S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1730–1740 (2020) УДК 510.67, 519.151
DOI 10.33048/semi.2020.17.118 MSC 03C48, 05B35

ОБ АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТИ КЛАССА ФИНИТАРНЫХ МАТРОИДОВ И РАЗРЕШИМОСТИ ИХ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

А.В. ИЛЬЕВ, В.П. ИЛЬЕВ

Abstract. In the paper, finitary matroids are studied by means of the model theory. It is shown that the class of finitary matroids is nonaxiomatizable. Decidability of the universal theory of this class is proved.

Keywords: axiomatizability, finitary matroid, universal theory, decidability.

Введение

В работе изучаются вопросы аксиоматизируемости и алгоритмической разрешимости универсальной теории класса финитарных матроидов, рассматриваемых как алгебраические системы.

Абстрактный класс алгебраических систем языка L — это такое семейство алгебраических систем, которое вместе с любой L-системой содержит все изоморфные ей L-системы. В данной работе будут рассматриваться только такие классы алгебраических систем.

Предложение — это формула, не содержащая свободных переменных. Совокупность $Th(\boldsymbol{K})$ всех предложений языка L, истинных во всех L-системах из класса $\boldsymbol{K}$, называется *элементарной теорией* класса $\boldsymbol{K}$.

Две L-системы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ называются *элементарно эквивалентными*, если всякое предложение φ языка L истинно в $\mathcal{A}_1$ тогда и только тогда, когда оно является истинным в $\mathcal{A}_2$.

Il'ev, A.V., Il'ev, V.P., On axiomatizability of the class of finitary matroids and decidability of their universal theory.

Работа первого автора выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1.4, проект 0314-2019-0004.

Поступила 17 февраля 2020 г., опубликована 26 октября 2020 г.

Класс $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем *аксиоматизируем*, если существует такое множество предложений Z языка L, что произвольная L-система $\mathcal{A}$ принадлежит $\boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда любое предложение $\varphi \in Z$ истинно в $\mathcal{A}$. Множество предложений Z называется *множеством аксиом* для $\boldsymbol{K}$.

Формула φ называется *универсальной* или $\forall$-*формулой*, если $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \, \psi$, где ψ — бескванторная формула. Теория называется *универсальной*, если она включает только предложения, являющиеся универсальными формулами.

При рассмотрении любой теории первостепенное значение имеет вопрос об ее алгоритмической разрешимости. Теория называется *разрешимой*, если существует алгоритм, позволяющий для любого предложения φ языка L ответить на вопрос: принадлежит или нет φ этой теории. Установление разрешимости теории класса $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем позволяет сделать вывод о принципиальной возможности получения исчерпывающего перечня свойств, присущих всем системам класса $\boldsymbol{K}$.

В данной работе доказано, что класс финитарных матроидов не является аксиоматизируемым, однако существуют его аксиоматизируемые подклассы. Примером аксиоматизируемого класса финитарных матроидов является класс матроидов разбиений бесконечного ранга. Также установлено, что если в финитарном матроиде имеются бесконечные независимые множества, то для каждого конечного независимого множества существует содержащее его бесконечное независимое множество. Кроме того, любой матроид конечного ранга является подматроидом некоторого финитарного матроида бесконечного ранга. С помощью этих фактов доказана разрешимость универсальной теории финитарных матроидов.

1. Предварительные сведения

Фильтр над непустым множеством I — это непустая совокупность $\mathcal{F}$ подмножеств множества I, удовлетворяющая условиям:

1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
2) если $X \in \mathcal{F}$, $X \subseteq Y \subseteq I$, то $Y \in \mathcal{F}$;
3) если X, $Y \in \mathcal{F}$, то $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

Пусть I — бесконечное множество мощности $|I| = \alpha \geqslant \aleph_0$. Тогда семейство множеств $X \subseteq I$ таких, что $|I \setminus X| < \alpha$, является фильтром и называется *фильтром Фреше*. Примером фильтра Фреше над $\mathbb{N}$ является фильтр, состоящий из всех подмножеств $\mathbb{N}$, дополнения которых конечны.

Ультрафильтром называется максимальный фильтр, т. е. фильтр, не содержащийся ни в каком отличном от него фильтре.

Лемма 1. [2] *Для каждого фильтра над I существует содержащий его ультрафильтр над I.*

Лемма 2. [2] *Фильтр $\mathcal{F}$ над I является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $X \subseteq I$ либо $X \in \mathcal{F}$, либо $I \setminus X \in \mathcal{F}$.*

Пусть $\{\mathcal{A}_i = \langle A_i, \mathrm{L} \rangle \mid i \in I\}$ — семейство алгебраических систем языка $\mathrm{L} = \mathrm{R} \cup \mathrm{F}$, где R — множество предикатных, а F — множество функциональных символов.

