 0$ при всех $\zeta \neq 0$. Следовательно, для каждой фиксированной пары ζ, h система (12) имеет единственное решение

$$u = -\frac{\zeta e^{\zeta h}\left(2e^{\zeta} - \zeta - 2\right)}{g_0(\zeta)}, \quad v = \frac{\zeta e^{\zeta}\left(2e^{\zeta h} - \zeta h - 2\right)}{g_0(\zeta)}. \tag{16}$$

По лемме 1 $v \geqslant 0$. Из $v \geqslant 0$ следует, что $\zeta \geqslant -\frac{\zeta_0}{h}$, где ζ_0 — положительный корень уравнения (5).

Обозначим

$$g_1(\zeta) = h(\zeta h + 1)(2e^{\zeta} - \zeta - 2) - (\zeta + 1)(2e^{\zeta h} - \zeta h - 2).$$

Тогда

$$g(\zeta) = \frac{g_1(\zeta)}{\zeta g_0(\zeta)}.$$

Найдём

$$\frac{dg_1(\zeta)}{d\zeta} = 2(1 + h + \zeta h)g_0(\zeta).$$

При всех $\zeta \neq 0$ справедливо $g_0(\zeta) > 0$, $g_0(0) = 0$. Тогда $\frac{dg_1(\zeta)}{d\zeta} < 0$ при $\zeta < -1-\frac{1}{h}$, $\frac{dg_1(\zeta)}{d\zeta} > 0$ при $\zeta > -1-\frac{1}{h}$, $\left.\frac{dg_1(\zeta)}{d\zeta}\right|_{\zeta=-1-\frac{1}{h}} = 0$, $\left.\frac{dg_1(\zeta)}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} = 0$. Поэтому g_1 убывает при $\zeta < -1-\frac{1}{h}$ и возрастает при $\zeta > -1-\frac{1}{h}$, имеет минимум при $\zeta = -1-\frac{1}{h}$ и точку перегиба при $\zeta = 0$. При $h < 1$ выполняется $g_1\left(-\frac{\zeta_0}{h}\right) = h(1-\zeta_0)\left(2e^{-\frac{\zeta_0}{h}} + \frac{\zeta_0}{h} - 2\right) < 0$. Значит, $g_1(\zeta) < 0$ при $\zeta \in \left[-\frac{\zeta_0}{h}, 0\right)$, $g_1(\zeta) > 0$ при $\zeta \in (0, +\infty)$, $g_1(0) = 0$. Кроме того, $g(0) = \frac{2}{3}(1+h) \neq 0$. Следовательно, $g(\zeta) > 0$ при $\zeta \geqslant -\frac{\zeta_0}{h}$. В силу леммы 5, кривая Γ, определённая на множестве $\zeta \geqslant -\frac{\zeta_0}{h}$ равенствами (16), задаёт на плоскости (u,v) монотонно убывающую на $u \in \left(-\infty, \frac{\zeta_0(2-\zeta_0)}{h^2}\right]$ функцию $v = \varphi_{02}(u)$. Теперь легко дать описание области осцилляции уравнения (10).

Лемма 7. *Уравнение* (10) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \left\{(u,v)\colon v > \varphi_{02}(u), u \leqslant \frac{\zeta_0(2-\zeta_0)}{h^2}\right\} \cup \left\{(u,v)\colon v \geqslant 0, u > \frac{\zeta_0(2-\zeta_0)}{h^2}\right\}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6. □

Вернёмся к уравнению (7). Здесь также необходимо рассмотреть три случая.

Случай 1: $p < q$. Обозначим $\varphi_{21}(u) = \frac{1}{q^2}\varphi_{02}(uq^2)$, где φ_{02} определена равенствами (16) при $h = \frac{p}{q}$. Из свойств φ_{02} следует, что функция $\varphi_{21}(u)$ монотонно убывает при $u \in \left(-\infty, \frac{\zeta_0(2-\zeta_0)}{p^2}\right]$. В параметрической форме функция $v = \varphi_{21}(u)$ задаётся равенствами

$$u = -\frac{\zeta e^{\zeta p}\left(2e^{\zeta q} - \zeta q - 2\right)}{p(e^{\zeta q}-1) - q(e^{\zeta p}-1)}, \quad v = \frac{\zeta e^{\zeta q}\left(2e^{\zeta p} - \zeta p - 2\right)}{p(e^{\zeta q}-1) - q(e^{\zeta p}-1)}, \quad \zeta \geqslant -\frac{\zeta_0}{p}.$$

Теорема 5. *При* $p < q$ *уравнение* (7) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \left\{(u,v)\colon v > \varphi_{21}(u), u \leqslant \frac{\zeta_0(2-\zeta_0)}{p^2}\right\} \cup \left\{(u,v)\colon v \geqslant 0, u > \frac{\zeta_0(2-\zeta_0)}{p^2}\right\}.$$

Доказательство. Заменой переменных $t \mapsto tq$ и обозначением $h = \frac{p}{q}$ уравнение (7) сводится к уравнению (10) с коэффициентами bq^2 и cq^2. Применяя лемму 7, получаем теорему 5. □

На рис. 4 (а) область осцилляции закрашена.

Случай 2: $p = q$. С помощью следствия 2 получаем

Теорема 6. *При* $p = q$ *уравнение* (7) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \left\{(u,v)\colon u + v > \frac{k_0}{p^2} = \frac{\zeta_0(2-\zeta_0)}{p^2}\right\}.$$

На рис. 4 (б) область осцилляции закрашена.

