S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1722–1729 (2020) УДК 512.552.4
DOI 10.33048/semi.2020.17.117 MSC 16R10

О КОНЕЧНЫХ СИЛЬНО КРИТИЧЕСКИХ КОЛЬЦАХ

Ю.Н. МАЛЬЦЕВ, Е.В. ЖУРАВЛЕВ

Abstract. In the present paper, some properties of strongly critical rings are investigated. It is proved that every simple finite ring and each critical ring of order p^2 (p is a prime) are strongly critical. There is an example of critical ring of order 8 which is not strongly critical. It is also proved that if R is a finite ring and $M_n(R)$ is a strongly critical ring, then R is a strongly critical ring. For rings with unity, it is proved that: 1) if R is a finite ring, $R/J(R) = M_n(GF(q))$ and $J(R)$ is a strongly critical ring, then R is a strongly critical ring; 2) R is strongly critical ring iff $M_n(R)$ is a strongly critical ring (for any $n \geq 1$).

Keywords: finite ring, critical ring, strongly critical ring.

1. Введение

В работе рассматриваются ассоциативные кольца. Введем необходимые определения и обозначения. Многообразие колец $\mathfrak{M}$, порожденное семейством колец $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $\mathrm{var}\,\langle A_i \mid i \in I\rangle$, а его идеал тождеств $T(\mathfrak{M})$. Конечное кольцо A называется критическим, если A не принадлежит многообразию, порожденному всеми собственными факторами кольца A (см. [1]). В частности, конечное критическое кольцо является подпрямо неразложимым и его порядок $|A| = p^n$, где p – простое число. Известно, что локально конечные многообразия колец порождаются своими критическими подкольцами и многообразие, порожденное конечным кольцом содержит конечное число критических колец (см. [1, 2]). В связи с этим представляет интерес изучение строения критических колец, а также нижних этажей решеток кроссовых многообразий колец. В работе [3] описаны атомы решетки многообразий колец. В работе [4] описаны определяющие тождества многообразия колец, порожденного всеми кольцами порядков p, p^2, где p – простое число. Важным подклассом класса критических

Maltsev, Y.N., Zhuravlev, E.V., On finite strongly critical rings.

Поступила 13 апреля 2020 г., опубликована 26 октября 2020 г.

колец являются так называемые сильно критические кольца. Конечное кольцо R порядка n называется сильно критическим, если $R \notin \operatorname{var}\langle B \mid |B| < n\rangle$, то есть существует многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ свободного ассоциативного кольца $\mathbb{Z}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ такой, что $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ является тождеством в любом конечном кольце B порядка меньшего n, но не является тождеством в кольце R (такой многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ мы будем называть сильно критическим). Так как собственные факторы конечного кольца R имеют порядок меньший, чем порядок R, то каждое сильно критическое кольцо является критическим, а следовательно, подпрямо неразложимым и его порядок – степень простого числа. Таким образом, сильно критические кольца образуют подкласс класса всех критических колец.

Пусть $J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R и $M_n(R)$ – полное матричное кольцо порядка n над кольцом R. В настоящей работе исследованы некоторые свойства сильно критических колец. Доказано, что каждое простое конечное кольцо и каждое критическое кольцо порядка p^2 (p – простое число) являются сильно критическими, построен пример критического кольца порядка 8, не являющегося сильно критическим, а также, доказано, что если R – конечное кольцо и $M_n(R)$ сильно критическое кольцо, то R – сильно критическое кольцо. Для колец с единицей доказано:

(1) если R – конечное кольцо, $R/J(R) = M_n(GF(q))$ и $J(R)$ – сильно критическое кольцо, то R – сильно критическое кольцо.

(2) R – сильно критическое кольцо тогда и только тогда, когда для любого $n \geq 1$ кольцо $M_n(R)$ – сильно критическое.

2. Конечные сильно критические кольца

Предложение 1. *Пусть R – конечное кольцо порядка p^n, p – простое число, и*

$$R \in \mathfrak{M} = \operatorname{var}\langle A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_s \mid |A_i| = p^{n_i}, i \leq k, (|B_j|, p) = 1, 1 \leq j \leq s\rangle .$$

Тогда $R \in \operatorname{var}\langle A_1, \ldots, A_k\rangle$.