Декартовым или *прямым произведением* семейства L-систем $\{\mathcal{A}_i\}$ называется L-система $\mathcal{A} = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i = \langle A, \mathrm{L} \rangle$, где A — декартово произведение основных множеств A_i, а предикаты и функции на A задаются условиями:

1) $P_s(a_1,\dots,a_{n_s})$ истинно в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $P_s(a_1(i),\dots,a_{n_s}(i))$ истинно в $\mathcal{A}_i$ для любого $i\in I$ ($a_1,\dots,a_{n_s}\in A,\ P_s\in \mathrm{R}-n_s$-местный предикат);

2) $f_t(a_1,\dots,a_{m_t})$ есть элемент a декартова произведения A с координатами $a(i)=f_t(a_1(i),\dots,a_{m_t}(i))\in A_i$ для любого $i\in I$ ($a_1,\dots,a_{m_t}\in A,\quad f_t\in \mathrm{F}-$ m_t-местная функция).

Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр над $I\neq\emptyset$. Отношение

$$a\equiv_{\mathcal{F}} b \Leftrightarrow \{i\in I\mid a(i)=b(i)\}\in\mathcal{F}\ (a,b\in A)$$

есть отношение эквивалентности на основном множестве $A=\prod\limits_{i\in I}A_i$ L-системы $\mathcal{A}=\prod\limits_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Пусть $a/\mathcal{F}=\{b\in A\mid a\equiv_{\mathcal{F}} b\}$ — смежный класс по этой эквивалентности для любого элемента $a\in A$, и $A/\mathcal{F}=\{a/\mathcal{F}\mid a\in A\}$.

Фильтрованное по фильтру $\mathcal{F}$ произведение L-систем $\mathcal{A}_i$ $(i\in I)$ — это L-система $\mathcal{A}/\mathcal{F}=\langle A/\mathcal{F},\ \mathrm{L}\rangle$, в которой

1) $P_s(a_1/\mathcal{F},\dots,a_{n_s}/\mathcal{F})$ истинно в $\mathcal{A}/\mathcal{F}\iff\{i\in I\mid P_s(a_1(i),\dots,a_{n_s}(i))$ истинно в $\mathcal{A}_i\}\in\mathcal{F}$ $(P_s\in\mathrm{R})$;

2) $f_t(a_1/\mathcal{F},\dots,a_{m_t}/\mathcal{F})=a/\mathcal{F}\iff\{i\in I\mid f_t(a_1(i),\dots,a_{m_t}(i))=a(i)\}\in\mathcal{F}$ $(f_t\in\mathrm{F})$.

L-системы $\mathcal{A}_i$ $(i\in I)$ называются *сомножителями* этого произведения.

Если $\mathcal{F}$ — ультрафильтр над I, то фильтрованное произведение $\mathcal{A}/\mathcal{F}$ называется *ультрапроизведением* L-систем $\mathcal{A}_i$ $(i\in I)$.

Теорема 1 (Лось)**.** [2] *Предложение φ языка* L *истинно в ультрапроизведении $\mathcal{A}/\mathcal{F}$* L*-систем $\mathcal{A}_i$ $(i\in I)$ тогда и только тогда, когда множество номеров сомножителей, в которых предложение φ истинно, принадлежит ультрафильтру $\mathcal{F}$.*

Замкнутость относительно ультрапроизведений вместе с замкнутостью относительно элементарной эквивалентности необходима и достаточна для аксиоматизируемости класса алгебраических систем.

Теорема 2 (Критерий аксиоматизируемости)**.** [2] *Класс алгебраических систем аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.*

2. Неаксиоматизируемость класса финитарных матроидов

Понятие матроида впервые было введено Уитни в 1935 году и охватывало только конечный случай [5].

Матроид — это пара $\mathcal{M}=(U,\mathcal{I})$, где U — непустое конечное множество, $\mathcal{I}$ — непустое семейство его подмножеств, называемых *независимыми*, обладающее свойствами:

(I1) если $A\in\mathcal{I},\ B\subseteq A$, то $B\in\mathcal{I}$ (наследственность);

(I2) для любых $A,B\in\mathcal{I}$ таких, что $|A|<|B|$, существует элемент $b\in B\setminus A$, для которого $A\cup\{b\}\in\mathcal{I}$ (пополнение).

Максимальные независимые подмножества множества $A\subseteq U$ называются *базами множества* A. Известно, что в матроиде все базы любого множества равномощны [1].