Случай 3: $p > q$. Очевидно, этот случай сводится к случаю 1, если поменять местами b и c, p и q. В параметрической форме функция $v = \varphi_{22}(u)$ задаётся равенствами

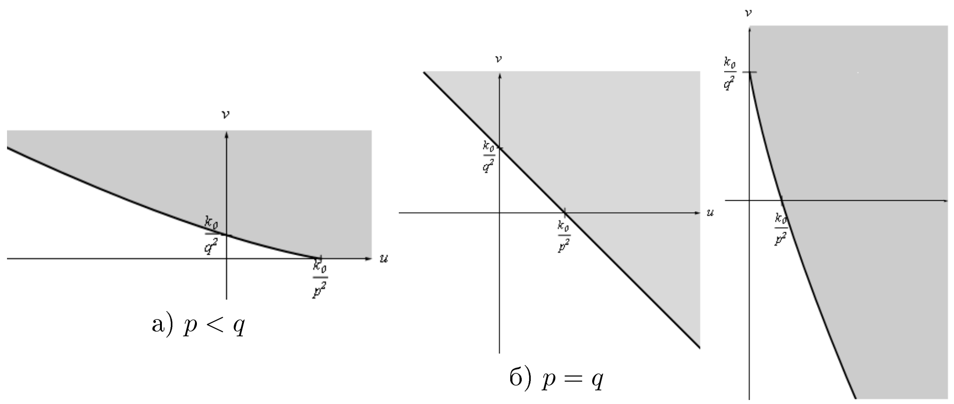
$$u = -\frac{\zeta e^{\zeta p}\left(2e^{\zeta q} - \zeta q - 2\right)}{p(e^{\zeta q}-1) - q(e^{\zeta p}-1)}, \quad v = \frac{\zeta e^{\zeta q}\left(2e^{\zeta p} - \zeta p - 2\right)}{p(e^{\zeta q}-1) - q(e^{\zeta p}-1)}, \quad \zeta \geqslant -\frac{\zeta_0}{q}.$$

Функция $\varphi_{22}(u)$ монотонно убывает при $u \in [0, +\infty)$.

Теорема 7. *При $p > q$ уравнение* (7) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b, c) \in \{(u, v) \colon v > \varphi_{22}(u), u \geqslant 0\}.$$

На рис 4 (в) область осцилляции закрашена.



а) $p < q$ б) $p = q$ в) $p > q$

Рис. 4. Область осцилляции уравнения (7).

4. Уравнение с сосредоточенным и распределённым запаздываниями

Переходим к изучению уравнения (11), для которого структура области осцилляции оказалась наиболее сложной. При $h = 0$ применяем предложение 2. Далее $h \neq 0$. В отличие от уравнения с двумя однотипными запаздываниями (только сосредоточенными, либо только распределёнными), необходимо отдельно исследовать и случай $0 < h < 1$, и случай $h \geqslant 1$.

В данном разделе $j = 1$, $l = 2$, $F(\lambda) = \lambda + be^{-\lambda h} + c\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$,

$$\Delta(\zeta) = e^{-\zeta h}\int_0^1 (h - \xi)e^{-\zeta\xi}\,d\xi = -\frac{e^{-\zeta(1+h)}}{\zeta^2}\left((1-\zeta h)e^{\zeta} - (1-h)\zeta - 1\right).$$

Сначала сформулируем аналоги лемм 1, 3 и 4 при $h = 1$.

Лемма 8. *Пусть $h = 1$ и $b < 0$. Тогда функция F имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство повторяет доказательство леммы 1. □

Лемма 9. *Пусть $h = 1$. Тогда для любого $c \in \mathbb{R}$ найдётся такое $b_0 \in \mathbb{R}_+$, что при всех $b > b_0$ функция F не имеет вещественных корней, и либо*

$$\begin{cases} \zeta + b_0 F_1(\zeta, h) + cF_2(\zeta, 1) = 0, \\ 1 + b_0 \dfrac{d}{d\zeta} F_1(\zeta, h) + c\dfrac{d}{d\zeta} F_2(\zeta, 1) = 0 \end{cases}$$

при некотором $\zeta \in \mathbb{R}$, либо $b_0 = 0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3. □

Таким образом, необходимо изучить систему (12) при $j = 1$, $l = 2$. Для этого будем использовать результаты лемм 3, 4 и 9.

Прежде всего отметим, что $\Delta(0) = h - \frac{1}{2}$, то есть $\Delta(0) = 0$ при $h = \frac{1}{2}$. Другие нули функции Δ являются корнями уравнения

$$h = \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{1 - e^{\zeta}}. \tag{17}$$

При $h \geqslant 1$ уравнение (17) не имеет решений, при $h < 1$ имеет единственное решение; обозначим этот корень через ζ_h^*. Видно, что $\zeta_h^* > 0$ при $h < \frac{1}{2}$, $\zeta_h^* < 0$ при $\frac{1}{2} < h < 1$, $\zeta_h^* = 0$ при $h = \frac{1}{2}$. Отметим также, что если $h_1 < h_2$, то $\zeta_{h_1}^* > \zeta_{h_2}^*$.