Доказательство. Пусть $l = \prod\limits_{i=1}^{k} |A_i|$, $m = \prod\limits_{i=1}^{s} |B_i|$. Тогда числа m, p являются взаимно простыми и найдутся целые числа u, v такие, что $lu + mv = 1$. Пусть F – свободное ассоциативное кольцо с образующими $x_1, \ldots, x_N$ в многообразии $\mathfrak{M}$, где N – число образующих кольца R. Тогда R – гомоморфный образ кольца F, то есть $R \cong F/I$, где $I \lhd F$ и F – подкольцо некоторой конечной прямой суммы

$$A'_1 \oplus \ldots \oplus A'_q \oplus B'_1 \oplus \ldots \oplus B'_L,$$

где $A'_i \in \{A_1, \ldots, A_k\}$, $B'_j \in \{B_1, \ldots, B_s\}$ (см. [1], с. 311, лемма 4.20). Так как элементы $F \cap (B'_1 \oplus \ldots \oplus B'_L)$ имеют аддитивные порядки, взаимно простые с $|R| = p^n$, то $F \cap (B'_1 \oplus \ldots \oplus B'_L) \subseteq I$. Пусть $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{q} A'_i$, $B = \bigoplus\limits_{i=1}^{L} B'_i$ и $y \in F$. Тогда $y = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$, $y = y \cdot 1 = y(lu) + y(mv) = (a+b)lu + (a+b)mv = b(lu) + (mv)a$, где $b(lv) \in F \cap B \subseteq I$, $F = mF + I$. Следовательно, $R \cong F/I = mF/(mF \cap I)$, где $mF \subseteq mA \in \operatorname{var}\langle A_1, \ldots, A_k\rangle$. $\square$

Из предложения 1 следует, что если конечное кольцо R порядка p^n (p – простое число) не является сильно критическим, то R принадлежит многообразию, порожденному конечными кольцами порядка p^k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$).

Предложение 2. *Конечное кольцо R порядка p^n, p – простое число, является сильно критическим кольцом тогда и только тогда, когда*

$$R \notin \mathfrak{M} = \operatorname{var}\left\langle S \,|\, |S| = p^i, i < n \right\rangle.$$

Доказательство. Если R – сильно критическое кольцо, то, по определению, $R \notin \mathfrak{M}$. Докажем обратное утверждение. Пусть $R \notin \mathfrak{M}$. Если R не является сильно критическим, то $R \in \operatorname{var}\langle A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_s\rangle$, где $|A_i| = p^i$, $i < n$ и порядки $|B_i|$ являются числами, взаимно простыми с p и меньшими p^n. По предложению 1, $R \in \operatorname{var}\langle A_1, \dots, A_k\rangle$. Противоречие. $\square$

Лемма. *Пусть R и T – кольца, а S – конечное подкольцо T, такое, что $S/I \cong R$ для некоторого идеала $I \lhd S$. Предположим, что порядок S наименьший среди подколец T с таким свойством. Тогда*

(1) *$I \subseteq J(S)$;*
(2) *если R – кольцо с единицей, то и S – кольцо с единицей.*

Доказательство. Если $I \nsubseteq J(R)$, то найдется примитивный идеал $P \lhd S$, такой, что $I \nsubseteq P$ и так как P – максимальный идеал в S, то $P+I = S$. Следовательно, $R \cong S/I \cong P/(P \cap I)$. Это противоречит минимальности $|S|$. Следовательно, $I \subseteq J(S)$ и I – нильпотентный идеал в S. Если R – кольцо с единицей, то существует идемпотент e кольца S, являющийся прообразом единицы кольца R (см. [6], с. 54). Тогда $eS(1-e) + (1-e)Se + (1-e)S(1-e) \subseteq I$ и $S = eSe + I$. Откуда следует, что $R \cong S/I \cong eSe/(eSe \cap I)$. Ввиду минимальности порядка $|S|$ кольцо S совпадает с подкольцом eSe, содержащим единицу e. $\square$

Теорема 1. *Пусть R – конечное нильпотентное кольцо, не являющееся сильно критическим кольцом. Тогда $R \in \operatorname{var}\langle A_1, \dots, A_n\rangle$, где $A_1, \dots, A_n$ – нильпотентные кольца порядка меньшего $|R|$.*