Рангом $r(A)$ *множества* A называется мощность любой базы множества A. Число $r(M)=r(U)$ называется *рангом матроида* $\mathcal{M}$.

Матроид конечного ранга — это пара $\mathcal{M} = (U, \mathcal{I})$, где U — непустое (возможно, бесконечное) множество, $\mathcal{I}$ — непустое семейство его независимых подмножеств, обладающее свойствами (I1), (I2), причем существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $|I| \leq n$ для всех $I \in \mathcal{I}$.

Далее рассмотрим класс финитарных матроидов, содержащий класс матроидов конечного ранга в качестве подкласса, а также матроиды бесконечного ранга.

Финитарный матроид — это пара $\mathcal{M} = (U, \mathcal{I})$, где U — непустое множество, $\mathcal{I}$ — непустое семейство его подмножеств, обладающее свойствами:

(I1) если $A \in \mathcal{I}$, $B \subseteq A$, то $B \in \mathcal{I}$;

(I2) для любых конечных множеств $A, B \in \mathcal{I}$ таких, что $|A| < |B|$, существует элемент $b \in B \setminus A$, для которого $A \cup \{b\} \in \mathcal{I}$;

(I3) $A \in \mathcal{I}$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathcal{I}$ для всех конечных подмножеств $B \subseteq A$.

Ранее было установлено, что класс матроидов ранга, не большего фиксированного $k \in \mathbb{N}$, является конечно $\forall$-аксиоматизируемым, а класс матроидов конечного ранга не является аксиоматизируемым [3]. При этом рассматривался язык $\mathrm{L}_I = \langle I_0, I_1, I_2, \ldots, = \rangle$, состоящий из счетного множества предикатов независимости, местность каждого из которых совпадает с его порядковым номером, и предиката равенства, причем предикаты независимости удовлетворяют условиям *неупорядоченности* и *неповторения элементов*, *наследственности* и *пополнения*:

(M1) $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ [I_n(x_1, \ldots, x_n) \to \bigwedge\limits_{\pi} I_n(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))]$, где π — любая перестановка $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$;

(M2) $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ [I_n(x_1, \ldots, x_n) \to \bigwedge\limits_{s \neq t} (x_s \neq x_t)]$, $n \in \mathbb{N}$;

(M3) $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ [(I_n(x_1, \ldots, x_n) \to I_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) \wedge \ldots \wedge I_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})) \wedge \wedge I_0]$, $n \in \mathbb{N}$;

(M4) $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \forall y_1 \ldots \forall y_{n+1}\ [I_n(x_1, \ldots, x_n) \wedge I_{n+1}(y_1, \ldots, y_{n+1}) \to \to \bigvee\limits_{q \in \{1, \ldots, n+1\}} I_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y_q)]$, $n \in \mathbb{N}$.

В связи с этим возникает естественный вопрос, можно ли аналогичным образом аксиоматизировать класс финитарных матроидов, рассмотрев язык $\mathrm{L} = \langle I_0, I_1, I_2, \ldots, I_0^\infty, I_1^\infty, I_2^\infty, \ldots, = \rangle$, состоящий из счетного множества предикатов, местность каждого из которых совпадает с его порядковым номером, а также предиката равенства. Предикат $I_n(x_1, \ldots, x_n)$ означает, что элементы $x_1, \ldots, x_n$ образуют независимое множество мощности n, и удовлетворяет аксиомам неупорядоченности и неповторения элементов, наследственности и пополнения, а предикат $I_n^\infty(x_1, \ldots, x_n)$ означает, что существует бесконечное независимое множество, содержащее элементы $x_1, \ldots, x_n$.

Примером аксиоматизируемого класса финитарных матроидов является класс матроидов разбиений бесконечного ранга.

Пусть $P = \{U_1, U_2, \ldots\}$ — счетное разбиение множества U, т. е. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i = U$ и $U_i \cap U_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$. Пара $\mathcal{M} = (U, \mathcal{I}_P)$ называется *матроидом разбиения* P множества U, если семейство $\mathcal{I}_P$ его независимых множеств определяется следующим образом:

$$\mathcal{I}_P = \{I \subseteq U \mid |I \cap U_i| \leq 1 \text{ для любого } U_i \in P\}. \tag{1}$$

Нетрудно заметить, что любой матроид разбиения является финитарным.

Теперь рассмотрим финитарный матроид $\mathcal{M} = (U, \mathcal{I})$, обладающий свойствами:

(P1) для любого $x \in U$ множество $\{x\} \in \mathcal{I}$;

(P2) для любых $x_1, x_2, x_3 \in U$ если $\{x_1, x_2\} \notin \mathcal{I}$ и $\{x_2, x_3\} \notin \mathcal{I}$, то $\{x_1, x_3\} \notin \mathcal{I}$.

