S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1766–1786 (2020) УДК 519.21

DOI 10.33048/semi.2020.17.120 MSC 60K05,60F10

ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ АРИФМЕТИЧЕСКИХ МНОГОМЕРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ КРАМЕРА

А.В. ЛОГАЧЁВ, А.А. МОГУЛЬСКИЙ

Abstract. We continue to study the compound renewal processes under the Cramèr moment condition, which was started by A.A. Borovkov and A.A. Mogulskii (2013). In the present paper we study arithmetic multidimensional compound renewal process, for which the "control – ling" random vector $\xi = (\tau, \boldsymbol{\zeta})$ ($\tau > 0$ determines the distance between the jumps, $\boldsymbol{\zeta}$ determines the value of jumps of the compound renewal process) has an arithmetic distribution with light tails. For these processes we propose wide conditions (close to necessary), under which we can find exact asymptotics in local limit theorems for finite – dimensional increments.

Keywords: compound multidimensional arithmetic renewal process, large deviations, moderate deviations, renewal measure, Cramer's condition, rate function, local theorems for finite – dimensional increments.

1. Введение. Постановка задачи.

Условимся элементы d-мерного Евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ при $d \geq 1$ обозначать полужирными буквами, например, $\boldsymbol{x} = (x_{(1)}, \dots, x_{(d)})$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{(1)}, \dots, \mu_{(d)})$. Скалярное произведение для элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} := x_{(1)}y_{(1)} + \dots + x_{(d)}y_{(d)}.$$

Logachov, A.V., Mogulskii, A.A., Local theorems for finite – dimensional increments of compound multidimensional arithmetic renewal processes with light tails.

Работа поддержана РНФ (грант 18-11-00129).

Поступила 9 апреля 2020 г., опубликована 26 октября 2020 г.

Норму в $\mathbb{R}^d$ обозначим $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}$. Случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$ тоже будем обозначать полужирными буквами, например, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(d)})$. Через

$$\boldsymbol{\xi} = (\tau, \boldsymbol{\zeta}) = (\tau, \zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(d)})$$

будем обозначать случайный вектор в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Рассмотрим последовательность

$$\{\boldsymbol{\xi}_k\}_{k=0}^{\infty} = \{(\tau_k, \boldsymbol{\zeta}_k)\}_{k=0}^{\infty} \tag{1.1}$$

независимых случайных векторов в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$, таких, что $\tau_0 = 0$, $\boldsymbol{\zeta}_0 = \mathbf{0}$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_k > 0$ при $k \geq 2$. Пусть векторы $\boldsymbol{\xi}_k = (\tau_k, \boldsymbol{\zeta}_k)$ при $k \geq 2$ имеют общее распределение с вектором $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \boldsymbol{\zeta})$. Обозначим

$$T_n := \sum_{k=0}^{n} \tau_k, \quad \boldsymbol{Z}_n := \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{\zeta}_k, \quad \mathbf{S}_n = (T_n, \boldsymbol{Z}_n) := \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{\xi}_k \quad \text{при} \quad n \geq 0,$$

так что $T_0 = 0$, $\boldsymbol{Z}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{S}_0 = (0, \mathbf{0})$. Пусть $\nu(0) = \eta(0) := 0$. При $t > 0$ положим

$$\nu(t) = \max\{k \geq 0 : \ T_k < t\}, \quad \eta(t) := \min\{k \geq 0 : \ T_k \geq t\}, \tag{1.2}$$

так что $\eta(t) = \nu(t) + 1$ при $t > 0$.

Первый и второй обобщенные процессы восстановления (о.п.в.) $\boldsymbol{Z}(t)$, $\boldsymbol{Y}(t)$, $t \geq 0$, определяются равенствами (см., например, [1], [11])

$$\boldsymbol{Z}(t) := \boldsymbol{Z}_{\nu(t)}, \quad \boldsymbol{Y}(t) := \boldsymbol{Z}_{\eta(t)}, \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

Заметим, что оба о.п.в. и их непрерывные как слева так и справа модификации появлялись как в отечественной так и иностранной литературе ранее. В иностранной литературе процесс $\boldsymbol{Z}(t)$ называется continuous time random walk, процесс $\boldsymbol{Y}(t)$ называется oracle continuous time random walk (см, например, [26]). Информацию о приложениях о.п.в. в теории надежности, экономике и статистической физике можно найти в [27], [28], [29], соответственно.

Стандартная общепринятая модель о.п.в. предполагает, что время τ_1 появления первого скачка и величина $\boldsymbol{\zeta}_1$ этого скачка имеет совместное распределение, отличное, вообще говоря, от совместного распределения $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ (см., например, [18]). Это реализуется, например, для о.п.в. со стационарными приращениями.

Если $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \stackrel{d}{=} (\tau, \boldsymbol{\zeta})$ (или, что то же самое, $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \stackrel{d}{=} (0, \mathbf{0})$), то процессы $\boldsymbol{Z}(t)$, $\boldsymbol{Y}(t)$ будем называть *однородными о.п.в.*; в противном случае — *неоднородными.*

Итак, распределения двух случайных векторов $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$, $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \boldsymbol{\zeta})$ *полностью определяют* распределения первого о.п.в. $\boldsymbol{Z}(t)$; $t \geq 0$ и второго о.п.в. $\boldsymbol{Y}(t)$; $t \geq 0$. На событии

$$\{T_k < t \leq T_{k+1}\} \quad \text{при} \quad k \geq 0$$

выполняется $\nu(t) = k$, $\boldsymbol{Z}(t) = \boldsymbol{Z}_k$, $\eta(t) = k+1$, $\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{Z}_{k+1}$. Следовательно, пары ступенчатых процессов $\nu(t)$, $\boldsymbol{Z}(t)$ и $\eta(t)$, $\boldsymbol{Y}(t)$ непрерывны слева при $t > 0$.

В настоящей работе, как и в [8], [9], [12] будем предполагать, что для случайных векторов $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$, $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \boldsymbol{\zeta})$, определяющих о.п.в. $\boldsymbol{Z}(t)$ выполнено моментное условие Крамера в следующем виде

$[\mathbf{C}_0]$. *Для некоторого* $\delta > 0$

$$\mathbf{E}e^{\delta|\boldsymbol{\xi}_1|} < \infty, \quad \mathbf{E}e^{\delta|\boldsymbol{\xi}|} < \infty.$$

В работах, где при условии $[\mathbf{C}_0]$ речь идет о точной асимптотике вероятностей больших уклонений о.п.в. $\boldsymbol{Z}(t)$, $\boldsymbol{Y}(t)$, обычно рассматривают либо *нерешетчатый случай* (выполнено структурное условие $[\mathbf{R}]$), либо *арифметический случай* (выполнено структурное условие $[\mathbf{Z}]$) (см. краткий исторический обзор ниже). Структурные условия формулируются в терминах характеристических функций

$$f(\boldsymbol{u}) := \mathbf{E}e^{i\boldsymbol{u}\boldsymbol{\xi}}, \quad f_1(\boldsymbol{u}) := \mathbf{E}e^{i\boldsymbol{u}\boldsymbol{\xi}_1}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{d+1},$$

где, напомним, $\boldsymbol{\alpha\beta}$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{d+1}$.

$[\mathbf{R}]$(Условие нерешетчатости). *Для любого $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{d+1}$, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, выполняется неравенство $|f(\boldsymbol{u})| < 1$.*

$[\mathbf{Z}]$(Условие арифметичности). *Для любого $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^{d+1}$ выполнены равенства $f(2\pi\boldsymbol{u}) = 1$, $f_1(2\pi\boldsymbol{u}) = 1$ и для любого $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{d+1}\backslash\mathbb{Z}^{d+1}$ — неравенство $|f(2\pi\boldsymbol{u})| < 1$.*

Заметим попутно, что если для случайного вектора $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \boldsymbol{\zeta})$ выполнено условие $[\mathbf{R}]$ (или $[\mathbf{Z}]$), то этот вектор не может быть вырожденным в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$, т.е. с вероятностью 1 лежать на плоскости

$$L_{\mathbf{n},c} := \{(u, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{d+1} : \quad n_1 u + \mathbf{n}_2\mathbf{v} = c\},$$

определяемой единичной нормалью $\mathbf{n} = (n_1, \mathbf{n}_2)$ и константой c. Действительно, если выполнено $[\mathbf{R}]$ и если $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} \in L_{\mathbf{n},c}) = 1$, то можно положить $\boldsymbol{u} = (u_1, \boldsymbol{u}_2) := (n_1, \mathbf{n}_2) \neq \mathbf{0}$. Тогда для этого $\boldsymbol{u}$ имеем равенство $|f(\boldsymbol{u})| = \left|e^{ic}\right| = 1$, которое в силу условия $[\mathbf{R}]$ невозможно. Если же выполнено $[\mathbf{Z}]$ и если $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} \in L_{\mathbf{n},c}) = 1$, то можно выбрать число $r > 0$ достаточно малым, так что выполняется $\boldsymbol{u} = (u_1, \boldsymbol{u}_2) := (rn_1, r\mathbf{n}_2) \notin \mathbb{Z}^{d+1}$. Тогда для этого $\boldsymbol{u} \notin \mathbb{Z}^{d+1}$ имеем равенство $|f(2\pi\boldsymbol{u})| = \left|e^{i2\pi rc}\right| = 1$, которое в силу условия $[\mathbf{Z}]$ невозможно.