Доказательство. Так как кольцо R не является сильно критическим, то существуют конечные кольца $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ порядка меньшего $|R|$, такие, что кольцо $R \in \operatorname{var}\langle A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\rangle$, A_i – нильпотентные кольца, $i \leq n$, а $B_1, \dots, B_m$ – ненильпотентные кольца. Кольцо R является гомоморфным образом свободного кольца F (от конечного числа образующих) многообразия $\operatorname{var}\langle A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\rangle$. Известно, что кроссово многообразие колец (см. [1, 2]) является локально конечным. В частности, $|F| < \infty$ и F – подкольцо некоторой конечной прямой суммы

$$T = \left(\bigoplus_{j=1}^{l} A_{i_j}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{j=1}^{v} B_{u_j}\right),$$

где $A_{i_j} \in \{A_1, \dots, A_n\}$, $B_{u_j} \in \{B_1, \dots, B_m\}$. Среди всех подколец кольца T выберем подкольцо S наименьшего порядка такое, что $R \cong S/I$ для некоторого $I \lhd S$. По лемме имеем, что $I \subseteq J(S)$. Так как R – нильпотентное кольцо, то $S^N \subseteq I$. Пусть $J(S)^t = (0)$. Тогда $S^{Nt} \subseteq I^t \subseteq J(S)^t = (0)$, то есть S – нильпотентное подкольцо кольца T.

Рассмотрим проекции

$$\pi_j : S \to B_{u_j}, \quad 1 \leq j \leq v,$$

такие, что если $s = (a_{i_1}, \dots, a_{i_l}, b_{u_1}, \dots, b_{u_v}) \in T$, то $\pi_j(s) = b_{u_j} \in B_{u_j}$, $1 \leq j \leq v$. Так как S – нильпотентное кольцо, то $\pi_j(S)$ – нильпотентное подкольцо кольца

B_{u_j} и

$$S \subseteq \left(\bigoplus_{j=1}^{l} A_{ij}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{j=1}^{v} \pi_j(S)\right) \subseteq T.$$

Это означает, что $R \in \operatorname{var}\langle A_1, \ldots, A_n, \pi_1(S), \ldots, \pi_v(S)\rangle$, где A_i, $\pi_j(S)$ – нильпотентные кольца порядка меньшего $|R|$, $i \leq n$, $j \leq v$. $\square$

Теорема 2. *Пусть R простое конечное кольцо. Тогда R – сильно критическое кольцо.*

Доказательство. Известно, что в этом случае $R = M_n(GF(q))$ (см. [1, 5]). Пусть $N = q^{n^2} = |R|$. Рассмотрим многочлен

$$f(y_i, t_{\alpha\beta}) = (y_1 - y_2)t_{12}(y_1 - y_3)t_{13}(y_1 - y_4)t_{14} \ldots (y_1 - y_N)t_{1N}(y_2 - y_3)t_{23} \ldots \\ \ldots (y_{N-2} - y_{N-1})t_{N-2\,N-1}(y_{N-2} - y_N)t_{N-2\,N}(y_{N-1} - y_N)$$

из свободного ассоциативного кольца $\mathbb{Z}\langle y_1, \ldots, y_N, t_{ij}\rangle$, $1 \leq i < j \leq N$. Покажем, что многочлен $f(y_i, t_{\alpha\beta})$ не является тождеством на R и является тождеством на любом кольце S, $|S| < N$. Пусть $R = \{a_1 = 0, a_2, \ldots, a_N\}$ и I_{ij} – идеал, порожденный элементами $(a_i - a_j) \neq 0$, $i < j$. Так как R – простое кольцо, то $I_{ij} = R$ и $I_{12}I_{13} \ldots I_{N-1\,N} = R \neq 0$, то есть существуют элементы $b_{ij} \in R$, $i < j$, такие, что

$$(a_1 - a_2)b_{12}(a_1 - a_3)b_{13} \ldots (a_{N-2} - a_N)b_{N-2\,N}(a_{N-1} - a_N) \neq 0$$

и $f(a_i, b_{\alpha\beta}) \neq 0$, $1 \leq \alpha < \beta \leq N$.