Определим для матроида $\mathcal{M} = (U, \mathcal{I})$ семейство P следующим образом:

$$P = \{U_i \subseteq U \bigm| \forall u \in U_i \ \forall v \neq u \ \ v \in U_i \text{ если и только если } \{u, v\} \notin \mathcal{I}\}. \tag{2}$$

Следующая лемма дает нам эквивалентное определение матроида разбиения.

Лемма 3. 1) *Пусть $\mathcal{M} = (U, \mathcal{I}_P)$ — матроид разбиения, семейство независимых множеств которого определено по правилу* (1). *Тогда матроид $\mathcal{M}$ является финитарным матроидом, обладающим свойствами* (P1) *и* (P2), *причем для $\mathcal{I} = \mathcal{I}_P$ выполнено равенство* (2).

2) *Пусть $\mathcal{M} = (U, \mathcal{I})$ — финитарный матроид, обладающий свойствами* (P1) *и* (P2), *а его семейство P определено по правилу* (2). *Тогда P являтся разбиением множества U, причем для $\mathcal{I}_P = \mathcal{I}$ имеет место равенство* (1), *т. е. $\mathcal{M}$ является матроидом разбиения.*

Доказательство. 1) Для матроида разбиения выполнение аксиом (I1)–(I3) финитарного матроида, свойств (P1), (P2) и равенства (2) напрямую следует из правила (1) и понятия разбиения множества.

В качестве примера докажем свойство (P2). Если $\{x_1, x_2\} \notin \mathcal{I}_P$ и $\{x_2, x_3\} \notin \mathcal{I}_P$, то по правилу (1) и в силу того, что элемент x_2 может лежать только в одном множестве из разбиения P, существует такое множество $U_i \in P$, что $x_1, x_2, x_3 \in U_i$. Отсюда следует, что $\{x_1, x_3\} \notin \mathcal{I}_P$, поскольку $|\{x_1, x_3\} \cap U_i| > 1$.

2) Докажем, что для любого элемента $u \in U$ финитарного матроида $\mathcal{M} = (U, \mathcal{I})$, обладающего свойствами (P1) и (P2), существует единственное множество $U_i \in P$, содержащее элемент u.

Если $|U| = 1$, то $U = \{u\}$ и $P = \{U\}$.

Если $|U| > 1$, то для любого элемента $u \in U$ будет иметь место один из двух случаев. Либо для каждого элемента $v \in U$ множество $\{u, v\} \in \mathcal{I}$, и в этом случае $U_i = \{u\}$. Либо найдется элемент $v \in U$ такой, что множество $\{u, v\} \notin \mathcal{I}$, но в этом случае в силу свойств (P1) и (P2) существует единственное содержащее элемент u максимальное по включению множество V, в котором $\{x_1, x_2\} \notin \mathcal{I}$ для любой пары элементов $x_1, x_2 \in V$, и тогда $U_i = V$. Таким образом, для множеств семейства P будут выполнены условия $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i = U$ и $U_i \cap U_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$, то есть P является разбиением множества U.

Равенство (1) напрямую следует из правила (2). $\square$

Свойства (P1) и (P2) позволяют построить аксиоматику класса матроидов разбиений.

Теорема 3. *Класс матроидов разбиений является универсально аксиоматизируемым.*

Доказательство. Приведем аксиоматику класса матроидов разбиений.

Матроид разбиения — это алгебраическая система $\mathcal{M} = \langle U, L\rangle$; ее язык $L = \langle I_0, I_1, I_2, \dots, I_0^\infty, I_1^\infty, I_2^\infty, \dots, =\rangle$ состоит из счетного множества предикатов независимости, местность каждого из которых совпадает с его порядковым номером, и предиката равенства; предикаты независимости конечных множеств удовлетворяют аксиомам (M1)–(M4) неупорядоченности и неповторения элементов, наследственности и пополнения; кроме того выполнены аксиомы:

$\forall x\ I_1(x)$;

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3\ [\neg I_2(x_1, x_2) \wedge \neg I_2(x_2, x_3) \to \neg I_2(x_1, x_3)]$;

$\forall x_1 \dots \forall x_n\ [I_n^\infty(x_1, \dots, x_n) \to I_n(x_1, \dots, x_n)],\ \ n \in \{1, 2, \dots\}$.

Первые две аксиомы следуют из леммы 3, а остальные, объединенные в третье условие, — из свойства (I3) финитарных матроидов. □

Теперь вернемся к классу всех финитарных матроидов.