Следовательно, $\Delta(\zeta) = 0$ только при $\zeta = \zeta_h^*$. Из известных условий разрешимости линейных алгебраических систем [13, с. 78–79] заключаем, что при $\zeta_h^* \neq -\zeta_0$ система (12) не имеет решений, где ζ_0 — положительный корень уравнения (5). Система (12) имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $h = 1/\zeta_0$ (в этом случае $\zeta_h^* = -\zeta_0$).

Пусть $h = 1/\zeta_0$. Тогда оба уравнения системы (12) обращаются в равенство

$$uhe + \frac{v}{\zeta_0(2 - \zeta_0)} = 1.$$

По лемме 1 $v \geqslant 0$. В силу леммы 3, получаем следующий результат.

Лемма 10. *При $h = 1/\zeta_0$ уравнение* (11) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b, c) \in \left\{(u, v)\colon v > \zeta_0(2 - \zeta_0)(1 - uhe), u \leqslant \frac{1}{eh}\right\} \cup \left\{(u, v)\colon v \geqslant 0, u > \frac{1}{eh}\right\}.$$

Ниже, не нарушая общности, считаем, что $h \neq 1/\zeta_0$.

Для дальнейших рассуждений оказывается удобным ввести следующие обозначения:

$$I_0 = \int_0^1 e^{-\zeta\xi}\, d\xi, \quad I_1 = \int_0^1 \xi e^{-\zeta\xi}\, d\xi, \quad I_2 = \int_0^1 \xi^2 e^{-\zeta\xi}\, d\xi, \quad I_3 = \int_0^1 \xi^3 e^{-\zeta\xi}\, d\xi.$$

Заметим, что $\zeta I_1 + I_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $\zeta = -\zeta_0$, а

$$D(\zeta) \triangleq I_2\left(\zeta^2 I_2 + 4\zeta I_1 + 4I_0\right) = I_2 \int_0^1 (\zeta\xi + 2)^2 e^{-\zeta\xi}\, d\xi > 0$$

при любом ζ. Следовательно, при всех $\zeta \neq -\zeta_0$ определены функции

$$h_1(\zeta) = \frac{\zeta I_2 + \sqrt{D(\zeta)}}{2(\zeta I_1 + I_0)}, \quad h_2(\zeta) = \frac{\zeta I_2 - \sqrt{D(\zeta)}}{2(\zeta I_1 + I_0)}.$$

На рис. 5 показаны функции h_1 и h_2.

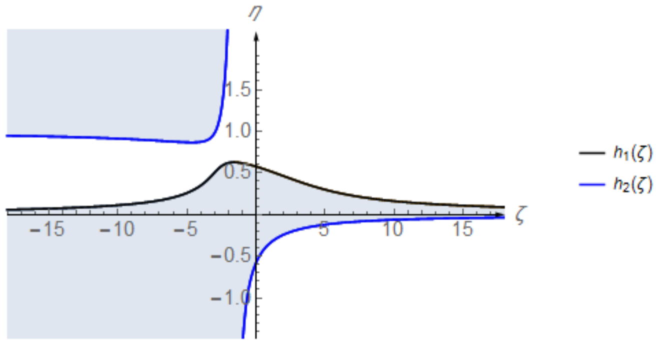


Рис. 5. Функции $\eta = h_1(\zeta)$ и $\eta = h_2(\zeta)$.

Заметим, что $h_1(\zeta) > 0$ при всех ζ. Нетрудно показать, что h_1 имеет единственный экстремум (максимум) $\zeta = -\zeta_0$. Кроме того, $h_1(-\zeta_0) = \frac{1}{\zeta_0} \approx 0.627500$ и $h_1(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to \pm\infty$.

Легко видеть, что $h_2(\zeta) < 0$ при $\zeta > -\zeta_0$ и $h_2(\zeta) \to 1$ при $\zeta \to -\infty$, $h_2(\zeta) \to +\infty$ при $\zeta \to -\zeta_0 - 0$.

Понятно, что $h_2(\zeta) > h_1(\zeta)$ при $\zeta < -\zeta_0$, $h_2(\zeta) < h_1(\zeta)$ при $\zeta > -\zeta_0$.

Определим функцию

$$I(h,\zeta) = h^2(\zeta I_1 + I_0) - h\zeta I_2 - I_2.$$

Лемма 11. *Пусть $\zeta \neq -\zeta_0$. Тогда функция $I(h,\zeta)$ обладает следующими свойствами:*

(1) *Если $h = h_1(\zeta)$ или $h = h_2(\zeta)$ при некотором ζ, то $I(h,\zeta) = 0$ при этом же ζ.*

(2) *Если $h > h_1(\zeta)$ или $h < h_2(\zeta)$ при некотором $\zeta > -\zeta_0$, то $I(h,\zeta) > 0$ при этом же ζ. Если $h_2(\zeta) < h < h_1(\zeta)$ при некотором $\zeta > -\zeta_0$, то $I(h,\zeta) < 0$ при этом же ζ.*

(3) *Если $h < h_1(\zeta)$ или $h > h_2(\zeta)$ при некотором $\zeta < -\zeta_0$, то $I(h,\zeta) < 0$ при этом же ζ. Если $h_1(\zeta) < h < h_2(\zeta)$ при некотором $\zeta < -\zeta_0$, то $I(h,\zeta) > 0$ при этом же ζ.*

(4) *Функция h_2 имеет единственный экстремум (минимум) $\zeta = \zeta_* \approx -4.63899$, $h_2(\zeta_*) = h_* \approx 0.866375$.*

(5) *$I(h,\zeta_h^*) > 0$ при $\zeta_h^* < -\zeta_0$, $I(h,\zeta_h^*) < 0$ при $\zeta_h^* > -\zeta_0$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$I(h,\zeta) \equiv 0. \tag{18}$$

При любом фиксированном ζ уравнение (18) является квадратным относительно h с дискриминантом $D(\zeta) > 0$. Тогда уравнение (18) имеет два непересекающихся решения $h = h_1(\zeta)$ и $h = h_2(\zeta)$. Значит, пункты 1–3 верны.