Пусть S – кольцо порядка $|S| < N$ и $s_1, \ldots, s_N$ – произвольные элементы S. Тогда существуют $i < j$ такие, что $s_i = s_j$ и $f(s_i, v_{\alpha\beta}) = 0$ для любых $v_{\alpha\beta} \in S$, то есть $f(y_i, t_{\alpha\beta}) = 0$ – тождество в кольце S. Таким образом, R – сильно критическое кольцо. $\square$

Приведем пример критического кольца, не являющегося сильно критическим. Для этого воспользуемся теоремой 3 главы 7 книги [5], в которой описаны нильпотентные кольца индекса 3 и порядка p^3, p – простое число, на группе типа (p^2, p). Среди 11 типов колец, приведенных в этой теореме, нас будет интересовать кольцо R, такое, что $(R, +) = \langle a\rangle \dot{+} \langle b\rangle$, где $4a = 2b = 0$, $a^2 = b^2 = 0$, $ab = ba = 2a$. Это кольцо имеет порядок 8 и удовлетворяет тождествам

$$4x = 0,\ 2xy = 0,\ [x, y] = 0,\ xyz = 0. \tag{1}$$

Согласно работе [4] многообразие ассоциативных колец, порожденное всеми кольцами порядка 2 и 4, определяется тождествами:

$$4x = 0,\ 2x(y - y^2) = 0,\ [x - x^2, y - y^2] = 0,\ x[y, z]t = 0,\ (x - x^2)[u, v] = 0,$$
$$[u, v](x - x^2) = 0,\ (x - x^4)y(z - z^2) = 0,\ (x - x^2)(y - y^4)z = 0,\ (x - x^4)(y - y^2)z = 0,$$
$$x(y - y^4)(z - z^2) = 0,\ (x - x^2)z(y - y^4) = 0,\ x(y - y^2)(z - z^4) = 0. \tag{2}$$

Так как R удовлетворяет тождествам (1), то R удовлетворяет и тождествам (2). Таким образом, R принадлежит многообразию колец, порожденному всеми кольцами порядка 2 и 4 и не является сильно критическим (см. предложение 1).

Покажем, что R – критическое кольцо. Для этого заметим, что все собственные подкольца и гомоморфные образы кольца удовлетворяют тождеству

$xy = 0$. Действительно, пусть $c = \alpha a + \beta b$ – произвольный ненулевой элемент R, $0 \le \alpha \le 3$, $0 \le \beta \le 1$. Если $\alpha = 2$ и $\beta = 1$, то идеал (c) содержит $ca = ba = 2a$. Если $\alpha = 2$ и $\beta = 0$, то $(c) \ni 2a = c$. Если $\alpha = 0$, то $c = b$ и $(c) \ni ba = 2a$. Если, наконец, $\alpha = 1, 3$, то $2c = 2\alpha a + 2\beta b = 2a \in (c)$. Таким образом, любой ненулевой идеал I кольца R содержит $2a$ (идеал $(2a) = \{0, 2a\}$ – сердцевина R) и следовательно, R/I удовлетворяет тождествам $2x = 0$, $xy = 0$.

Далее, пусть S – собственное подкольцо R. Если в записи любого элемента $s = \alpha a + \beta b \in S$ число α делится на 2, то для любых элементов $s_1 = \alpha_1 a + \beta_1 b$, $s_2 = \alpha_2 a + \beta_2 b \in S$ их произведение $s_1 s_2 = 0$, то есть S удовлетворяет тождеству $xy = 0$.

Если существует элемент $s_0 = \alpha a + \beta b \in S$ такой, что $\alpha = 1, 3$, то $2s_0 = 2\alpha a = 2a \in S$ и если $\alpha = 3$, то $s_0 - 2a = a + \beta b \in S$. Таким образом, можно считать, что S содержит элемент вида $s_0 = a + \beta b$, где $\beta = 0, 1$ и $(2a) \in S$. Так как порядок $|S|$ – делитель числа 8 и не равен 8, то $S = \{0, 2a, a + \beta b, -a + \beta b\}$, $S^2 = (0)$ и S удовлетворяет тождеству $xy = 0$. Это означает, что многообразие колец, порожденное собственными факторами кольца R, удовлетворяет тождеству $xy = 0$ и R – критическое кольцо.