Лемма 4. *Класс финитарных матроидов незамкнут относительно ультрапроизведений.*

Доказательство. Рассмотрим фильтр Фреше над множеством $\mathbb{N}$, состоящий из всех подмножеств $\mathbb{N}$, дополнения которых конечны. Из леммы 1 следует, что существует ультрафильтр $\mathcal{F}$ над $\mathbb{N}$, содержащий этот фильтр Фреше. В силу леммы 2 этот ультрафильтр не содержит ни одного конечного множества.

Рассмотрим счетно бесконечное множество *i-однородных* матроидов $\mathcal{M}_i$ конечного ранга — у каждого $\mathcal{M}_i$ ранг совпадает с номером i и все множества мощности $p \leq i$ независимы. Покажем, что их ультрапроизведение $\mathcal{M}/\mathcal{F} = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_i/\mathcal{F}$ не является финитарным матроидом.

Очевидно, что во всяком $\mathcal{M}_i$ истинно предложение

$$\varphi_i = \forall x_1 \dots \forall x_i\ [I_i(x_1, \dots, x_i)\ \wedge\ \neg I_i^\infty(x_1, \dots, x_i)],$$

означающее независимость любого множества мощности i и несуществование содержащего его бесконечного независимого множества, причем предложение φ_i будет также истинным во всех $\mathcal{M}_j$, где $j > i$. Т. е. для сколь угодно большого i существует счетно бесконечное множество матроидов $\mathcal{M}_j$, в которых предложение φ_i истинно. Тогда по теореме 1 все φ_i будут истинны в ультрапроизведении $\mathcal{M}/\mathcal{F}$, т. е. оно не является финитарным матроидом, поскольку содержит конечные независимые множества сколь угодно большой мощности, но не содержит бесконечных независимых множеств. □

В силу леммы 4 и теоремы 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Класс финитарных матроидов не является аксиоматизируемым.*

3. Разрешимость универсальной теории финитарных матроидов

Ранее было доказано, что универсальная теория класса матроидов ранга, не большего фиксированного $k \in \mathbb{N}$, разрешима, и универсальная теория класса матроидов конечного ранга тоже разрешима [4].

Введем для финитарных матроидов следующие обозначения: $\mathcal{I}^F$ — семейство, состоящее только из конечных независимых множеств, $\mathcal{I}^\infty$ — семейство, состоящее только из бесконечных независимых множеств.

Лемма 5. *Если в финитарном матроиде имеются бесконечные независимые множества, то для любого конечного независимого множества существует содержащее его бесконечное независимое множество.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} = (U, \mathcal{I})$ — финитарный матроид, в котором семейство $\mathcal{I}^\infty$ непусто, а множество $I \in \mathcal{I}^\infty$ и множество $A \in \mathcal{I}^F$ выбраны произвольно. Докажем, что непременно существует множество из $\mathcal{I}^\infty$, содержащее множество A.

В силу свойства (I2) пополнения и свойства (I3) множество A может быть расширено до конечного независимого множества сколь угодно большой мощности за счет элементов из множества I, поскольку все его конечные подмножества, в том числе и те, мощность которых превосходит мощность множества A, независимы. Таким образом, существует бесконечная цепочка конечных независимых множеств $A \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, для каждого из которых $|A_{k+1}| = |A_k| + 1$.

Рассмотрим бесконечное множество $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, содержащее в себе множество A. Заметим, что любое его конечное подмножество B независимо. Действительно, для любого конечного B существует множество A_k такое, что $B \subseteq A_k$. Поскольку все $A_k \in \mathcal{I}^F$, то в силу свойства (I1) наследственности $B \in \mathcal{I}^F$. А значит, по свойству (I3) множество $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ принадлежит $\mathcal{I}^\infty$. □

Лемма 6. *Любой матроид конечного ранга является подматроидом некоторого финитарного матроида бесконечного ранга.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} = (U, \mathcal{B})$ — матроид конечного ранга и $\mathcal{B}$ — семейство всех его конечных баз. Достроим его до матроида $\mathcal{M}^\infty = (U \cup V, \mathcal{B}^\infty)$, где V — произвольное счетно бесконечное множество такое, что $U \cap V = \emptyset$, а семейство баз $\mathcal{B}^\infty = \{B \cup V \mid B \in \mathcal{B}\}$. Очевидно, что матроид $\mathcal{M}^\infty$ будет финитарным матроидом бесконечного ранга, а матроид $\mathcal{M}$ — его подматроидом. □

Лемма 7. *Если у двух финитарных матроидов, построенных над одним основным множеством, совпадают семейства конечных независимых множеств, то их семейства бесконечных независимых множеств также совпадают.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}_1 = (U, \mathcal{I}_1)$ и $\mathcal{M}_2 = (U, \mathcal{I}_2)$ — финитарные матроиды, у которых $\mathcal{I}_1^F = \mathcal{I}_2^F$. Докажем, что $\mathcal{I}_1^\infty = \mathcal{I}_2^\infty$, от противного.