Дифференцируя уравнение (18) по ζ, получаем

$$\frac{dh}{d\zeta} = \frac{(1+\zeta h)(hI_2 - I_3)}{2h(\zeta I_1 + I_0) - \zeta I_2}.$$

Поскольку $D > 0$, знаменатель не обращается в нуль. Очевидно, $\frac{dh}{d\zeta} = 0$ при $\zeta = -\zeta_0$ или при ζ, являющимися корнями уравнения

$$\frac{I_3^2}{I_2^2}(\zeta I_1 + I_0) - \zeta I_3 - I_2 = 0. \tag{19}$$

С помощью непосредственного подсчёта можно убедиться, что уравнение (19) имеет единственное решение $\zeta_* \approx -4.63899$, а также $h_2(\zeta)$ имеет единственный экстремум (минимум) $\zeta = \zeta_*$. Кроме того, $h_2(\zeta_*) = h_* \approx 0.866375$.

Подставив (17) в (18), получаем

$$I(h, \zeta_h^*) = -\frac{e^{-\zeta_h^*}(2e^{\zeta_h^*} - \zeta_h^* - 2)(e^{2\zeta_h^*} - e^{\zeta_h^*}((\zeta_h^*)^2 + 2) + 1)}{(e^{\zeta_h^*} - 1)^2(\zeta_h^*)^3},$$

и непосредственным подсчётом убеждаемся в справедливости пункта 5. □

На рис. 5 закрашено множество таких точек (ζ, h), что $I(h, \zeta) < 0$, на границах этого множества $I(h, \zeta) = 0$.

Функция g выражается через функции I и Δ следующим образом:

$$g(\zeta) = \frac{e^{-\zeta h}}{\Delta(\zeta)} I(h, \zeta).$$

Заметим, что если $\zeta = -\zeta_0$, то $g(-\zeta_0) = 2\,(1 - 1/\zeta_0) > 0$. При $\zeta \neq -\zeta_0$ для определения знака g можно использовать лемму 11.

Случай $h \geqslant 1$. Тогда $\Delta(\zeta) > 0$ при всех ζ и для каждой фиксированной пары ζ, h система (12) имеет единственное решение

$$u = \frac{\int_0^1 (\zeta\xi + 1)e^{-\zeta\xi}\, d\xi}{\Delta(\zeta)}, \quad v = -\frac{(1 + \zeta h)e^{-\zeta h}}{\Delta(\zeta)}. \tag{20}$$

По леммам 1 и 8 $u \geqslant 0$ при $h \geqslant 1$. Из $u \geqslant 0$ вытекает, что

$$\int_0^1 (\zeta\xi + 1)e^{-\zeta\xi}\, d\xi = \frac{2}{\zeta} e^{-\zeta} \left(e^{\zeta} - 1 - \frac{\zeta}{2} \right) \geqslant 0.$$

Тогда $\zeta \in [-\zeta_0, +\infty)$, где ζ_0 — положительный корень уравнения (5).

При $h \geqslant 1$ и $\zeta \geqslant -\zeta_0$, в силу леммы 11, имеем $I(h, \zeta) > 0$, то есть $g(\zeta) > 0$. Из леммы 5 вытекает, что кривая Γ, определённая на множестве $\zeta \geqslant -\zeta_0$ равенствами (20), задаёт на плоскости (u, v) монотонно убывающую на $u \in [0, +\infty)$ функцию $v = \varphi_{03}(u)$. Теперь легко дать описание области осцилляции уравнения (11) при $h \geqslant 1$.

Лемма 12. *При* $h \geqslant 1$ *уравнение* (11) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b, c) \in \{(u, v) \colon v > \varphi_{03}(u), u \geqslant 0\}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6. □

Случай $0 < h < 1$. Тогда $\Delta(\zeta) < 0$ при $\zeta < \zeta_h^*$, $\Delta(\zeta) > 0$ при $\zeta > \zeta_h^*$. Таким образом, $\Delta(\zeta) = 0$ только при $\zeta = \zeta_h^*$, но тогда система (12) не имеет решения. По лемме 1 $v \geqslant 0$ при $h < 1$. Заметим, что $\Delta\left(-\frac{1}{h}\right) > 0$ при $\frac{1}{h} < \zeta_0$, $\Delta\left(-\frac{1}{h}\right) < 0$ при $\frac{1}{h} > \zeta_0$. Следовательно, неравенство $v \geqslant 0$ выполняется только, если $\zeta \in \left[-\frac{1}{h}, \zeta_h^*\right)$ при $h < 1/\zeta_0$ или $\zeta \in \left(\zeta_h^*, -\frac{1}{h}\right]$ при $1/\zeta_0 < h < 1$.

Случай $h_* < h < 1$. Напомним, что h_* введено в п. 4 леммы 11. Прямая $h = const$ и кривая $h = h_2(\zeta)$ пересекаются в двух точках, обозначим их ζ' и ζ''.