В связи с этим примером, представляет интерес следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть R – конечное кольцо порядка p или p^2 и не разложимое в прямую сумму ненулевых идеалов (p – простое число). Тогда R – сильно критическое кольцо.*

Доказательство. Если порядок кольца R равен p, то R изоморфно либо кольцу $N_{0,p}$ с нулевым умножением на группе $(\mathbb{Z}/(p), +)$, либо полю $GF(p)$ (см. [5], глава II). В каждом из этих случаев кольцо R является сильно критическим. Пусть $|R| = p^2$ и R не разложимо в прямую сумму своих ненулевых идеалов. Воспользуемся классификацией таких колец, приведенной в [5] (теорема 11, глава II). Согласно этой классификации R изоморфно одному из следующих колец:

(1) $N_{0,p^2} = \langle a \,|\, a^2 = 0, p^2 a = 0 \rangle$;
(2) $\mathbb{Z}_{p^2}$;
(3) $N_{p^2} = \langle a \,|\, a^2 = pa, p^2 a = 0 \rangle$;
(4) $\mathbb{Z}_p[x]/(x^2)$;
(5) $A_{2,p} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & 0 \\ \mathbb{Z}_p & 0 \end{pmatrix}$;
(6) $B_{2,p} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
(7) $N_{p,p} = \langle a, b \,|\, a^2 = b, a^3 = 0, pa = pb = 0 \rangle$;
(8) $GF(p^2)$.

Кольца N_{0,p^2}, $\mathbb{Z}_{p^2}$, N_{p^2} не удовлетворяют тождеству $px = 0$, которое выполняется на всех кольцах порядка p, и поэтому являются сильно критическими. Если $R = \mathbb{Z}_p[x]/(x^2)$, то многочлен $x(y - y^p)$ не является тождеством на R, но является тождеством на всех кольцах порядка p, то есть $\mathbb{Z}_p[x]/(x^2)$ – сильно критическое кольцо. Если $R = B_{2,p}$, то $x(y - y^p)$ не является тождеством в R, но является тождеством на всех кольцах порядка p. Если $R = A_{2,p}$, то многочлен $(x - x^p)y$ не является тождеством в R, но является тождеством на всех кольцах порядка p. То есть, $A_{2,p}$ и $B_{2,p}$ – сильно критические кольца. $N_{p,p}$ и $GF(p^2)$ не удовлетворяют тождеству $x(y - y^p) = 0$, хотя все кольца порядка p

ему удовлетворяют, то есть, $x(y - y^p)$ – сильно критический многочлен и $N_{p,p}$, $GF(p^2)$ – сильно критические кольца. $\square$

Предложение 4. *Пусть R – конечное кольцо и полное кольцо матриц $M_n(R)$ над ним является сильно критическим. Тогда R – сильно критическое кольцо.*

Доказательство. По условию существует многочлен $f(x_1, \dots, x_d) \neq 0$ из свободного ассоциативного кольца $\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots\rangle$, который не является тождеством в кольце $M_n(R)$, но является тождеством на всех кольцах порядка меньшего $|M_n(R)|$. Пусть $x_i = \left(t^i_{\alpha\beta}\right)$, $i \leq d$, $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, $t^i_{\alpha\beta}$ – некоммутативные переменные (то есть $\mathbb{Z}\left\langle t^i_{\alpha\beta}\right\rangle$ – свободное ассоциативное кольцо). Тогда

$$f(x_1, \dots, x_d) = \begin{pmatrix} f_{11}\left(t^i_{\alpha\beta}\right) & \dots & f_{1n}\left(t^i_{\alpha\beta}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}\left(t^i_{\alpha\beta}\right) & \dots & f_{nn}\left(t^i_{\alpha\beta}\right) \end{pmatrix},$$

где $f_{st}\left(t^i_{\alpha\beta}\right) \in \mathbb{Z}\left\langle t^i_{\alpha\beta}\right\rangle$. Так как $f(x_1, \dots, x_d)$ не является тождеством в $M_n(R)$, то существует многочлен $f_{s_0t_0}\left(t^i_{\alpha\beta}\right) \neq 0$, не являющийся тождеством в R. Пусть A – произвольное конечное кольцо, $|A| < |R|$. Тогда $|M_n(A)| < |M_n(R)|$ и $f(x_1, \dots, x_d) = 0$ – тождество в кольце $M_n(A)$. Следовательно, для любых s и t получаем $f_{st}\left(t^i_{\alpha\beta}\right) = 0$ – тождество в кольце A. В частности, $f_{s_0t_0}\left(t^i_{\alpha\beta}\right) = 0$ – тождество в A и $f_{s_0t_0}$ – сильно критический многочлен для кольца R. $\square$