Отметим еще, что если выполнено условие $[\mathbf{Z}]$, то все значения векторов $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$ и $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ лежат на целочисленной решетке $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^d)$. Поэтому для любого $n \geq 0$

$$\mathbf{P}(S_n \in \mathbb{Z}^{d+1}) = 1.$$

Приведем краткий исторический обзор предельных теорем для о.п.в. Центральную предельную теорему для о.п.в. (как и сходимость к устойчивым распределениям) можно найти в [19]. Принцип больших уклонений (п.б.у.) (грубая асимптотика) для о.п.в. в фазовом пространстве получен в [3], [13], [20]–[25]. Подробное сравнение этих результатов содержится в работе [25]. Точная асимптотика для нерешетчатых о.п.в. изучалась в [8], [9] (одномерный случай) и [14]–[16] (многомерный случай); для арифметических о.п.в. — в [12] (одномерный случай) и в [17] (многомерный случай).

Сформулирует теперь проблему, которой посвящена настоящая работа. Это получение точных локальных предельных теорем в арифметическом случае для конечномерных приращений о.п.в.

Ранее п.б.у. для конечномерных приращений о.п.в. с одномерным фазовым пространством (т.е. грубый вариант поставленной выше проблемы) был сформулирован в [3]. В работе [25] предложено более наглядное, чем в [3], условие, при котором получен п.б.у. для конечномерных приращений в многомерном случае; при этом предложен метод, мало зависящий от размерности фазового пространства и порядка конечномерных приращений. Этот метод получил свое развитие в настоящей работе (см. раздел (3.1)).

В работе [9] предложены условия, при которых в одномерном случае $d = 1$ доказана интегро – локальная теорема для конечномерных приращений нерешетчатого о.п.в. $Z(t)$ в области больших уклонений (б.у.). Однако условия, при которых доказана эта теорема, как и метод ее получения, не удается адекватно распространить на многомерный случай $d \geq 2$. В настоящей работе предложен метод, позволяющий в широких условиях доказать локальную теорему для конечномерных приращений *многомерного арифметического* о.п.в. $\boldsymbol{Z}(t)$ в области больших уклонений. Есть все основания надеяться, что этот метод приведет к успеху и в более сложной задаче доказательства интегро – локальной теоремы для конечномерных приращений *многомерного нерешетчатого* о.п.в. Авторы планируют посвятить этому вопросу отдельную публикацию.

Как показано в работах [8], [9], [12], [14]–[17], локальные (интегро – локальные) теоремы в области больших уклонений для процессов $\boldsymbol{Z}(t)$ и $\boldsymbol{Y}(t)$ могут, вообще говоря, существенно различаться и "требовать" различных условий. Поэтому второй о.п.в. $\boldsymbol{Y}(t)$, как правило, изучается отдельно от первого о.п.в. $\boldsymbol{Z}(t)$ (см. [12], [14]–[17]). Однако в задаче, которая рассматривается в настоящей работе, и в условиях, которые эта задача "требует", различия между процессами $\boldsymbol{Z}(t)$ и $\boldsymbol{Y}(t)$ "минимальны", и сводятся к различиям в определениях функций, играющих роль констант в финальных асимптотических представлениях. С другой стороны, методы, которые будут использоваться для изучения первого о.п.в. $\boldsymbol{Z}(t)$, полностью подходят к изучению второго о.п.в. $\boldsymbol{Y}(t)$. Поэтому, во избежание повторения громоздких формул, в оставшейся части работы мы ограничимся изучением только первого о.п.в. $\boldsymbol{Z}(t)$, так что нет причин называть его "первым".

Поскольку арифметический о.п.в. $\boldsymbol{Z}(t)$ меняется только в целые моменты $t = 1, 2, \ldots$, и при этом непрерывен слева, то для любого не целого аргумента $t > 0$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{Z}(t) = \boldsymbol{Z}\left([t] + 1\right),$$

где, как обычно, через $[t]$ обозначена целая часть неотрицательного числа t. Поэтому мы будем рассматривать только целые значения аргумента $t = n \in 0 \cup \mathbb{N}$, т.е. будем изучать случайную последовательность

$$\{\boldsymbol{Z}(n)\}_{n \geq 0}. \tag{1.4}$$

Это несколько упростит обозначения, формулировки и не приведет к потере общности рассмотрений.

Можно рассматривать и непрерывную справа версию процесса $\boldsymbol{Z}(t)$, положив

$$\boldsymbol{Z}_+(t) := \boldsymbol{Z}(t + 0), \ t \geq 0.$$

Иначе говоря, для определения непрерывной справа версий процесса $\boldsymbol{Z}(t)$ достаточно рассмотреть непрерывный справа функционал

$$\nu_+(t) = \max\{k \geq 0 : \ T_k \leq t\}, \ t > 0, \tag{1.5}$$

и при $t > 0$ положить

$$\boldsymbol{Z}_+(t) := \boldsymbol{Z}_{\nu_+(t)}.$$

Таким образом, наряду с последовательностью (1.4) можно изучать последовательность

$$\{\boldsymbol{Z}_+(n)\}_{n \geq 0}. \tag{1.6}$$

Однако изучение последовательностей (1.6) легко сводится к изучению последовательностей (1.4), поскольку (см. определения (1.2), (1.5))

$$\nu_+(n) = \nu(n+1),$$

и, поэтому,

$$\boldsymbol{Z}_+(n) = \boldsymbol{Z}(n+1). \tag{1.7}$$

Итак, в настоящей работе изучаются многомерные арифметические о.п.в. $\boldsymbol{Z}(n)$ при выполнении моментного условия $[\mathbf{C}_0]$ и структурного условия $[\mathbf{Z}]$. Условимся, что: *условия* $[\mathbf{C}_0]$ *и* $[\mathbf{Z}]$ *во избежания повторения в формулировках основных утверждений напоминаться не будут.*

Получены локальные предельные теоремы для конечномерных приращений арифметических о.п.в. $\boldsymbol{Z}(n)$. Более точно, фиксируем целое $N \geq 1$, фиксируем наборы

$$0 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_N < \infty, \quad \boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N^{(0)} \in \mathbb{R}^d.$$

Положим

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_N^{(0)} := (\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N^{(0)}), \quad \vec{u}_N := (u_1, \ldots, u_N)$$

и для $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$n_i := [u_i n] - [u_{i-1} n], \quad i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Рассмотрим далее N последовательностей

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1(n) \in \mathbb{Z}^d, \ldots, \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{x}_N(n) \in \mathbb{Z}^d,$$

таких, что для

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_N = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) := \left(\frac{x_1}{n_1}, \ldots, \frac{x_N}{n_N}\right)$$

выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N = \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N^{(0)}.$$

В настоящей работе найдены широкие условия (близкие к необходимым), при которых имеет место при $n \to \infty$ асимптотическое представление

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N} \{\boldsymbol{Z}([u_i n]) - \boldsymbol{Z}([u_{i-1} n]) = \boldsymbol{x}_i\}\right) \sim \frac{1}{n^{\frac{Nd}{2}}} C(\vec{u}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N^{(0)}) \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} n_i D(\boldsymbol{\alpha}_i)\right\},$$

где положительные непрерывные функции $D(\boldsymbol{\alpha})$, $C(\vec{u}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N^{(0)})$ своих аргументов построены в явном виде.

Оставшаяся часть настоящей работы состоит из § 2 и § 3. В § 2 формулируются основные результаты работы. В этих формулировках будет участвовать ряд функций, смысл и свойства которых желательно знать для понимания природы установленных законов. Подробное описание этих функций можно найти в [8] (одномерный случай) и в [13], [14] (многомерный случай). Кроме того, в § 2 приводятся формулировки локальных теорем для "одномерных"приращений многомерных арифметических о.п.в., полученных ранее в работах [12], [17]; эти результаты существенно используются в доказательствах основных результатов настоящей работы. Доказательства основных утверждений работы помещены в § 3. Там же предлагается читателю "презентация"метода, позволяющего получить основной результат работы.

2. Формулировки основных утверждений.

2.1. **Основные функции.** В данном разделе мы приведем определения функций, которые будут играть определяющую роль в локальных предельных теоремах и кратко перечислим и основные свойства. Подробное описание этих функций можно найти в [8] (одномерный случай) и [14] (многомерный случай).

Положим для $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E} e^{\lambda\tau + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}}, \quad \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E} e^{\lambda\tau_1 + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_1},$$

$$A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln \psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \quad A_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu});$$

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ \psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}, \quad \mathcal{A}_1 := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}.$$

Ясно, что в соответствии с условием $[\mathbf{C}_0]$ *внутренности* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}_1)$ множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ содержат точку $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = (0, \mathbf{0})$ и являются областями аналитичности функций $\psi(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, $\psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, соответственно.

Ключевую роль описания асимптотики функции (меры) восстановления

$$H(B) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{S}_k \in B), \quad B \subset \mathbb{R}^{d+1},$$

соответствующей случайному блужданию $\{\mathbf{S}_n\}_{n \ge 0}$ играет т.н. *вторая функция уклонений* аргументов $\theta \ge 0, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\le 0}} \{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\} = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \partial\mathcal{A}^{\le 0}} \{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\}, \tag{2.1}$$

где

$$\mathcal{A}^{\le 0} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \le 0\},$$

∂B — граница B. Свойства функции $D(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ изучены весьма полно (см., например, [1], §2.9 и [13]). Она *выпукла, полунепрерывна снизу, полуаддитивна, линейна вдоль любого луча, исходящего из точки* $(0, \mathbf{0})$.