Очевидно, $\zeta_h^* < -\zeta_0 < -\frac{1}{h}$. Принимая во внимание пункты 3 и 5 леммы 11, получаем $\zeta', \zeta'' \in \left(\zeta_h^*, -\frac{1}{h}\right]$. Следовательно, $g(\zeta') = g(\zeta'') = 0$ при $\zeta', \zeta'' \in \left(\zeta_h^*, -\frac{1}{h}\right]$.

Из (13) вытекает, что

$$\frac{dv}{du} = -\frac{F_1(\zeta, h)}{F_2(\zeta, 1)} \quad \text{при } \zeta \neq \zeta', \zeta'',$$

$$\frac{d}{d\zeta}\left(-\frac{F_1(\zeta, h)}{F_2(\zeta, 1)}\right) = \frac{\Delta(\zeta)}{(F_2(\zeta, 1))^2} > 0 \quad \text{при } \zeta \in \left(\zeta_h^*, -\frac{1}{h}\right].$$

Таким образом, $\frac{dv}{du} < 0$ при $\zeta \in \left(\zeta_h^*, -\frac{1}{h}\right]$, $\zeta \neq \zeta', \zeta''$ и $\left|\frac{dv}{du}\right|$ убывает при возрастании ζ. Используя лемму 2, получаем, что кривая Γ, определённая на множестве $\zeta \in \left(\zeta_h^*, -\frac{1}{h}\right]$ равенствами (20), имеет одну точку самопересечения и получающаяся «петля» лежит под кривой, определённой на множестве $\zeta \in (\zeta_h^*, \zeta_1] \cup \left[\zeta_2, -\frac{1}{h}\right]$ равенствами (20), то есть под частью кривой Γ без «петли». Значения ζ_1 и ζ_2 определяют точку самопересечения.

Итак, в силу леммы 5, кривая, определённая на множестве $\zeta \in (\zeta_h^*, \zeta_1] \cup \left[\zeta_2, -\frac{1}{h}\right]$ равенствами (20), задаёт на плоскости (u, v) монотонно убывающую на $u \in \left(-\infty, \frac{1}{eh}\right]$ функцию $v = \varphi_{04}(u)$. Теперь легко дать описание области осцилляции уравнения (11) при $h_* < h < 1$.

Лемма 13. *При* $h_* < h < 1$ *уравнение* (11) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b, c) \in \left\{(u, v)\colon v > \varphi_{04}(u), u \leqslant \frac{1}{eh}\right\} \cup \left\{(u, v)\colon v \geqslant 0, u > \frac{1}{eh}\right\}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6. □

Случай $h = h_*$. Здесь $\zeta' = \zeta'' = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_*$.

Случай $\frac{1}{\zeta_0} < h < h_*$. Используя $h_2(\zeta) \geqslant h_*$ при $\zeta < -\zeta_0$, $h_2(\zeta) < 0$ при $\zeta > -\zeta_0$, $h_1(\zeta) \leqslant \frac{1}{\zeta_0}$ и лемму 11, получаем, что $g(\zeta) \neq 0$ при всех ζ.

Значит, в силу леммы 5, кривая Γ, определённая на множестве $\zeta \in \left(\zeta_h^*, -\frac{1}{h}\right]$ равенствами (20), задаёт на плоскости (u, v) монотонно убывающую на $u \in \left(-\infty, \frac{1}{eh}\right]$ функцию $v = \varphi_{05}(u)$. Теперь легко дать описание области осцилляции уравнения (11) при $\frac{1}{\zeta_0} < h \leqslant h_*$.

Лемма 14. *При* $\frac{1}{\zeta_0} < h \leqslant h_*$ *уравнение* (11) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b, c) \in \left\{(u, v)\colon v > \varphi_{05}(u), u \leqslant \frac{1}{eh}\right\} \cup \left\{(u, v)\colon v \geqslant 0, u > \frac{1}{eh}\right\}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6. □

Случай $h < \frac{1}{\zeta_0}$. Прямая $h = const$ и кривая $h = h_1(\zeta)$ пересекаются в двух точках, обозначим их ζ' и ζ'', для определённости пусть $\zeta' < -\zeta_0 < \zeta''$. Очевидно, $-\frac{1}{h} < -\zeta_0 < \zeta_h^*$. Принимая во внимание пункты 2 и 5 леммы 11, получаем $\zeta'' > \zeta_h^*$. Подставляя $\zeta = -\frac{1}{h}$ в (18), имеем $I(h, -1/h) < 0$. Следовательно, $\zeta' < -\frac{1}{h}$. Тогда $g(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \in \left[-\frac{1}{h}, \zeta_h^*\right)$. Значит, в силу леммы 5, кривая Γ, определённая на множестве $\zeta \in \left[-\frac{1}{h}, \zeta_h^*\right)$ равенствами (20), задаёт на плоскости (u, v) монотонно убывающую на $u \in \left(-\infty, \frac{1}{eh}\right]$ функцию $v = \varphi_{06}(u)$. Теперь легко дать описание области осцилляции уравнения (11) при $h < \frac{1}{\zeta_0}$.

Лемма 15. *При* $h < \frac{1}{\zeta_0}$ *уравнение* (11) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \left\{(u,v)\colon v > \varphi_{06}(u), u \leqslant \frac{1}{eh}\right\} \cup \left\{(u,v)\colon v \geqslant 0, u > \frac{1}{eh}\right\}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6. □

Вернёмся к уравнению (8). Для полного описания его области осцилляции необходимо рассмотреть пять случаев.