Приведем пример, показывающий, что утверждение, обратное утверждению 4, является неверным. Пусть $R = N_{0,p^2} = \langle 0, a, 2a, \dots, (p^2-1)a \mid a^2 = 0\rangle$. Тогда $\operatorname{var} R = \operatorname{var}\left\langle xy = 0, p^2x = 0\right\rangle$. Кольцо R является сильно критическим, так как все кольца меньшего порядка удовлетворяют тождеству $px = 0$. Полное кольцо матриц $M_n(R)$ имеет порядок p^{2n^2} и порождает многообразие колец $\operatorname{var} M_n(R) = \operatorname{var} R$, то есть, при $n \geq 2$ кольцо $M_n(R)$ не является сильно критическим (и даже критическим) кольцом.

Теорема 3. *Пусть R – конечное ассоциативное кольцо с единицей. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *R – сильно критическое кольцо;*
(2) *для любого натурального числа n кольцо $M_n(R)$ является сильно критическим кольцом;*
(3) *существует натуральное число n такое, что $M_n(R)$ является сильно критическим кольцом.*

Доказательство. Импликация $2) \to 3)$ очевидна, а импликация $3) \to 1)$ доказана в предложении 4. Докажем импликацию $1) \to 2)$. Пусть R – сильно критическое кольцо с единицей и $M_n(R)$ не является сильно критическим кольцом. Тогда существуют конечные кольца $S_1, \dots, S_m$ порядков, меньших $|M_n(R)|$ такие, что $M_n(R) \in \operatorname{var}\langle S_1, \dots, S_m\rangle$. Пусть k – число образующих кольца $M_n(R)$ и F_k – свободное кольцо $\operatorname{var}\langle S_1, \dots, S_m\rangle$, имеющее k образующих. Тогда F_k – конечное кольцо (см. [1, 2]) и $M_n(R)$ – гомоморфный образ кольца F_k. При этом F_k – подкольцо некоторой конечной прямой суммы колец $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_q$, где $A_i \in \{S_1, \dots, S_m\}$ (см. [1, 2]). Пусть S – подкольцо кольца A наименьшего порядка такое, что $M_n(R)$ – гомоморфный образ S, то есть $M_n(R) \cong S/I$ для некоторого $I \lhd S$. По лемме $I \subseteq J(S)$, I – нильпотентный идеал в S и S – кольцо с единицей.

Так как $I \subseteq J(S)$, то

$$S/J(S) \cong (S/I)/(J(S)/I) \cong M_n(R)/J(M_n(R)) \cong M_n(R/J(R)).$$

Кольцо S является SBI-кольцом и следовательно, $S \cong M_n(T)$, где $T/J(T) \cong R/J(R)$ (см. [6], теорема 1, с. 55). Идеал $I = M_n(I')$, где $I' \lhd T$ и $S/I \cong M_n(T/I') \cong M_n(R)$ ([6], предложение 1, глава 3). Согласно работе [7], если A и B такие полулокальные кольца с единицей, что $M_n(A) \cong M_n(B)$, то $A \cong B$. Следовательно, $R \cong T/I'$. Пусть $\pi_i : S \to A_i$ – гомоморфизм кольца S в кольцо A_i, отображающий каждый элемент $y = (a_1, \ldots, a_q)$ кольца S в свою i-ю координату, то есть $\pi_i(y) = a_i \in A_i$, $i \le q$. Тогда $\operatorname{Ker} \pi_i = M_n(I_i)$, где $I_i \lhd T$ (см. [6], с. 40) и

$$\pi_i(S) \cong M_n(T)/M_n(I_i) \cong M_n\left(T/I_i\right).$$

Так как $|A_i| < |M_n(R)|$, $i \le q$, то $|T/I_i| < |R|$, $i \le q$. Кольцо $S = M_n(T)$ является подкольцом конечной прямой суммы колец с единицами

$$B = M_n(T/I_1) \oplus \ldots \oplus M_n(T/I_q) \cong M_n\left(\bigoplus_{i=1}^{q} T/I_i\right).$$