Отметим , что в силу линейчатости функции $D(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ при $\theta > 0$ выполняется равенство

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \theta D\Big(1, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big) \tag{2.2}$$

и, стало быть, функция двух переменных $D(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ полностью определяется значениями функции одной переменной

$$D(\boldsymbol{\alpha}) := D(1, \boldsymbol{\alpha}). \tag{2.3}$$

Кроме того, именно в терминах функции $D(\boldsymbol{\alpha})$ будут сформулированы основные результаты настоящей работы. В силу (2.1)

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \partial\mathcal{A}^{\le 0}} \{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} + \lambda\} = \sup_{\boldsymbol{\mu}} \{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - A(\boldsymbol{\mu})\}, \tag{2.4}$$

где

$$A(\boldsymbol{\mu}) := -\sup\{\lambda : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \le 0\}$$

— т.н. *базовая функция* для о.п.в. В [13] установлено, что функция $A(\boldsymbol{\mu})$ является выпуклой и полунепрерывной снизу и, следовательно (см. [13]), верно равенство

$$A(\boldsymbol{\mu}) = \sup_{\boldsymbol{\alpha}} \{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - D(\boldsymbol{\alpha})\}.$$

Пусть $(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$ — любая точка, в которой достигается супремум

$$\sup_{(\lambda,\boldsymbol{\mu})\in\mathcal{A}^{\le 0}} \{\lambda + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\} = D(1, \boldsymbol{\alpha}) = D(\boldsymbol{\alpha}),$$

если такая точка имеется. В [8] (в одномерном случае), [14] (в многомерном случае) показано, что функции $D(\boldsymbol{\alpha}), D(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ аналитичны во множествах

$$\mathfrak{A} := \Big\{\boldsymbol{\alpha} :\ (\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) \in (\mathcal{A})\Big\}, \quad \mathcal{D} := \Big\{(\theta, \boldsymbol{\alpha}) :\ \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta} \in \mathfrak{A}, \quad \theta > 0\Big\},$$

соответственно. При этом, для $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}$ точка $(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$ является единственной и выполнены равенства

$$\begin{gathered} \lambda(\boldsymbol{\alpha}) = -A(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})), \quad \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) = D'(\boldsymbol{\alpha}), \\ D(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}), \quad A(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) = 0, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $D'(\boldsymbol{\alpha})$ — вектор первых производных (т.е. градиент) функции $D(\boldsymbol{\alpha})$.

Замечание 2.1. Из условия $[\mathbf{C}_0]$ вытекает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются включения

$$[\boldsymbol{a}]_\varepsilon \subset \mathfrak{A}, \quad [(a_\tau, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\zeta}})]_\varepsilon \subset \mathcal{D}, \tag{2.6}$$

где $\boldsymbol{a} := \frac{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\zeta}}}{a_\tau}$, $a_\tau := \mathbf{E}\tau$, $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\zeta}} := \mathbf{E}\boldsymbol{\zeta}$, и где

$$[\boldsymbol{a}]_\varepsilon := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d :\ |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{a}| \le \varepsilon\},$$

$$[(a_\tau, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\zeta}})]_\varepsilon := \{(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{d+1} :\ |(\theta, \boldsymbol{\alpha}) - (a_\tau, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\zeta}})| \le \varepsilon\}.$$

Для формулирования локальной теоремы для конечномерных приращений о.п.в. $\boldsymbol{Z}(n)$ (см. теорему 2.2 в подразделе 2.3 ниже) нам понадобится следующее условие, зависящее от произвольного компакта $K \subset \mathbb{R}^d$

$[\boldsymbol{\Pi}_K]$. *Для всякого* $\boldsymbol{\alpha} \in K \cup \{\boldsymbol{a}\}$ *выполняется*

$$(\lambda^*, \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) \in (\mathcal{A}), \text{ где } \lambda^* = \lambda^*_K := \max\{\lambda(\boldsymbol{\alpha}) :\ \boldsymbol{\alpha} \in K \cup \{\boldsymbol{a}\}\}.$$

Заметим, что $(\lambda(\boldsymbol{a}), \mu(\boldsymbol{a})) = (0, \mathbf{0})$. Поэтому всегда $\lambda^*_K \ge 0$.

Замечание 2.2. Очевидно, что (в силу (2.6)) для компакта $K = [\boldsymbol{a}]_\varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ условие $[\boldsymbol{\Pi}_K]$ всегда выполнено.

2.2. **Локальная теорема для арифметического многомерного о.п.в.** Пусть

$$\lambda_+ = \sup\{\lambda :\ \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\}, \quad \lambda_{1+} = \sup\{\lambda :\ \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1} < \infty\}.$$

Обозначим

$$\mathfrak{B}_Z := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d :\ \lambda(\boldsymbol{\alpha}) \ge \lambda_+\}.$$

Асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{Z}(n) = \boldsymbol{x}) \tag{2.7}$$

изучена в работе [17] в зоне нормированных уклонений

$$\boldsymbol{\alpha} := \frac{\boldsymbol{x}}{n} \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}_Z. \tag{2.8}$$

Для формулирования основных результатов работы [17], относящихся к о.п.в. $\boldsymbol{Z}(n)$ нам понадобятся дополнительные обозначения.

Определим положительные непрерывные в области $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}_Z$ функции

$$C(\boldsymbol{\alpha}) := \frac{\sqrt{|D''(\boldsymbol{\alpha})|}}{(2\pi)^{d/2}\mathbf{E}\tau e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})\tau + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\zeta}}}, \quad I_Z(\alpha) := \sum_{m=1}^{\infty} e^{\lambda(\alpha)m}\mathbf{P}(\tau \ge m),$$

где $|D''(\boldsymbol{\alpha})|$ есть определитель положительно определенной матрицы вторых производных функции $D(\boldsymbol{\alpha})$.

Сформулируем теперь локальную теорему в фазовом пространстве процесса $\boldsymbol{Z}(n)$.

Обозначим

$$\gamma(n) := n - T_{\nu(n)}, \quad \chi(n) := T_{\nu(n)+1} - n$$

— величины *недоскока до уровня* n и *перескока через уровень* n блуждания $\{T_k\}$, соответственно. Таким образом, слагаемое $\tau_{\nu(n)+1}$, "накрывающее"уровень n, представляется в виде суммы $\tau_{\nu(n)+1} = \gamma(n) + \chi(n)$.

Следующее утверждение является следствием теорем 2.1 и 2.1* в [17].

Теорема 2.1. *Пусть фиксирован компакт*

$$K \subset \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}_Z$$

и выполнено условия допустимой неоднородности

$$\mathcal{A}_K \subset (\mathcal{A}_1), \quad \text{где} \quad \mathcal{A}_K := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) : \ \boldsymbol{\alpha} \in K\}, \tag{2.9}$$

и

$$\lambda_{1+} > D(\mathbf{0}), \quad \text{если} \quad \mathbf{0} \in K. \tag{2.10}$$

Тогда при $\boldsymbol{\alpha} := \frac{\boldsymbol{x}}{n} \in K$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d$, *имеет место представление*

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{Z}(n) = \boldsymbol{x}) = \psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))\frac{C(\boldsymbol{\alpha})}{n^{\frac{d}{2}}} e^{-nD(\boldsymbol{\alpha})} I_Z(\boldsymbol{\alpha})(1 + o(1)), \tag{2.11}$$

в котором остаточный член $o(1) = \varepsilon_n(\boldsymbol{x})$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^d, \boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{x}}{n}\in K} |\varepsilon_n(\boldsymbol{x})| = 0. \tag{2.12}$$

Для любого фиксированного целого $u \geq 1$ *имеет место представление*

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{Z}(n) = \boldsymbol{x}, \gamma(n) = u) = \psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))\frac{C(\boldsymbol{\alpha})}{n^{\frac{d}{2}}} e^{-nD(\boldsymbol{\alpha})} I_Z(\boldsymbol{\alpha}, u)(1 + o(1)), \tag{2.13}$$

где

$$I_Z(\boldsymbol{\alpha}, u) := e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})u}\mathbf{P}(\tau \geq u),$$

и где остаточный член $o(1) = \varepsilon_n(\boldsymbol{x})$ *удовлетворяет соотношению (2.12).*

Если при этом $\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{a}$ *при* $n \to \infty$ *(умеренно-большие уклонения), то*

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{Z}(n) = \boldsymbol{x}) \sim \frac{\sqrt{|D''(\boldsymbol{\alpha})|}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} n^{\frac{d}{2}}} e^{-nD(\boldsymbol{\alpha})},$$

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{Z}(n) = \boldsymbol{x}, \gamma(n) = u) \sim \frac{\sqrt{|D''(\boldsymbol{\alpha})|}\mathbf{P}(\tau \geq u)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} n^{\frac{d}{2}} \mathbf{E}\tau} e^{-nD(\boldsymbol{\alpha})}.$$

2.3. **Локальная теорема для конечномерных приращений арифметического многомерного о.п.в.** Для $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$ обозначим

$$C(\boldsymbol{\alpha}, \ \boldsymbol{\beta}) := C(\boldsymbol{\alpha}) \sum_{m=1}^{\infty} e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})m}\mathbf{E}(e^{\lambda(\boldsymbol{\beta})\tau + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\zeta}}, \tau \geq m). \tag{2.14}$$

Обозначим

$$Z(\boldsymbol{\alpha}, \ \boldsymbol{\beta}) := \sum_{m=1}^{\infty} e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})m}\mathbf{E}(e^{\lambda(\boldsymbol{\beta})\tau + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\zeta}}, \tau \geq m),$$

так что $C(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}) = C(\boldsymbol{\alpha})Z(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$. Не трудно видеть, что

$$Z(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}) = \sum_{m\geq 1}\sum_{k\geq 0}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{Z}^d} e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})m+\lambda(\boldsymbol{\beta})k+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{y}}\mathbf{P}(\tau = m+k,\ \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{y}). \tag{2.15}$$