Без ограничения общности предположим, что существует множество $A \in \mathcal{I}_2^\infty$ такое, что $A \notin \mathcal{I}_1^\infty$. В силу свойства (I3) все его конечные подмножества содержатся в $\mathcal{I}_2^F$, а значит они содержатся и в $\mathcal{I}_1^F$ тоже. Таким образом, в финитарном матроиде $\mathcal{M}_1$ существует бесконечное зависимое множество A, все конечные подмножества которого являются независимыми, что противоречит свойству (I3). Следовательно, $\mathcal{I}_1^\infty = \mathcal{I}_2^\infty$. □

Из леммы 7 можно сделать вывод, что любой финитарный матроид однозначно определяется своим семейством конечных независимых множеств.

Теорема 5. *Универсальная теория финитарных матроидов разрешима.*

Доказательство. Рассмотрим следующий алгоритм проверки предложения на принадлежность $\forall$-теории T финитарных матроидов. На вход алгоритма подается произвольное универсальное предложение φ языка L. Алгоритм выдает ответ ДА, если предложение φ принадлежит универсальной теории T матроидов конечного ранга, и ответ НЕТ в противном случае.

Алгоритм.

Шаг 0. Для универсального предложения φ формулируется предложение $\neg\varphi$ и эквивалентное ему предложение $\theta = \exists x_1 \ldots \exists x_p \ \psi$, где ψ – бескванторная формула. Затем θ преобразуется в эквивалентное предложение θ_0, находящееся в предваренной дизъюнктивной форме: $\theta_0 = \exists x_1 \ldots \exists x_p \ (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)$, где ψ_i – конъюнкты, $i = 1, \ldots, m$.

Предложение φ не принадлежит теории T тогда и только тогда, когда предложение $\neg\varphi$, а значит и θ_0 истинно в некотором финитарном матроиде. Последнее верно в том и только том случае, когда в этом матроиде истинно значение хотя бы одного конъюнкта ψ_i.

Далее алгоритм последовательно просматривает все конъюнкты ψ_i предложения θ_0 и для каждого из них совершает шаги 1–10. При прохождении этих шагов осуществляется естественное упрощение предложения θ_0 и проверяется выполнение условий (M1)–(M4) неупорядоченности и неповторения элементов, наследственности и пополнения для предикатов $I_n(x_1, \ldots, x_n)$, а также утверждения леммы 5.

Шаг 1. Алгоритм просматривает все множители конъюнкта ψ_i. Если среди них содержится множитель $x = y$, то в этом конъюнкте переменная y везде заменяется на переменную x. Затем множитель $x = x$ удаляется из ψ_i.

Шаг 2. Если конъюнкт ψ_i содержит множитель $x \neq x$, то алгоритм удаляет конъюнкт ψ_i как тождественно ложный и переходит к рассмотрению следующего конъюнкта.

Шаг 3. Для каждого множителя конъюнкта ψ_i вида $I_n^\infty(x_1, \ldots, x_n)$ алгоритм добавляет в него множитель вида $I_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Шаг 4. Для любого множителя конъюнкта ψ_i вида $I_n(x_1, \ldots, x_n)$ алгоритм ищет в этом конъюнкте и удаляет все остальные множители вида $I_n(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))$, где π — любая перестановка переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Шаг 5. Для любого множителя конъюнкта ψ_i вида $I_n(x_1, \ldots, x_n)$ алгоритм ищет в этом конъюнкте множитель вида $\neg I_n(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))$, где π — любая перестановка переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если такой множитель найден, то алгоритм удаляет конъюнкт ψ_i как противоречащий аксиоме (M1) и переходит к рассмотрению следующего конъюнкта.

Шаг 6. Если множитель вида $I_n(x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_t, \ldots, x_n)$, где $x_s = x_t$, содержится в конъюнкте ψ_i, то алгоритм удаляет конъюнкт ψ_i как противоречащий аксиоме (M2) и переходит к рассмотрению следующего конъюнкта.

Шаг 7. Для любого множителя конъюнкта ψ_i вида $I_n(x_1, \ldots, x_n)$ алгоритм ищет в этом конъюнкте множитель $\neg I_k(y_1, \ldots, y_k)$, для которого выполнено $\{y_1, \ldots, y_k\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Если такой множитель найден, то алгоритм удаляет конъюнкт ψ_i как противоречащий аксиоме (M3) и переходит к рассмотрению следующего конъюнкта.