Так как $e = (\pi_1(e), \ldots, \pi_q(e))$ и $\pi_i(e)$ – единица в $\pi_i(S) \cong M_n\left(T/I_i\right)$, $i \le q$, то e – единица B. Согласно работе [7] имеем $S = M_n(T')$ и $B = M_n(B')$, где T' – подкольцо B', $T' \cong T$ и $B' \cong \bigoplus_{i=1}^{q} T/I_i$. Следовательно, T принадлежит многообразию, порожденному кольцами $T/I_1, \ldots, T/I_q$, порядки которых меньше $|R|$, и $R \cong T/I'$. Следовательно, R не является сильно критическим кольцом. □

Предложение 5. *Пусть R – конечное локальное кольцо с единицей и $J(R)$ – сильно критическое кольцо. Тогда R – сильно критическое кольцо.*

Доказательство. Предположим противное. Исходя из леммы и рассуждая аналогично доказательству теоремы 3, можно считать, что существует кольцо S с единицей e, являющееся подкольцом некоторого кольца вида $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_q$, где A_i – конечные кольца порядков меньших $|R|$, такое, что $R \cong S/I$, где $I \subseteq J(S)$. Так как R – локальное кольцо и $S/J(S) \cong (S/I)/(J(S)/I) = R/J(R) \cong GF(q)$, то S – локальное кольцо. Пусть $I_i = \operatorname{Ker}\pi_i$, где $\pi_i : S \to A_i$ – гомоморфизм кольца S в кольцо A_i, отображающий каждый элемент $y = (a_1, \ldots, a_q) \in S$ в $\pi_i(y) = a_i$ $(i \le q)$. Кольцо S содержится в кольце $\pi_1(S) \oplus \ldots \oplus \pi_q(S)$. При этом каждый гомоморфный образ $\pi_i(S)$ либо является нулевым кольцом, либо является локальным кольцом таким, что $\pi_i(S)/J(\pi_i(S)) \cong GF(q)$ и $|J(\pi_i(S))| < |J(R)|$, $i \le q$.

Далее, $J(S)$ – множество всех нильпотентных элементов кольца S, следовательно, оно содержится в кольце

$$J(\pi_1(S)) \oplus \ldots \oplus J(\pi_q(S)).$$

Так как $J(R) \cong J(S)/I$ и $J(S) \in \operatorname{var}\langle J(\pi_1(S)), \ldots, J(\pi_q(S))\rangle$, то $J(R)$ не является сильно критическим кольцом. Противоречие. □

Теорема 4. *Пусть R – конечное кольцо с единицей, $R/J(R) = M_n(GF(q))$ и $J(R)$ – сильно критическое кольцо. Тогда R – сильно критическое кольцо.*

Доказательство. Согласно [6] (с. 55) $R = M_n(S)$, где S – локальное кольцо такое, что $S/J(S) \cong GF(q)$. При этом $J(R) = M_n(J(S))$ (см. [6], с. 11). Так как кольцо $J(R)$ является сильно критическим, то по предложению 4 кольцо $J(S)$ тоже является сильно критическим. Согласно предложению 5 S – сильно критическое кольцо. Следовательно, по теореме 3 R – сильно критическое кольцо. $\square$

Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

References

[1] Y.N. Maltsev, E.V. Zhuravlev, *Lectures on the theory of associative rings*, Altai State University, Barnaul, 2015.

[2] I.V. L'vov, *Variety of associative rings (Part I)*, Algebra Logic, **12** (1974), 150–167. Zbl 0288.16008

[3] A. Tarski, *Equationally complete rings and relation algebras*, Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A, **59** (1956), 39–46. Zbl 0073.24603

[4] Y.N. Maltsev, *Defining identities of the variety of associative rings generated by all rings of order* p^2, Vestnik Altai State Pedagogical Academy, **7** (2011), 15–20.

[5] V.P. Elizarov, *Finite rings*, Gelios–ARV, Moscow, 2006.

[6] N. Jacobson, *Structure of rings*, AMS, Providence, 1956. Zbl 0073.02002

[7] Y.N. Mal'tsev, *Communications of the moscow mathematical society: The ring of matrices over a critical ring is critical*, Russian Mathematical Surveys, **39**:4 (1984), 131–132.

Yurii Nikolaevich Maltsev
Altai State Pedagogical University,
55, Molodeghnaya str.,
Barnaul, 656031, Russia
Email address: maltsevyn@gmail.com

Evgeniy Vladimirovich Zhuravlev
Altai State University,
61, Lenina ave.,
Barnaul, 656049,Russia
Email address: evzhuravlev@mail.ru