Лемма 2.1. *I. Из условия $[\mathbf{\Pi}_K]$ вытекает, что для любых $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta} \in K \cup \{\mathbf{a}\}$*

$$Z(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) < \infty. \tag{2.16}$$

II. Если же $(\lambda(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})),\ (\lambda(\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})) \in (\mathcal{A})$, и при этом $(\lambda(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})) \notin \mathcal{A}$, то выполняется

$$Z(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \infty. \tag{2.17}$$

Доказательство. I. Пусть $\lambda^* := \max\{\lambda(\boldsymbol{\alpha}),\ \lambda(\boldsymbol{\beta})\}$. Используя (2.15), получаем (2.16):

$$Z(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \leq \sum_{m\geq 1}\sum_{k\geq 0}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{Z}^d} e^{\lambda^* m+\lambda^* k+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{y}}\mathbf{P}(\tau = m+k, \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{y}) =$$

$$\sum_{m\geq 1}\mathbf{E}(e^{\lambda^*\tau+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\zeta}}, \tau \geq m) = \sum_{m\geq 1} m\mathbf{E}(e^{\lambda^*\tau+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\zeta}}, \tau = m) = \mathbf{E}\tau e^{\lambda^*\tau+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\zeta}} < \infty,$$

где последнее неравенство есть следствие условия $[\mathbf{\Pi}_K]$.

II. Из равенства (2.15) следует (2.17):

$$Z(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}) \geq \sum_{m\geq 1}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{Z}^d} e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})m+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{y}}\mathbf{P}(\tau = m,\ \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{y}) = \mathbf{E}e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})\tau+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\zeta}} = \infty,$$

где последнее равенство есть следствие условия $(\lambda(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})) \notin \mathcal{A}$. Лемма 2.1 доказана. □

В теореме 2.2 будут использоваться следующие обозначения. Для фиксированного целого $N \geq 2$ и фиксированного компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ рассмотрим наборы

$$0 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_N < \infty, \quad \boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N^{(0)}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{\alpha}_i^{(0)} \in K. \tag{2.18}$$

Для $i = 1, 2, \ldots, N$ выберем последовательность $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i(n) \in \mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{N}$ такую, что для

$$n_i := [u_i n] - [u_{i-1}n], \quad \boldsymbol{\alpha}_i := \frac{\boldsymbol{x}_i}{n_i}, \tag{2.19}$$

выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_i^{(0)}. \tag{2.20}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2.2. *Пусть для фиксированного компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ выполнено условие $[\mathbf{\Pi}_K]$, условие допустимой неоднородности*

$$(\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})) \in (\mathcal{A}_1), \quad \text{и} \quad \lambda_{1+} > D(\mathbf{0}), \quad \text{если} \quad \mathbf{0} \in K. \tag{2.21}$$

Тогда в обозначениях – условиях (2.14), (2.18)–(2.20) при $n \to \infty$ имеет место асимптотическое представление

$$\mathbf{P}\bigg(\bigcap_{i=1}^{N}\{\boldsymbol{Z}([u_i n]) - \boldsymbol{Z}([u_{i-1}n]) = \boldsymbol{x}_i\}\bigg) \sim$$

(2.22)

$$\psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}),\boldsymbol{\mu}_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}))\prod_{i=1}^{N}(n_i)^{-\frac{d}{2}}C(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)},\dots,\boldsymbol{\alpha}_N^{(0)})C(\boldsymbol{\alpha}_N^{(0)})\exp\Big\{-\sum_{i=1}^{N}n_iD(\boldsymbol{\alpha}_i)\Big\}I_Z(\boldsymbol{\alpha}_N),$$

где

$$C(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)},\dots,\boldsymbol{\alpha}_N^{(0)}):=\prod_{i=1}^{N-1}C(\boldsymbol{\alpha}_i^{(0)},\boldsymbol{\alpha}_{i+1}^{(0)}).$$

Заметим, что утверждение II леммы 2.1 дает основание считать, что условие $[\mathbf{\Pi}_K]$ "почти необходимо" для того, чтобы локальная теорема для конечномерных приращений о.п.в. имела форму (2.22). Поясним сказанное на примере однородного о.п.в. при $N=2$. Пусть векторы $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}$, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}=\boldsymbol{a}$ таковы, что

$$(\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}),\ \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}))\in(\mathcal{A}),\quad \lambda(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})>0.$$

Тогда выполнены условия локальной предельной теоремы для одномерных приращений о.п.в. при $\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}$ или $\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}$. Если же при этом справедлива локальная предельная теорема для двумерных приращений о.п.в. при $\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}$ и $\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}$ (иначе говоря, справедлива формула (2.22)), то из утверждения II леммы 2.1 следует с необходимостью, что

$$(\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}),\ \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}))=(\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}),\ \mathbf{0})\in\mathcal{A}. \tag{2.23}$$

Условие (2.23) "немного не дотягивает"до условия

$$(\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}),\ \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}))=(\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}),\ \mathbf{0})\in(\mathcal{A}),$$

выполнение которого в нашем примере влечет условие $[\mathbf{\Pi}_K]$ для $K=\{\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}\}$. Следовательно, условие $[\mathbf{\Pi}_K]$ в рассмотренном примере "почти необходимо" для справедливости соотношения (2.22).

Обратимся теперь к умеренно большим уклонениям. Для этого будем считать, что в обозначениях – условиях (2.18)–(2.14), приведенных перед теоремой 2.2 дополнительно выполнено

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}=\dots=\boldsymbol{\alpha}_N^{(0)}=\boldsymbol{a}. \tag{2.24}$$

Поскольку (см. замечание 2.2) условие $[\mathbf{\Pi}_{\{\boldsymbol{a}\}}]$ и условие допустимой неоднородности (2.21) следуют из условия $[\mathbf{C}_0]$, то из теоремы 2.2 вытекает

Следствие 2.1. *В обозначениях – условиях (2.18)–(2.14), (2.24) при $n\to\infty$ имеет место асимптотическое представление*

(2.25)

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{N}\{\boldsymbol{Z}([u_in])-\boldsymbol{Z}([u_{i-1}n])=\boldsymbol{x}_i\}\Big)\sim\prod_{i=1}^{N}(n_i)^{-\frac{d}{2}}\sigma^{-N}(2\pi)^{-\frac{Nd}{2}}\exp\Big\{-\sum_{i=1}^{N}n_iD(\boldsymbol{\alpha}_i)\Big\},$$

где $\sigma^2:=|D''(\boldsymbol{a})|^{-1}$.

Если при этом

$$\boldsymbol{y}_i:=\boldsymbol{x}_i-n_i\boldsymbol{a}=o(n^{\frac{2}{3}})\quad \textit{при всех}\quad i\in\{1,\dots,N\},\quad n\to\infty,$$

то правая часть (2.25) имеет вид

$$\prod_{i=1}^{N}(n_i)^{-\frac{d}{2}}\sigma^{-N}(2\pi)^{-\frac{Nd}{2}}\exp\Big\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{\boldsymbol{y}_iD''(\boldsymbol{a})\boldsymbol{y}_i^T}{2n_i}\Big\}.$$

3. Доказательство основных утверждений.

3.1. **Описание метода доказательства теоремы 2.2.** Изложим кратко основные идеи и этапы доказательства Теоремы 2.2. Пусть для простоты изложения $N=2$, $d=1$. Заметим, что если бы было справедливо равенство

$$T_{\nu([u_1n])+1} = [u_1n] \text{ п.н.}, \tag{3.1}$$

то $Z([u_1n])$ и $Z([u_2n]) - Z([u_1n])$ являлись бы независимыми о.п.в. (неоднородным и однородным, соответственно) и наш результат следовал бы напрямую из теоремы 2.1 как произведение соответствующих вероятностей. Очевидно, что равенство (3.1) не выполнено, поэтому распределения приращений $Z([u_1n])$ и $Z([u_2n]) - Z([u_1n])$ будут зависеть от величин недоскока $\gamma([u_1n])$ и перескока $\chi([u_1n])$, см. рисунок 1. Тем не менее, для $\alpha_1 = \frac{x_1}{n} \in K$, $\alpha_2 = \frac{x_2}{n} \in K$ и фиксированных $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 0$, $y \in \mathbb{Z}$ удается показать (см. лемму 3.2), что

$$\mathbf{P}(Z([u_1n]) = x_1, Z([u_2n]) - Z([u_1n]) = x_2, A_{k_1,k_2,y}, \nu([u_1n]) \geq 2) =$$

$$\mathbf{P}(Z([u_1n] - k_1 + 1) = x_1, \gamma([u_1n] - k_1 + 1) = 1,\ \nu([u_1n] - k_1 + 1) \geq 2)\times$$

$$\mathbf{P}(\tau = k_1 + k_2, \zeta = y)\mathbf{P}(Z_0([u_2n] - k_2) = x_2 - y) =: \mathbf{P}_1(k_1)\mathbf{P}_2(k_1,k_2,y)\mathbf{P}_3(k_2,y), \tag{3.2}$$

где

$$A_{k_1,k_2,y} := \{\gamma([u_1n]) = k_1, \chi([u_1n]) = k_2, \zeta_{\nu([u_1n])+1} = y\},$$

$Z([u_1n] - k_1)$ и $Z_0([u_2n] - k_2)$ независимые неоднородный и однородный о.п.в., соответственно (на рисунке 1 изображен случай, когда $Z([u_1n] - k_1 + 1) = Z_3$, $Z_0([u_2n] - k_2) = Z_6 - Z_4$, $\tau = T_4 - T_3$).