Случай 1: $q > p\zeta_0$. Обозначим $\varphi_{31}(u) = \frac{1}{q^2}\varphi_{06}(uq)$, где φ_{06} определена равенствами (20) при $h = \frac{p}{q}$. Из свойств φ_{06} следует, что функция $\varphi_{31}(u)$ монотонно убывает при $u \in \left(-\infty, \frac{1}{ep}\right]$. В параметрической форме функция $v = \varphi_{31}(u)$ задаётся равенствами

$$u = \frac{\zeta e^{\zeta p}\left(2e^{\zeta q} - \zeta q - 2\right)}{1 + (q-p)\zeta + e^{\zeta q}(\zeta p - 1)}, v = -\frac{\zeta^2 e^{\zeta q}(\zeta p + 1)}{1 + (q-p)\zeta + e^{\zeta q}(\zeta p - 1)}, \zeta \in \left[-\frac{1}{p}, \frac{\zeta^*_{p/q}}{q}\right).$$

Теорема 8. *При* $q > p\zeta_0$ *уравнение* (8) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \left\{(u,v)\colon v > \varphi_{31}(u), u \leqslant \frac{1}{ep}\right\} \cup \left\{(u,v)\colon v \geqslant 0, u > \frac{1}{ep}\right\}.$$

Доказательство. Заменой переменных $t \mapsto tq$ и обозначением $h = \frac{p}{q}$ уравнение (8) сводится к уравнению (11) с коэффициентами bq и cq^2. Применяя лемму 15, получаем теорему 8. □

На рис. 6 (а) область осцилляции закрашена.

Случай 2: $q = p\zeta_0$.

Теорема 9. *При* $q = p\zeta_0$ *уравнение* (8) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \left\{(u,v)\colon v > \frac{1}{q^2}\zeta_0(2-\zeta_0)(1 - upe), u \leqslant \frac{1}{ep}\right\} \cup \left\{(u,v)\colon v \geqslant 0, u > \frac{1}{ep}\right\}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8. □

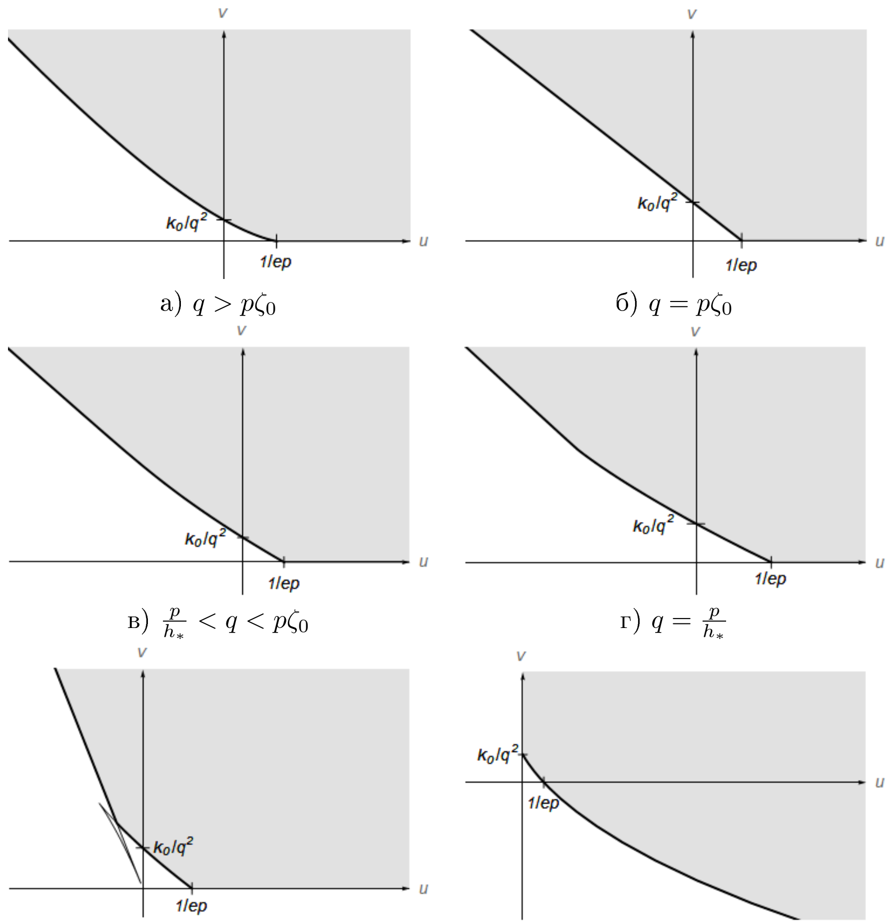
На рис. 6 (б) область осцилляции закрашена. Границами являются прямые.