Шаг 8. Если в конъюнкте ψ_i содержится множитель $\neg I_0$, то алгоритм удаляет конъюнкт ψ_i как противоречащий аксиоме (M3) и переходит к рассмотрению следующего конъюнкта.

Шаг 9. Для любой пары $I_n(x_1,\ldots,x_n)$ и $I_{n+1}(y_1,\ldots,y_{n+1})$ множителей конъюнкта ψ_i алгоритм ищет в этом конъюнкте произведение множителей $\bigwedge\limits_{q\in\{1,\ldots,n+1\}} \neg I_{n+1}(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n),\pi(y_q))$, где π — любая перестановка $n+1$ переменных $x_1,\ldots,x_n,y_q$. Если такое произведение найдено, то алгоритм удаляет конъюнкт ψ_i как противоречащий аксиоме (M4) и переходит к рассмотрению следующего конъюнкта.

Шаг 10. Если конъюнкт ψ_i содержит хотя бы один множитель вида $I_n^\infty(x_1,\ldots,x_n)$, но при этом в нем содержится пара множителей $\neg I_k^\infty(y_1,\ldots,y_k)$ и $I_l(\pi(y_1),\ldots,\pi(y_l))$, где $k\le l$ и π — любая перестановка переменных $y_1,\ldots,y_l$, то алгоритм удаляет конъюнкт ψ_i как противоречащий лемме 5 и переходит к рассмотрению следующего конъюнкта.

Если в результате выполнения шагов 1–10 алгоритма все конъюнкты предложения θ_0 будут удалены, то это означает, что не существует финитарных матроидов, в которых предложение $\neg\varphi$ было бы истинно. В этом случае исходное предложение φ принадлежит универсальной теории финитарных матроидов, алгоритм выдает ответ ДА и завершает работу.

Если же после прохождения шагов 1–10 какие-то конъюнкты не удалены, то алгоритм переходит на шаг 11.

Шаг 11. Алгоритм последовательно просматривает все оставшиеся конъюнкты ψ_i и для каждого из них пытается отыскать финитарный матроид, в котором конъюнкт ψ_i принимает значение “истина”. Для этого алгоритму достаточно определить наибольшую местность k множителей вида $I_k(y_1,\ldots,y_k)$, перебрать все семейства k-элементных подмножеств переменных конъюнкта ψ_i и проверить, удовлетворяет ли какое-нибудь из них условию этого конъюнкта и является ли оно семейством баз конечного матроида ранга k. Если хотя бы для одного конъюнкта это удастся, то алгоритм выдаст ответ НЕТ. Данное построение осуществляется в несколько этапов.

1) Пусть $X_i=\{x_1,\ldots,x_n\}$ — множество переменных конъюнкта ψ_i, а k — наибольшая из местностей его множителей вида $I_k(y_1,\ldots,y_k)$. Занумеруем все k-элементные подмножества множества X_i в лексикографическом порядке. Обозначим множество таких номеров K_i. При этом множество номеров k-элементных подмножеств X_i, входящих в конъюнкте ψ_i в множители вида $I_k(y_1,\ldots,y_k)$, обозначим как L_i, а множество номеров k-элементных подмножеств X_i, входящих в множители вида $\neg I_k(y_1,\ldots,y_k)$, обозначим как M_i.

2) Каждое семейство k-элементных подмножеств X_i может быть записано в виде подмножества номеров из K_i, идущих в порядке возрастания. Данные семейства мы тоже нумеруем в порядке лексикографического возрастания. Обозначим $\mathcal{B}_s$ s-тое семейство k-элементных подмножеств, состоящих из переменных конъюнкта ψ_i. Последовательно просматриваем все $\mathcal{B}_s$ в порядке возрастания номеров.

3) Если для текущего семейства $\mathcal{B}_s$ одновременно выполнено $L_i\subseteq\mathcal{B}_s$ и $M_i\cap\mathcal{B}_s=\emptyset$, то проверяем, удовлетворяет ли $\mathcal{B}_s$ всем остальным условиям конъюнкта ψ_i. Для этого сначала просматриваем все его множители вида $I_l(y_1,\ldots,y_l)$, где $l<k$, и для каждого из них ищем в $\mathcal{B}_s$ элемент, содержащий $\{y_1,\ldots,y_l\}$ в качестве подмножества. Если для какого-то множителя алгоритм не находит соответствующего элемента в $\mathcal{B}_s$, то семейство $\mathcal{B}_s$ не удовлетворяет условию конъюнкта ψ_i и алгоритм переходит к рассмотрению следующего

семейства $\mathcal{B}_{s+1}$. В противном случае просматриваем все множители конъюнкта ψ_i вида $\neg I_l(y_1,\dots,y_l)$, где $l<k$, и также для каждого из них ищем в $\mathcal{B}_s$ элемент, содержащий $\{y_1,\dots,y_l\}$ в качестве подмножества. Если для какого-то множителя алгоритм находит соответствующий элемент в $\mathcal{B}_s$, то семейство $\mathcal{B}_s$ не удовлетворяет условию конъюнкта ψ_i и алгоритм переходит к рассмотрению следующего семейства $\mathcal{B}_{s+1}$. Иначе осуществляется переход на этап 4.