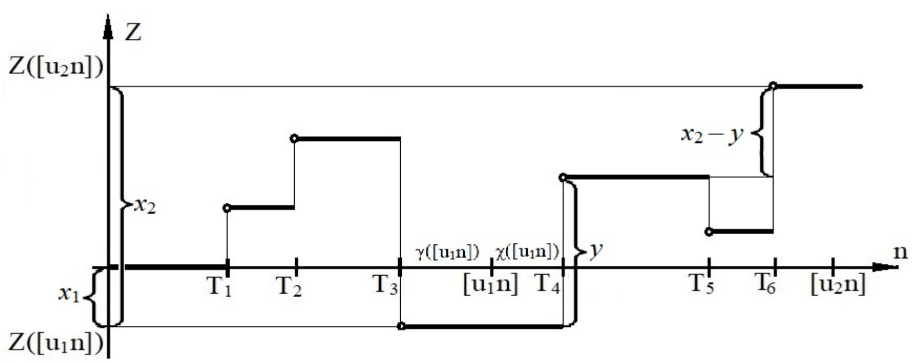

Рис. 1. Пример траектории обобщенного процесса восстановления. Здесь $\nu([u_1n]) = T_3$, $\nu([u_2n]) = T_6$, $Z([u_1n]) = Z_3 = x_1$, $Z([u_2n]) - Z([u_1n]) = Z_6 - Z_3 = x_2$.

Далее, применив экспоненциальное преобразование исходной вероятностной меры (вид которого зависит от траектории), удается показать, что (см. лемму 3.1)

$$\mathbf{P}\biggl(Z([u_1n]) = x_1, Z([u_2n]) - Z([u_1n]) = x_2, \max_{1 \leq j \leq \nu([u_2n])+1} |\boldsymbol{\xi}_j| \geq \ln^2 n\biggr)$$

$$\le Cn^4 e^{-\sum_{i=1}^{2} n_i D(\alpha_i) - \delta \ln^2 n}.$$

Эта оценка и теорема 2.1 влекут при $n \to \infty$ следующие эквивалентности

$$\mathbf{P}_1(k_1) \sim \mathbf{P}(Z([u_1 n] - k_1 + 1) = x_1, \gamma([u_1 n] - k_1 + 1) = 1) = \tilde{\mathbf{P}}_1(k_1),$$

$$\mathbf{P}(Z([u_1 n]) = x_1, Z([u_2 n]) - Z([u_1 n]) = x_2) \sim$$

$$\sum_{k_1=1}^{[\ln^2 n]} \sum_{k_2=0}^{[\ln^2 n]} \sum_{y=-[\ln^2 n]}^{[\ln^2 n]} \tilde{\mathbf{P}}_1(k_1) \mathbf{P}_2(k_1, k_2, y) \mathbf{P}_3(k_2, y).$$

Наконец, применив теорему 2.1 к $\tilde{\mathbf{P}}_1(k_1)$, $\mathbf{P}_3(k_2, y)$ и произведя суммирование, завершаем доказательство.

3.2. **Доказательство теоремы 2.2.** Обозначим

$$\vec{m}_N = (m_1, m_2, \ldots, m_N) := ([nu_1], [nu_2], \ldots, [nu_N]) \in \mathbb{R}^N,$$

$$\vec{\boldsymbol{x}}_N := (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N) \in \mathbb{Z}^{dN},$$

$$A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) := \bigcap_{i=1}^{N} \{\boldsymbol{Z}([u_i n]) - \boldsymbol{Z}([u_{i-1} n]) = \boldsymbol{x}_i\}. \tag{3.3}$$

$$\vec{n}_N := (n_1, n_2, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N, \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N := (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) \in \mathbb{R}^{Nd},$$

$$\overline{D}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} n_i D(\boldsymbol{\alpha}_i), \tag{3.4}$$

где

$$\vec{v}_N := \left(\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_N}{n} \right),$$

так что при $n \to \infty$

$$\vec{v}_N \to \vec{v}_N^{(0)} := (u_1 - u_0, u_2 - u_1, \ldots, u_N - u_{N-1}).$$

Тогда формула (2.22) имеет вид

$$\mathbf{P}(A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N)),$$

а сама формула (2.22) имеет вид

$$\mathbf{P}(A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N)) \sim \frac{1}{n^{\frac{Nd}{2}}} R(\vec{u}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N^{(0)}) e^{-n \overline{D}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N)}. \tag{3.5}$$

где положительная константа $R(\vec{u}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N^{(0)})$ имеет вид

$$R(\vec{u}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N^{(0)}) := \prod_{i=1}^{N} (v_i)^{-\frac{d}{2}} \psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}), \boldsymbol{\mu}_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})) \prod_{j=1}^{N-1} C(\boldsymbol{\alpha}_j^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}_{j+1}^{(0)}) C(\boldsymbol{\alpha}_N^{(0)}) I_Z(\boldsymbol{\alpha}_N^{(0)}).$$

Также в условиях теоремы 2.2 справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} \overline{D}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N) = \overline{D}(\vec{v}_N^{(0)}, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N^{(0)}).$$

Поэтому из (3.5) вытекает грубый результат (т.е. результат о логарифмической асимптотике)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N)) = -\overline{D}(\vec{v}_N^{(0)}, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N^{(0)}).$$

Обозначим

$$\nu^+ := \nu([u_N n]) + 1$$

число векторов $\boldsymbol{\xi}_j$, которые "заняты"в определении события $A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N)$. Очевидно, что

$$\nu^+ \le [u_N n] + 2.$$

В основе доказательства теоремы 2.2 лежит следующая

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Тогда для некоторых констант $C < \infty$, $\delta > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\left(A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N), \max_{1 \le j \le m_N+2} |\boldsymbol{\xi}_j| \ge \ln^2 n\right) \le C n^{2N} e^{-n\overline{D}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N) - \delta \ln^2 n}. \tag{3.6}$$

Лемму 3.1 мы докажем в разделе 3.3, а сейчас на базе этой леммы осуществим

3.3. **Завершение доказательства теоремы 2.2.** Дальнейшее доказательство теоремы 2.2 использует методы, которые "мало зависят от размерности $d \ge 1$ и от числа $N \ge 2$ приращений изучаемого процесса." Поэтому для простоты изложения нам достаточно рассмотреть случай $d = 1$ (и тогда не нужно использовать полужирные буквы) и $N = 2$. В этом случае обозначения для теоремы 2.2 имеют следующий вид:

Фиксируем наборы

$$0 = u_0 < u_1 < u_2 < \infty, \quad \alpha_1^{(0)} \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_2^{(0)} \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим для любого целого $n \ge 1$

$$n_1 := [u_1 n], \quad n_2 := [u_2 n] - n_1, \quad x_1 = x_1(n) \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = x_2(n) \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha_1 := \frac{x_1}{n_1}, \quad \alpha_2 := \frac{x_2}{n_2},$$

и пусть выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \quad \text{для} \quad i = 1, 2.$$

Для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ обозначим

$$C(\alpha, \beta) := C(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} e^{\lambda(\alpha)m} \mathbf{E}(e^{\lambda(\beta)\tau + \mu(\beta)\zeta}, \tau \ge m),$$

В этих обозначениях теорема 2.2 для $d = 1$ и $N = 2$ имеет вид:

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие $[\mathbf{\Pi}_K]$, условие допустимой неоднородности*

$$(\lambda(\alpha_1^{(0)}), \mu(\alpha_1^{(0)})) \in (\mathcal{A}_1), \quad \text{и} \quad \lambda_{1+} > D(0), \quad \text{если} \quad 0 \in K.$$

Тогда (в обозначениях, приведенных перед формулировкой теоремы) при $n \to \infty$ имеет место асимптотическое представление

$$\mathbf{P}(Z([u_1 n]) = x_1, \quad Z([u_2 n]) - Z([u_1 n]) = x_2\}) \sim$$

$$\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \psi_1(\lambda(\alpha_1^{(0)}), \mu_1(\alpha_1^{(0)})) C(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}) C(\alpha_2^{(0)}) I_Z(\alpha_2) e^{-n_1 D(\alpha_1) - n_2 D(\alpha_2)}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Будем использовать обозначения (3.3), (3.4), которые использовались в формулировке леммы 3.1. В этих обозначениях соотношение (3.7), которое мы доказываем, имеет вид

$$\mathbf{P}(A(\vec{m}_2,\vec{x}_2)) \sim \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}}\psi_1(\lambda(\alpha_1^{(0)}),\mu_1(\alpha_1^{(0)}))C(\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)})C(\alpha_2^{(0)})e^{-n\overline{D}(\vec{v}_2,\vec{\alpha}_2)}I_Z(\alpha_2). \tag{3.8}$$

Введем обозначения

$$\gamma_{m_1} := m_1 - T_{\nu(m_1)}, \quad \chi_{m_1} := T_{\nu(m_1)+1} - m_1$$

величины недоскока и перескока через уровень $m_1 := [u_1 n]$, соответственно. Таким образом, справедливо

$$\tau^* := \tau_{\nu_1+1} = \gamma_{m_1} + \chi_{m_1}, \quad \text{где} \quad \nu_1 := \nu(m_1).$$

Обозначим $\zeta^* := \zeta_{\nu_1+1}$.