Случай 3: $\frac{p}{h_*} \leqslant q < p\zeta_0$. Обозначим $\varphi_{32}(u) = \frac{1}{q^2}\varphi_{05}(uq)$, где φ_{05} определена равенствами (20) при $h = \frac{p}{q}$. Из свойств φ_{05} следует, что функция $\varphi_{32}(u)$ монотонно убывает при $u \in \left(-\infty, \frac{1}{ep}\right]$. В параметрической форме функция $v = \varphi_{32}(u)$ задаётся равенствами

$$u = \frac{\zeta e^{\zeta p}\left(2e^{\zeta q} - \zeta q - 2\right)}{1 + (q-p)\zeta + e^{\zeta q}(\zeta p - 1)}, v = -\frac{\zeta^2 e^{\zeta q}(\zeta p + 1)}{1 + (q-p)\zeta + e^{\zeta q}(\zeta p - 1)}, \zeta \in \left(\frac{\zeta^*_{p/q}}{q}, -\frac{1}{p}\right].$$

Теорема 10. *При* $\frac{p}{h_*} \leqslant q < p\zeta_0$ *уравнение* (8) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \left\{(u,v)\colon v > \varphi_{32}(u), u \leqslant \frac{1}{ep}\right\} \cup \left\{(u,v)\colon v \geqslant 0, u > \frac{1}{ep}\right\}.$$



а) $q > p\zeta_0$ б) $q = p\zeta_0$

в) $\frac{p}{h_*} < q < p\zeta_0$ г) $q = \frac{p}{h_*}$

д) $p < q < \frac{p}{h_*}$ е) $q \leqslant p$

Рис. 6. Область осцилляции уравнения (8).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8. □

На рис. 6 (в, г) область осцилляции закрашена.

Случай 4: $p < q < \frac{p}{h_*}$. Обозначим $\varphi_{33}(u) = \frac{1}{q^2}\varphi_{04}(uq)$, где φ_{04} определена равенствами (20) при $h = \frac{p}{q}$. Из свойств φ_{04} следует, что функция $\varphi_{33}(u)$ монотонно убывает при $u \in \left(-\infty, \frac{1}{ep}\right]$. В параметрической форме функция $v = \varphi_{33}(u)$ задаётся равенствами

$$u = \frac{\zeta e^{\zeta p}\left(2e^{\zeta q} - \zeta q - 2\right)}{1 + (q-p)\zeta + e^{\zeta q}(\zeta p - 1)},$$
$$v = -\frac{\zeta^2 e^{\zeta q}(\zeta p + 1)}{1 + (q-p)\zeta + e^{\zeta q}(\zeta p - 1)},\ \zeta \in \left(\frac{\zeta^*_{p/q}}{q}, \frac{\zeta_1}{q}\right] \cup \left[\frac{\zeta_2}{q}, -\frac{1}{p}\right].$$

Теорема 11. *При $p < q < \frac{p}{h_*}$ уравнение* (8) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \left\{(u,v)\colon v > \varphi_{33}(u), u \leqslant \frac{1}{ep}\right\} \cup \left\{(u,v)\colon v \geqslant 0, u > \frac{1}{ep}\right\}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8. □

На рис. 6 (д) область осцилляции закрашена. Подчеркнём, что существование «петли» оказалось совершенной неожиданностью, ни в одной из многочисленных работ по осцилляции ФДУ не говорилось об этом эффекте.

Случай 5: $q \leqslant p$. Обозначим $\varphi_{34}(u) = \frac{1}{q^2}\varphi_{03}(uq)$, где φ_{03} определена равенствами (20) при $h = \frac{p}{q}$. Из свойств φ_{03} следует, что функция $\varphi_{34}(u)$ монотонно убывает при $u \in [0, +\infty)$. В параметрической форме функция $v = \varphi_{34}(u)$ задаётся равенствами

$$u = \frac{\zeta e^{\zeta p}\left(2e^{\zeta q} - \zeta q - 2\right)}{1 + (q-p)\zeta + e^{\zeta q}(\zeta p - 1)}, v = -\frac{\zeta^2 e^{\zeta q}(\zeta p + 1)}{1 + (q-p)\zeta + e^{\zeta q}(\zeta p - 1)}, \zeta \in \left[-\frac{\zeta_0}{q}, +\infty\right).$$

Теорема 12. *При $q \leqslant p$ уравнение* (8) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда*

$$(b,c) \in \{(u,v)\colon v > \varphi_{34}(u), u \geqslant 0\}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8. □

На рис. 6 (е) область осцилляции закрашена.

Замечание 1. Для уравнения (8), в отличие от всех рассмотренных ранее уравнений, оказалось, что кривая Γ, с помощью которой задаётся граница области осцилляции, имеет самопересечения (см. рис. 6 (д)). Насколько нам известно, данное явление ранее не было обнаружено. Можно ожидать, что при увеличении количества запаздываний такие «петли» будут по-прежнему встречаться.

5. Несколько следствий: достаточные признаки

Сформулируем несколько легко проверяемых достаточных признаков осцилляции.

Следствие 3 ([5], p. 38, Theorem 2.2.1)**.** *Пусть $b, c \in \mathbb{R}_+$ и*

$$bp + cq > \frac{1}{e}.$$

Тогда уравнение (6) *является осциллирующим.*

Напомним, что $k_0 = \zeta_0(1 - \zeta_0)$, где ζ_0 — положительный корень уравнения (5).