4) Проверяем, является ли текущее семейство $\mathcal{B}_s$ семейством баз некоторого конечного матроида ранга k над множеством переменных X_i. Для этого запускается специальная процедура, описанная далее. Если данная процедура дает утвердительный ответ, то это означает, что найден матроид $\mathcal{M}=(X_i,\mathcal{B}_s)$ ранга k такой, что конъюнкт ψ_i принимает значение "истина" в нем самом либо, если по условию конъюнкта существуют бесконечные независимые множества, в финитарном матроиде бесконечного ранга, который содержит матроид $\mathcal{M}$ в качестве подматроида. Такой финитарный матроид существует по лемме 6 и может быть однозначно определен по лемме 7 для любого бесконечного множества переменных $Y\supset X_i$. Тогда алгоритм выдает ответ НЕТ и завершает свою работу. В противном случае алгоритм переходит на этап 3 шага 11 и рассматривает семейство $\mathcal{B}_{s+1}$.

Процедура, проверяющая, является ли $\mathcal{B}_s$ семейством баз некоторого конечного матроида ранга k.

Напомним определение конечного матроида в терминах баз. *Матроид* — это пара $\mathcal{M}=(U,\mathcal{B})$, где U — непустое конечное множество, $\mathcal{B}$ — непустое семейство его подмножеств (баз), обладающее свойствами:

(B1) если $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ и $B_1\neq B_2$, то $B_1\not\subset B_2$ и $B_2\not\subset B_1$;

(B2) если $B_1,B_2\in\mathcal{B}$, то для любого $b_1\in B_1$ существует $b_2\in B_2$ такой, что $(B_1\setminus\{b_1\})\cup\{b_2\}\in\mathcal{B}$.

Свойство (B1) выполнено в силу того, что все множества из семейства $\mathcal{B}_s$ имеют мощность k. Переходим к проверке свойства (B2). Последовательно просматриваем в лексикографическом порядке все пары подмножеств переменных X_i, номера которых входят в $\mathcal{B}_s$. Для каждой из этих пар ищем в $\mathcal{B}_s$ подмножества, удовлетворяющие (B2). Если процедура находит такие подмножества, то осуществляется переход к следующей паре, иначе процедура заканчивает работу. Если все пары подмножеств переменных X_i, номера которых входят в $\mathcal{B}_s$, успешно рассмотрены, то семейство $\mathcal{B}_s$ является семейством баз некоторого матроида $\mathcal{M}=(X_i,\mathcal{B}_s)$ ранга k. В противном случае $\mathcal{B}_s$ семейством баз матроида не является.

Конец процедуры.

Если ни для какого семейства $\mathcal{B}_s$ не удается найти подходящего матроида ранга k, то алгоритм удаляет конъюнкт ψ_i и переходит к рассмотрению следующего конъюнкта.

Если все конъюнкты предложения θ_0 удалены, то это означает, что не существует финитарных матроидов, в которых предложение $\neg\varphi$ было бы истинно. В этом случае исходное предложение φ принадлежит универсальной теории T финитарных матроидов, алгоритм выдает ответ ДА и завершает работу.

Конец алгоритма. □

References

[1] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Mir, Moscow, 1982. MR0694072

[2] Yu.L. Ershov, E.A. Palyutin, *Mathematical logic*, Nauka, Moscow, 1987. Zbl 0632.03001

[3] A.V. Il'ev, *On axiomatizability of hereditary classes of graphs and matroids*, Sib. Electron. Math. Izv., **13** (2016), 137–147. Zbl 1355.03031

[4] A.V. Il'ev, V.P. Il'ev, *On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids*, Journal of Physics: Conference Series, **1210** (2019), 012056.

[5] H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, Am. J. Math., **57** (1935), 509–533. Zbl 0012.00404

Artyom Victorovich Il'ev
Sobolev Institute of Mathematics,
13, Pevtsova str.,
Omsk, 644043, Russia
Email address: artyom_iljev@mail.ru

Victor Petrovich Il'ev
Dostoevsky Omsk State University,
55a, Mira ave.,
Omsk, 644077, Russia
Email address: iljev@mail.ru