Непосредственно из теоремы 2.1 и леммы 3.1 очевидным образом вытекает (в обозначениях, приведенных выше)

Следствие 3.1. *В условиях теоремы 3.1 для $0 \le k_1 \le \ln^2 n$ справедливы следующие асимптотические при $n \to \infty$ представления:*

$$\mathbf{P}(Z(n_1-k_1+1)=x_1,\ \gamma(n_1-k_1+1)=1,\ \nu_1\ge 1) =$$

$$\psi_1(\lambda(\alpha_1),\mu(\alpha_1))\frac{C(\alpha_1)}{\sqrt{n_1}}e^{-(n_1-k_1+1)D\left(\frac{x_1}{n_1-k_1+1}\right)}e^{\lambda(\alpha_1)}(1+o(1)), \tag{3.9}$$

где остаточный член $o(1)=\varepsilon_n(k_1)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{1\le k_1\le \ln^2 n}|\varepsilon_n(k_1)| = 0;$$

$$\mathbf{P}(Z_0(n_2-k_2)=x_2-y) = \frac{C(\alpha_2)}{\sqrt{n_2}}e^{-(n_2-k_2)D\left(\frac{x_2-y}{n_2-k_2}\right)}I_Z(\alpha_2)(1+o(1)), \tag{3.10}$$

где $Z_0(n)$ — однородный о.п.в., определяемый с.в. $\boldsymbol{\xi}=(\tau,\zeta)$ и где остаточный член $o(1)=\varepsilon_n(k_2,y)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{1\le k_2\le \ln^2 n,\ y\in\mathbb{Z},\ |y|\le \ln^2 n}|\varepsilon_n(k_2,y)| = 0.$$

Аналогично, в силу леммы 3.1 справедливо

Следствие 3.2. *В условиях теоремы 3.1 справедливы следующие асимптотические при $n\to\infty$ равенства*

$$\mathbf{P}(A(\vec{m}_2,\vec{x}_2), \max\{\gamma_{m_1},\chi_{m_1},|\zeta^*|\}\ge \ln^2 n) = O(e^{-n_1D(\alpha_1)-n_2D(\alpha_2)-\delta\ln^2 n}); \tag{3.11}$$

$$\mathbf{P}(A(\vec{m}_2,\vec{x}_2),\ \nu_1=1) = O(e^{-n_1D(\alpha_1)-n_2D(\alpha_2)-\delta\ln^2 n}). \tag{3.12}$$

Поэтому для доказательства (3.8) нам достаточно доказать асимптотическую формулу

$$P_n := \mathbf{P}(A(\vec{m}_2,\vec{x}_2),\ \max\{\gamma_{m_1},\ \chi_{m_1},\ |\zeta^*|\}\le \ln^2 n,\ \ \nu_1\ge 2) \sim$$

$$\frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\psi_1(\lambda(\alpha_1^{(0)}),\mu_1(\alpha_1^{(0)}))C(\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)})C(\alpha_2^{(0)})I_Z(\alpha_2)e^{-n\overline{D}(\vec{v}_2,\vec{\alpha}_2)}. \tag{3.13}$$

Воспользуемся следующим утверждением:

Лемма 3.2. *Для фиксированных параметров*

$$k_1 \geq 1, \quad k_2 \geq 0, \quad y \in \mathbb{Z}$$

имеет место тождество

$$\mathbf{P}(A(\vec{m}_2, \vec{x}_2),\ \gamma_{m_1} = k_1,\ \chi_{m_1} = k_2,\ \zeta^* = y,\ \nu_1 \geq 2) =$$

$$\mathbf{P}(Z(n_1 - k_1 + 1) = x_1,\ \gamma(n_1 - k_1 + 1) = 1,\ \nu(n_1 - k_1 + 1) \geq 2)\times \tag{3.14}$$

$$\mathbf{P}(\tau = k_1 + k_2,\ \zeta = y)\mathbf{P}(Z_0(n_2 - k_2) = x_2 - y),$$

в которой через $Z_0(n)$ *обозначен однородный о.п.в., распределение которого определяется распределением с.в.* $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$.

Доказательство. Для фиксированных параметров

$$k_1 \geq 1, \quad k_2 \geq 0, \quad y \in \mathbb{Z}, \quad r \geq 2$$

рассмотрим событие

$$E_n(k_1, k_2, y, r) := \{A(\vec{m}_2, \vec{x}_2), \gamma_{m_1} = k_1, \chi_{m_1} = k_2, \zeta^* = y, \nu_1 = r\} =$$

$$\{Z(n_1) = x_1, Z(n_2) - Z(n_1) = x_2, \gamma_{m_1} = k_1, \chi_{m_1} = k_2, \zeta^* = y, \nu_1 = r\}.$$

Для каждого $r \geq 2$ определим (наряду с $\{\boldsymbol{\xi}_i\}_{i\geq 1}$) последовательность $\{\boldsymbol{\xi}_i^{(r)}\}_{i\geq 1}$ независимых, одинаково распределенных случайных векторов, положив

$$\boldsymbol{\xi}_i^{(r)} := \boldsymbol{\xi}_{r+1+i} = (\tau_{r+1+i},\ \zeta_{r+1+i}).$$

Таким образом, векторы $\{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \ldots, \boldsymbol{\xi}_{r+1}\}$ и $\{\boldsymbol{\xi}_i^{(r)}\}_{i\geq 1}$ — независимы. По последовательности $\{\boldsymbol{\xi}_i^{(r)}\}_{i\geq 1}$ "стандартным образом" построим однородный о.п.в. $Z_0^{(r)}(n)$. Кроме того, обозначим $\{\boldsymbol{\xi}_i^{(0)}\}_{i\geq 1}$ последовательность независимых случайных векторов, имеющих общее распределение с вектором $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \boldsymbol{\zeta})$ и *не зависящую от* $\{\boldsymbol{\xi}_i\}_{i\geq 1}$. Однородный о.п.в., построенный по $\{\boldsymbol{\xi}_i^{(0)}\}_{i\geq 1}$, обозначим $Z_0(n)$. Легко видеть, что пары процессов $Z_0(\cdot)$, $Z_0^{(r)}(\cdot)$ независимы при любом $r \geq 2$.

Вернемся теперь к доказательству равенства (3.14). Обращаясь непосредственно к определению о.п.в., несложно убедиться, что событие $E_n(k_1, k_2, y, r)$ представляется в виде пересечения трех событий:

$$E_n(k_1, k_2, y, r) = E_n^{(1)}(k_1, r) \cap E_n^{(2)}(k_1, k_2, y, r) \cap E_n^{(3)}(k_2, y, r), \tag{3.15}$$

где

$$E_n^{(1)}(k_1, r) := \{Z(n_1 - k_1 + 1) = x_1,\ \gamma(n_1 - k_1 + 1) = 1,\ \nu(n_1 - k_1 + 1) = r\},$$

$$E_n^{(2)}(k_1, k_2, y, r) := \{\tau_{r+1} = k_1 + k_2,\ \zeta_{r+1} = y\},$$

$$E_n^{(3)}(k_2, y, r) := \{Z_0^{(r)}(n_2 - k_2) = x_2 - y\}.$$

Поскольку события, которые пересекаются в правой части (3.15), независимы в совокупности, получаем

$$\mathbf{P}(E_n(k_1, k_2, y, r)) = \mathbf{P}(E_n^{(1)}(k_1, r))\mathbf{P}(E_n^{(2)}(k_1, k_2, y, r))\mathbf{P}(E_n^{(3)}(k_2, y, r)), \tag{3.16}$$

а поскольку вероятности $\mathbf{P}(E_n^{(2)}(k_1, k_2, y, r))$ и $\mathbf{P}(E_n^{(3)}(k_2, y, r))$ не зависят от параметра $r \geq 2$, то из (3.16) выводим

$$\mathbf{P}(E_n(k_1, k_2, y, r)) = \mathbf{P}(E_n^{(1)}(k_1, r))\mathbf{P}(E_n^{(2)}(k_1, k_2, y))\mathbf{P}(E_n^{(3)}(k_2, y)), \tag{3.17}$$

где

$$E_n^{(2)}(k_1,k_2,y) := \{\tau = k_1+k_2,\ \zeta = y\},$$
$$E_n^{(3)}(k_2,y) := \{Z_0(n_2-k_2) = x_2-y\}.$$

Суммируя наконец левую и правую части (3.17) по $r \ge 2$, получаем требуемое тождество (3.14). Лемма 3.2 доказана. □

Продолжим доказательство Теоремы 3.1. Пусть

$$\mathcal{K}_n := \{(k_1,k_2,y) \in \mathbb{Z}^3 :\ 1 \le k_1 \le \ln^2 n,\ 0 \le k_2 \le \ln^2 n,\ -\ln^2 n \le y \le \ln^2 n\}.$$

В силу леммы 3.2, утверждений теоремы 2.1 и следствия 3.1 имеем соотношение

$$P_n = \mathbf{P}(A(\vec{m}_2,\vec{x}_2),\ \max\{\gamma_{m_1},\ \chi_{m_1},\ |\zeta^*|\} \le \ln^2 n,\ \ \nu_1 \ge 2)$$
$$= \sum_{k_1=1}^{[\ln^2 n]} \sum_{k_2=0}^{[\ln^2 n]} \sum_{y=-[\ln^2 n]}^{[\ln^2 n]} \mathbf{P}(\tau = k_1+k_2,\ \zeta = y)\times$$
$$\psi_1(\lambda(\alpha_1),\mu(\alpha_1))\frac{C(\alpha_1)}{\sqrt{n_1}} e^{-(n_1-k_1+1)D\left(\frac{x_1}{n_1-k_1+1}\right)+\lambda(\alpha_1)}\times$$
$$\frac{C(\alpha_2)}{\sqrt{n_2}} e^{-(n_2-k_2)D\left(\frac{x_2-y}{n_2-k_2}\right)} I_Z(\alpha_2)(1+o(1)),$$