Следствие 4. *Пусть $b, c \in \mathbb{R}_+$ и*

$$bp^2 + cq^2 > k_0 = \zeta_0(1 - \zeta_0).$$

Тогда уравнение (7) *является осциллирующим.*

Доказательство. Следствия 3 и 4 доказываются одинаково. Рассмотрим уравнения (9) и (10). Из системы (13) получаем

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{1}{F_l^2(\zeta,1)}\frac{\Delta(\zeta)}{du/d\zeta}. \tag{21}$$

В предыдущих разделах показано, что при $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$ выполняется $du/d\zeta < 0$, $\Delta(\zeta) < 0$. Следовательно, $\frac{d^2v}{du^2} > 0$. Значит, кривая $\{u = u(\zeta), v = v(\zeta)\}$ выпукла вниз. Далее возвращаясь к уравнениям (6) и (7), получаем следствия 3 и 4. $\square$

Следствие 5. *Пусть* $b, c \in \mathbb{R}_+$ *и*

$$bpe + \frac{cq^2}{k_0} > 1.$$

Тогда уравнение (8) *является осциллирующим.*

Доказательство. Пользуясь теоремой 9, получаем, что при $q = p\zeta_0$ следствие 5 является необходимым и достаточным признаком осцилляции уравнения (8).

Рассмотрим уравнение (11). Если $h > \frac{1}{\zeta_0}$ и $u, v \geqslant 0$, то $du/d\zeta > 0$, $\Delta(\zeta) > 0$. Если $h < \frac{1}{\zeta_0}$ и $u, v \geqslant 0$, то $du/d\zeta < 0$, $\Delta(\zeta) < 0$. Из (21) имеем $\frac{d^2v}{du^2} > 0$. Значит, кривая $\{u = u(\zeta), v = v(\zeta)\}$ выпукла вниз. Далее возвращаясь к уравнению (8), получаем следствие 5. $\square$

Замечание 2. Условия осцилляции, сформулированные в следствиях 3, 4, 5, являются точными. При $q = p$ следствия 3, 4 являются необходимыми и достаточными признаками осцилляции уравнений (6) и (7) соответственно. При $q = p\zeta_0$ следствие 5 является необходимым и достаточным признаком осцилляции уравнения (8).

Заключение

В данной работе найдены необходимые и достаточные условия осцилляции решений линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями. Наиболее сложной оказалась ситуация, когда одно запаздывание сосредоточенное, а другое — распределённое. В этом случае выяснилось, что кривая Г, с помощью которой задаётся граница области осцилляции, может иметь точки самопересечения: образуется «петля». Подобное явление встречается при исследовании устойчивости уравнений с последействием, однако при изучении осцилляции, по-видимому, обнаружено впервые. Вероятно, при увеличении количества запаздываний вид границы области осцилляции будет только усложняться. Кроме того, следует ожидать появления большего числа «петель», наложения их друг на друга.

В дальнейшем представляется интересным изучение поведения решений вне области осцилляции, особенно при попадании точки (b, c) на «петлю». Результаты работы также могут быть использованы при получении новых признаков устойчивости дифференциальных уравнений с последействием.

Мы благодарим всех участников Пермского семинара по функционально-дифференциальным уравнениям за внимание к работе и плодотворное обсуждение результатов, представленных в данной статье.

References

[1] A.D. Myshkis, *Linear Differential Equations with Delayed Argument*, Nauka, Moskow, 1972. Zbl 0261.34040

[2] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New York, 1980. Zbl 0459.46001

[3] M.I. Tramov, *Conditions for the oscillation of the solutions of first order differential equations with retarded argument*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **1975**:3(154) (1975), 92—96. Zbl 0319.34070

[4] A.D. Myshkis, *On solutions of linear homogeneous differential equations of the first order of stable type with a retarded argument*, Mat. Sb., N. Ser. **28(70)**:3 (1951), 641–658. Zbl 0042.32802

[5] I.Györi, G. Ladas, *Oscillation theory of delay differential equations with applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991. Zbl 0780.34048

[6] T. Sabatulina, V. Malygina, *On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2014**, Paper No. 61 (2014), 1–16. Zbl 1324.34128

[7] V.I. Zubov, *On the theory of linear stationary systems with lagging arguments*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **1958**:6(7) (1958), 86-–95. Zbl 0122.11201

[8] S.A. Gusarenko, A.I. Domoshnitskii, *Asymptotic and oscillation properties of first order linear scalar functional-differential equations*, Differ. Equations, **25**:12 (1989), 1480–1491; translation from Differ. Uravn., **25**:12 (1989), 2090–2103. Zbl 0726.45011

[9] R.G. Koplatadze, T.A. Chanturiya, *Oscillatory and monotone solutions of differential equations of first order with deviating argument*, Differ. Uravn., **18**:8 (1982), 1463–1465. Zbl 0496.34044

[10] V.V. Malygina, T.L. Sabatulina, *The fixed sign property of solutions and stability of linear differential equations with varying distributed delay*, Russ. Math. (Iz. VUZ) **52**:8 (2008), 61–64. Zbl 1180.34066

[11] T.L. Sabatulina, *Oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equations*, J. Math. Sci. (N. Y.), **230**:5 (2018), 766—769. Zbl 1392.34079

[12] V.V. Malygina, *On construction of oscillation domain for autonomous differential equations with delay*, Proceedings of VIII international conference «Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology», Voronej (2015), 223—225.

[13] A.G. Kurosh, *Course of higher algebra*, Nauka, Moscow, 1975.

Tatyana Leonidovna Sabatulina
Perm National Research Polytechnic University,
29, Komsomolskiy ave.,
Perm, 614990, Russia
Email address: tlsabatulina@list.ru

Anton Sergeyevich Balandin
Perm National Research Polytechnic University,
29, Komsomolskiy ave.,
Perm, 614990, Russia
Email address: balandin-anton@yandex.ru