в котором остаточный член $o(1) = \varepsilon_n(k_1,k_2,y)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(k_1,k_2,y)\in\mathcal{K}_n} |\varepsilon_n(k_1,k_2,y)| = 0. \tag{3.18}$$

Используя далее формулу Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа), получаем

$$(n_1-k_1+1)D\left(\frac{x_1}{n_1-k_1+1}\right) - n_1 D\left(\frac{x_1}{n_1}\right) + (n_2-k_2)D\left(\frac{x_2-y}{n_2-k_2}\right) - n_2 D\left(\frac{x_2}{n_2}\right) =$$
$$-\lambda(\alpha_1)k_1 + \lambda(\alpha_1) - \lambda(\alpha_2)k_2 - \mu(\alpha_2)y + o(1)$$

где остаточный член $o(1) = \varepsilon_n(k_1,k_2,y)$ удовлетворяет соотношению (3.18). Поэтому получили соотношение (сравни с (3.13))

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}}\psi_1(\lambda(\alpha_1),\mu_1(\alpha_1))C_n(\alpha_1,\alpha_2)C(\alpha_2)\exp\{-n\overline{D}(\vec{v}_2,\vec{\alpha}_2)\}I_Z(\alpha_2)(1+o(1)),$$

в котором

$$C_n(\alpha_1,\alpha_2) := C(\alpha_1) \sum_{(k_1,k_2,y)\in\mathcal{K}_n} e^{\lambda(\alpha_1)k_1+\lambda(\alpha_2)k_2+\mu(\alpha_2)y}\mathbf{P}(\tau = k_1+k_2,\ \zeta = y).$$

Поскольку в условиях теоремы 3.1, т.е. в силу условия $[\mathbf{\Pi}_K]$ при $n \to \infty$ имеют место сходимость $C(\alpha_2) \to C(\alpha_2^{(0)})$ и мажорируемая сходимость ряда

$$C_n(\alpha_1,\alpha_2) \to C(\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)}),$$

где

$$C(\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)}) = C(\alpha_1^{(0)}) \sum_{k_1\ge 1,\ k_2\ge 0,\ y\in\mathbb{Z}} e^{\lambda(\alpha_1^{(0)})k_1+\lambda(\alpha_2^{(0)})k_2+\mu(\alpha_2^{(0)})y}\mathbf{P}(\tau = k_1+k_2,\ \zeta = y),$$

то формула (3.13) установлена. Теорема 3.1 доказана. □

3.4. **Доказательство леммы 3.1.** Введем обозначения

$$\vec{k}_N = (k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}_+^N, \quad \mathbb{Z}_+^N := \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+, \quad \mathbb{Z}_+ := 0 \cup \mathbb{N},$$

$$B(\vec{k}_N) := \{\nu([u_i n]) - \nu([u_{i-1} n]) = k_i,\ i = 1, \dots, N\}.$$

Тогда очевидно, что все события $B(\vec{k}_N)$ при разных $\vec{k}_N \in \mathbb{Z}_+^N$ не пересекаются и справедлива формула

$$A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) = \bigcup_{\vec{k}_N \in \mathbb{Z}_+^N} A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap B(\vec{k}_N).$$

На каждом событии $A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap B(\vec{k}_N)$ распределение каждого случайного вектора $\boldsymbol{\xi}_j$, $1 \le j \le \nu^+$ подвергнем абсолютно непрерывному преобразованию

$$\mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j \in \cdot) := \frac{1}{\psi_j(\lambda, \boldsymbol{\mu})} \mathbf{E}(e^{\lambda\tau_j + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_j}; \ \ \boldsymbol{\xi}_j \in \cdot),$$

где $\psi_j(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}(e^{\lambda\tau_j + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_j})$, для которого векторы $(\lambda_j, \boldsymbol{\mu}_j) \in (\mathcal{A}) \cap (\mathcal{A}_1)$ будут выбраны ниже. Для произвольного события C будем иметь

$$\mathbf{P}(A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap C) = e^{-n\overline{D}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N)} \mathbf{E}(e^{n\overline{D}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N)}, A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap C)$$

$$= e^{-n\overline{D}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N)} \sum_{\vec{k}_N \in \mathbb{Z}_+^N} \mathbf{E}(e^{n\overline{D}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N)}, A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap B(\vec{k}_N) \cap C). \tag{3.19}$$

Параметры $(\lambda_j, \boldsymbol{\mu}_j)$ для каждого $\vec{k}_N \in \mathbb{Z}_+^N$ на событии

$$A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap B(\vec{k}_N) \tag{3.20}$$

мы будем выбирать специальным образом. Заметим, что на событии (3.20)

$$n\overline{D}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N) = \sum_{i=1}^{N} n_i \lambda(\boldsymbol{\alpha}_i) + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}_i) \boldsymbol{x}_i =$$

$$\sum_{i=1}^{N} n_i \lambda(\boldsymbol{\alpha}_i) + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}_i)(\boldsymbol{Z}_{\nu_i} - \boldsymbol{Z}_{\nu_{i-1}}) =: n\overline{D}_\lambda(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N) + n\overline{D}_{\boldsymbol{\mu}}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N),$$

где $\nu_i := \nu(m_i)$ для $i = 0, 1, \dots, N$. Поэтому, если $j \in \{1, \dots, \nu_N\}$ таково, что

$$\nu_{i-1} < j \le \nu_i,$$

то положим $\boldsymbol{\mu}_j = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}_i)$. Для $j = \nu_N + 1$ положим $\boldsymbol{\mu}_{\nu_N+1} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$. Такой выбор приводит на событии (3.20) к равенству

$$n\overline{D}_{\boldsymbol{\mu}}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N) = \sum_{j=1}^{\nu_N+1} \boldsymbol{\mu}_j \boldsymbol{\zeta}_j. \tag{3.21}$$

Чтобы продолжить доказательство нам необходимо выбрать специальным образом параметры λ_j для $j \in \{1, \dots, \nu_N + 1\}$ так, чтобы на событии (3.20) выполнялось

$$n\overline{D}_\lambda(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N) \le \sum_{j=1}^{\nu_N+1} \lambda_j \tau_j. \tag{3.22}$$

Для $i \in \{1, \dots, N\}$ будем говорить, что $j \in J_i$, если

$$T_{j-1} \in [m_{i-1},\ m_i - 1] \ \text{ и } \ T_j \in [m_{i-1},\ m_i - 1].$$

Для $j \in J_i$ положим $\lambda_j := \lambda(\boldsymbol{\alpha}_i)$.

Те параметры $j \in J := \{1, 2, \ldots, \nu_N + 1\}$, которые не попали в J_i для какого–нибудь $i \leq N$ отнесем к классу J_{N+1}:

$$J_{N+1} := J \setminus \bigcup_{i=1}^{N} J_i.$$

Если $j \in J_{N+1}$, то положим $\lambda_j := \lambda_K^*$.

Очевидно, что для любого $i \in \{1, \ldots, N\}$ выполняется

$$n_i = \sum_{j \in J_i} \tau_j + n_i - \sum_{j \in J_i} \tau_j. \tag{3.23}$$

Напомним, что всегда

$$\max_{1 \leq i \leq N} \lambda(\boldsymbol{\alpha}_i) \leq \lambda_K^*, \quad 0 = \lambda(\boldsymbol{a}) \leq \lambda_K^*. \tag{3.24}$$

Убедимся, что при таком выборе λ_j выполняется (3.22). Из соотношений (3.23), (3.24) следует

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha}_i) n_i \leq \sum_{j \in J_i} \lambda_j \tau_j + \lambda_K^* \left[n_i - \sum_{j \in J_i} \tau_j \right]. \tag{3.25}$$

Выполнив в (3.23) суммирование по i, получаем

$$n \overline{D}_\lambda(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N) \leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in J_i} \lambda_j \tau_j + \lambda_K^* \left[m_N - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in J_i} \tau_j \right]. \tag{3.26}$$

Поскольку

$$m_N \leq \sum_{1 \leq j \leq \nu_N + 1} \tau_j = \sum_{j \in J} \tau_j = T_{\nu_N + 1},$$

то

$$m_N - \sum_{i+1}^{N} \sum_{j \in J_i} \tau_j \leq \sum_{j \in J_{N+1}} \tau_j,$$

и из (3.26) и того факта, что $\lambda_K^* \geq 0$ вытекает

$$n \overline{D}_\lambda(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N) \leq \sum_{j \in \bigcup\limits_{1 \leq i \leq N} J_i} \lambda_j \tau_j + \lambda_K^* \sum_{j \in J_{N+1}} \tau_j.$$

Таким образом, необходимые нам параметры, для которых выполнено неравенство (3.22), найдены.

Из (3.21), (3.22) получаем неравенство

$$n \overline{D}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N) \leq \sum_{j=1}^{\nu_N + 1} \lambda_j \tau_j + \boldsymbol{\mu}_j \boldsymbol{\zeta}_j. \tag{3.27}$$

Используя неравенство (3.27) и формулу (3.19), получаем

$$\mathbf{P}(A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap C) \leq$$

$$e^{-n\overline{D}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N)} \sum_{\vec{k}_N \in \mathbb{Z}_+^N} \mathbf{E}\left(\exp\left\{ \sum_{j=1}^{\nu_N+1} \lambda_j \tau_j + \boldsymbol{\mu}_j \boldsymbol{\zeta}_j \right\}, A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap B(\vec{k}_N) \cap C \right).$$

Рассмотрим слагаемое

$$\mathbf{E}\Big(\exp\Big\{ \sum_{j=1}^{\nu_N+1} \lambda_j \tau_j + \boldsymbol{\mu}_j \boldsymbol{\zeta}_j \Big\}, A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap B(\vec{k}_N) \cap C \Big)$$

и заметим, что число тех $j \in \{1, \dots, \nu_N + 1\}$, для которых вектор $(\lambda_j, \boldsymbol{\mu}_j)$ не совпадает с вектором из набора

$$\{(\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}_1)), \dots, (\lambda(\boldsymbol{\alpha}_N), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}_N))\}$$

не превышает N. Поэтому, выполняя по найденным параметрам $(\lambda_j, \boldsymbol{\mu}_j)$ абсолютно непрерывное преобразование приращений случайных векторов $\boldsymbol{\xi}_j = (\tau_j, \boldsymbol{\zeta}_j)$ и обозначая преобразованные случайные векторы $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j = (\hat{\tau}_j, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_j)$, получаем

$$\mathbf{E}\Big(\exp\Big\{ \sum_{j=1}^{\nu_N+1} \lambda_j \tau_j + \boldsymbol{\mu}_j \boldsymbol{\zeta}_j \Big\};\ A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap B(\vec{k}_N) \cap C \Big) =$$

$$\psi_1(\lambda_1, \boldsymbol{\mu}_1) \prod_{j=2}^{k_1+\dots+k_N+1} \psi(\lambda_j, \boldsymbol{\mu}_j) \mathbf{P}(\hat{A}(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap \hat{B}(\vec{k}_N) \cap \hat{C}),$$

где события $\hat{A}(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N)$, $\hat{B}(\vec{k}_N)$, $\hat{C}$ есть события $A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N)$, $B(\vec{k}_N)$, C для преобразованных случайных векторов $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j = (\hat{\tau}_j, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_j)$. Поскольку

$$\psi(\lambda_j, \boldsymbol{\mu}_j) = 1$$

для всех $j \in \{2, 3, \dots, k_1 + \dots + k_N + 1\}$ за исключением не более чем N штук, то в силу условий теоремы 2.2 имеем для всех достаточно больших n такую оценку

$$\psi_1(\lambda_1, \boldsymbol{\mu}_1) \prod_{j=2}^{k_1+\dots+k_N+1} \psi(\lambda_j, \boldsymbol{\mu}_j) \le R^{N+1},$$

где константа $R < \infty$ не зависит от параметра $\vec{k}_N \in \mathbb{Z}_+^N$. Выбирая далее событие C нужным образом:

$$C := \Big\{ \max_{1 \le j \le [u_N n]+1} |\boldsymbol{\xi}_j| \ge \ln^2 n \Big\},$$

и замечая, что число r различных приращений случайных векторов $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j$ конечно и не более $2N + 2$, и все эти случайные векторы удовлетворяют равномерному по n условию Крамера $[\mathbf{C}_0]$, получаем

$$\mathbf{P}(\hat{A}(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap \hat{B}(\vec{k}_N) \cap \hat{C}) =$$

$$\mathbf{P}\Big(\hat{A}(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap \hat{B}(\vec{k}_N) \cap \Big\{ \max_{1 \le j \le [u_N n]+1} |\hat{\boldsymbol{\xi}}_j| \ge \ln^2 n \Big\} \Big) \le ([u_N n] + 1) C_1 e^{-\delta \ln^2 n},$$

где параметры $C_1 < \infty$ и $\delta > 0$ не зависят от параметра $\vec{k}_N \in \mathbb{Z}_+^N$. Поскольку число параметров $\vec{k}_N \in \mathbb{Z}_+^N$, для которых событие $\hat{A}(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap \hat{B}(\vec{k}_N)$ не пусто не превышает числа $[u_N n]^N$, то получаем требуемое неравенство

$$\mathbf{P}(A(\vec{m}_N, \vec{\boldsymbol{x}}_N) \cap C) \le R_1^{N+1} [u_N n]^N \exp\{-n\overline{D}(\vec{v}_N, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_N) - \delta \ln^2 n\},$$

где $R_1 < \infty$. Лемма 3.1 доказана.

Авторы благодарят Е.И. Прокопенко за ценные советы, которые помогли улучшить изложение.

References

[1] A.A. Borovkov, *Asymptotic analysis of random walks. Rapidly decreasing distributions of increments*, Fizmatlit, Moscow, 2013. Zbl 1351.60003

[2] A.A. Borovkov, *Large deviation principles in boundary problems for compound renewal processes*, Sib. Math. J., **57**:3 (2016), 442–469. Zbl 1382.60052

[3] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Large deviation principles for the finite-dimensional distributions of compound renewal processes*, Sib. Math. J., **56**:1 (2015), 28–53. Zbl 1318.60031

[4] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Large deviation principles for trajectories of compound renewal processes. I*, Theory Probab. Appl., **60**:2 (2016), 207–224. Zbl 1341.60009

[5] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Large deviation principles for trajectories of compound renewal processes. II*, Theory Probab. Appl., **60**:3 (2016), 349–366. Zbl 1387.60051

[6] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *The second rate function and the asymptotic problems of renewal and hitting the boundary for multidimensional random walks*, Sib. Math. J., **37**:4 (1996), 647–682. Zbl 0878.60023

[7] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Chebyshev-type exponential inequalities for sums of random vectors and for trajectories of random walks*, Theory Probab. Appl., **56**:1 (2011), 21–43. Zbl 1238.60022

[8] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes under Cramer's condition. I*, Sib. Math. J., **59**:3 (2018), 383–402. Zbl 1404.60128

[9] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes under Cramer's condition. II*, Sib. Math. J., **59**:4 (2018), 578–597. Zbl 1404.60129

[10] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Properties of the deviation rate function and the asymptotics for the Laplace transform of the distribution of a compound renewal process*, Theory Probab. Appl., **64**:4 (2019), 499–512. Zbl 1432.60080

[11] D.R. Cox, *Renewal Theory*, Methuen, Londonetc., 1962. Zbl 0103.11504

[12] A.A. Mogulskii, *Local theorems for arithmetic compound renewal processes when Cramer's condition holds*, Sib. Electron. Math. Izv., **16** (2019), 21–41. Zbl 1422.60153

[13] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *The rate function and the fundamental function for multidimensional compound renewal process*, Sib. Electron. Math. Izv., **16** (2019), 1449–1463. Zbl 1423.60131

[14] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. I*, Sib. Electron. Math. Izv., **15** (2018), 475–502. Zbl 1395.60102

[15] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. II*, Sib. Electron. Math. Izv., **15** (2018), 503–527. Zbl 1395.60103

[16] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. III*, Sib. Electron. Math. Izv., **15** (2018), 528–553. Zbl 1395.60104

[17] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, , *Local theorems for arithmetic multidimensional compound renewal processes*, Matematicheskie trudy, **22**:2 (2019), 106–133.

[18] S. Asmussen, H. Albrecher, *Ruin Probabilities. 2nd ed.*, Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability **14**, Word Scientifics, Hackensack, 2010. Zbl 1247.91080

[19] M. Kotulski, *Asymptotic distributions of continuous-time random walks: A probabilistic approch*, J. Stat. Phis., **81**:3-4 (1995), 777–792. Zbl 1107.60318

[20] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Large deviation principle for multidimensional first compound renewal processes in the phase space*, Sib. Electron. Math. Izv., **16** (2019), 1464–1477. Zbl 1423.60132

[21] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Large deviation principle for multidimensional second compound renewal processes in the phase space*, Sib. Electron. Math. Izv., **16** (2019), 1478–1492. Zbl 1423.60133

[22] M. Zamparo, *Large Deviations in Discrete-Time Renewal Theory*, https://arxiv.org/abs/1903.03537, (2019).

[23] R. Lefevre, M. Mariani, L. Zambotti, *Large deviations for renewal processes*, Stochastic Processes Appl., **121**:10 (2011), 2243–2271. Zbl 1228.60035

[24] B. Tsirelson, *From uniform renewal theorem to uniform large and moderate deviations for renewal-reward processes*, Electron. Commun. Probab., **18** (2013), Paper No. 52. Zbl 1300.60039

[25] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Large deviation principles for the finite-dimensional distributions of multidimensional compound renewal processes*, Matematicheskie trudy, **23**:2 (2020), 1–29.

[26] A. Jurlewicz, M.M. Meerschaert, H.-P. Scheffler, *Cluster continuous time random walks*, Stud. Math. **205**:1 (2011), 13–30. Zbl 1242.60045

[27] B.V. Gnedenko, Y.K. Belyaev, A.D. Solov'ev, *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti*, Nauka, Moscow, 1965. Zbl 0146.40703

[28] F. Slanina, *Essentials of econophysics modelling*, Oxford University Press, Oxford, 2013. Zbl 1290.91002

[29] M. Zamparo *Large deviations in renewal models of statistical mechanics*, J. Phys. A: Math. Theor. **52** (2019), paper no. 495004.

Artem Vasilhevich Logachov
Lab. of Probability Theory and Math. Statistics, Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Dep. of High Math., Siberian State University of Geosystems and Technologies,
10, Plahotnogo str.,
Novosibirsk, 630108, Russia
Novosibirsk State University of Economics and Management,
56, Kamenskaya str.,
Novosibirsk, 630099, Russia
Email address: omboldovskaya@mail.ru

Anatolii Alfredovich Mogulskii
Lab. of Probability Theory and Math. Statistics, Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: mogul@math.nsc.ru