S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1715–1721 (2020) УДК 514.76

DOI 10.33048/semi.2020.17.116 MSC 53B35,53B50

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ СО СТРУКТУРОЙ КИРИЧЕНКО–УСКОРЕВА В КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

М.Б. БАНАРУ, Г.А. БАНАРУ

Abstract. Some criteria of minimality of a hypersurfaces of a Kählerian manifold, equipped with an almost contact metric structure of cosymplectic type, are established. It is proved that a minimal hypersurfaces of a Kählerian manifold, equipped with an almost contact metric Kirichenko–Uskorev structure, is totally umbilical if and only it is totally geodesic.

Keywords: Kählerian manifold, almost contact metric structure, Kirichenko–Uskorev structure, minimal hypersurface, second fundamental form.

1

Геометрия почти контактных метрических многообразий и геометрия почти эрмитовых многообразий относятся к числу интенсивно развивающихся разделов современной математики. Контактная и эрмитова геометрии, как часто называю эти разделы, имеют богатейшее внутреннее содержание, тесные связи с другими разделами математики и разнообразные приложения в физике и других естественных науках (см., например [1]). Важнейшая взаимосвязь между контактной и эрмитовой геометриями обусловлена существованием почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности произвольного почти эрмитова многообразия. О существовании такой взаимосвязи известно очень давно — пожалуй, с 50-ых годов прошлого века (этот вопрос отражен в обзоре [2]). Глубокими работами в данной области отметились многие геометры. Особо выделим фундаментальное исследование Л.В. Степановой, в котором интерес для нас представляют не только полученные результаты, но и

Banaru, M.B., Banaru, G.A., On hypersurfaces with Kirichenko–Uskorev structure in Kählerian manifolds.

Поступила 3 марта 2020 г., опубликована 23 октября 2020 г.

разработанные методы исследования почти контактных метрических структур на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий (специфическое сочетание тензорного исчисления и метода внешних форм Картана) [3].

В настоящей работе мы рассматриваем келеровы многообразия размерности не ниже шести, на ориентируемых гиперповерхностях которых индуцируется почти контактная метрическая структура особого вида – так называемая структура косимплектического типа, или структура Кириченко–Ускорева (В.Ф. Кириченко и И.В. Ускорев относительно недавно ввели в рассмотрение этот вид почти контактной метрической структуры [4]). Часть содержащихся в работе результатов была представлена авторами на международных конференциях, которые состоялись в 2019 году: «Современная геометрия и ее приложения» (Казань), CAIM-2019 (Тырговиште) и IMCS-55 (Кишинёв).

2. Предварительные сведения

Как известно [5], под почти контактной метрической структурой на многообразии N мы понимаем систему тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, для которой выполняются такие условия:

$$\eta(\xi) = 1,\ \Phi(\xi) = 0,\ \eta \circ \Phi = 0,\ \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y),\ X, Y \in \aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа (1, 1), ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Также известно [5], что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, является нечетномерным и ориентируемым. Важнейшими примерами почти контактной метрической структуры являются косимплектическая структура, слабо косимплектическая структура (или структура Эндо), а также структуры Сасаки и Кенмоцу [1]. Косимплектическая структура определяется условием

$$\nabla \eta = \nabla \Phi = 0,$$

а определяющее условие для слабо косимплектической структуры выглядит так:

$$(\nabla_X \Phi)\, X = 0,$$

где ∇ — риманова связность метрики g .

Наконец, структура Сасаки характеризуется равенством

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y \rangle\, \xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \aleph(N),$$

и условием, внешне похожим на это равенство, определяется структура Кенмоцу:

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle\, \xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \aleph(N).$$

Эти четыре структуры, а также их разнообразные обобщения служат предметом многочисленных исследований, проводимых как геометрами, так и специалистами в области теоретической физики.

Как упомянуто выше, в работе [4] В.Ф. Кириченко и И.В. Ускорев ввели в рассмотрение новый вид почти контактных метрических структур — структуру косимплектического типа. Она определяется как почти контактная метрическая структура с замкнутой контактной формой. Основным свойством почти контактной метрической структуры Кириченко–Ускорева является ее инвариантность относительно так называемых канонических конформных преобразований [4]. Тривиальным примером структуры Кириченко–Ускорева служит, естественно, косимплектическая структура, а самым важным нетривиальным примером — структура Кенмоцу, которая (вместе с ее различными обобщениями) является, пожалуй, одной из самых популярных тем исследований в области почти контактных метрических структур на многообразиях.

Под почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} понимают пару $\{J,\ g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, состоящую из почти комплексной структуры J и римановой метрики $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$, причем J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX,\ JY\rangle = \langle X,\ Y\rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на многообразии M^{2n}[5]. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH-) многообразием. Для всякой AH-структуры $\{J,\ g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} определяется так называемая фундаментальная (или келерова) форма:

$$F(X,\ Y) = \langle X,\ JY\rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Пусть $\big(M^{2n},\ \{J,\ g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}\big)$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p \in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p, $\{J_p,\ g_p = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J,\ g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$. Ортонормированные реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (или A-реперы), в комплексификации касательного пространства устроены следующим образом:

$$(p,\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n,\ \varepsilon_{\hat 1}, \ldots, \varepsilon_{\hat n}),$$

где ε_a — собственные векторы оператора почти комплексной структуры, отвечающие собственному значению оператора $i = \sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat a}$ — собственные векторы, отвечающие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n; $\hat a = a + n$. Конструкция A-репера и методика его применения к исследованию почти эрмитовых структур разработаны В.Ф. Кириченко [6].

Матрица оператора структуры в A-репере в точке p имеет вид:

$$(J_j^k) = \left(\begin{array}{c|c} iI_n & 0 \\ \hline 0 & -iI_n \end{array}\right),$$

где I_n есть единичная матрица порядка n; $k, j = 1, \ldots, 2n$. Хорошо известно [5], что матрицы римановой метрики g и фундаментальной формы F в A-репере принимают, соответственно, вид:

$$(g_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right); \quad (F_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & iI_n \\ \hline -iI_n & 0 \end{array}\right).$$

AH-многообразие называется эрмитовым, если почти комплексная структура на этом многообразии интегрируема, и келеровым, если $\nabla F = 0$.

3. Основные результаты

Самыми известными примерами почти контактных метрических структур являются структуры на ориентируемых гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий (кроме них очень важное значение имеют структуры на пространствах так называемых главных T^1-расслоений над почти эрмитовыми многообразиями) [3].

В ряде статей, например, в [7] и [8], авторами рассматривалась первая группа структурных уравнений почти контактной метрической структуры на гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести (так обычно называют структурные уравнения Картана римановой связности присоединенной G-структуры, тотальное пространство которой состоит из A-реперов):

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + i\sigma^\alpha_\beta \omega^\beta \wedge \omega + i\sigma^{\alpha\beta}\omega_\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha &= -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta - i\sigma^\beta_\alpha \omega_\beta \wedge \omega - i\sigma_{\alpha\beta}\omega^\beta \wedge \omega; \qquad (1) \\ d\omega &= -i\sigma^\alpha_\beta\, \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + i\sigma_{n\beta}\omega \wedge \omega^\beta - i\sigma^\beta_n \omega \wedge \omega_\beta. \end{aligned}$$

Через $\{\omega^\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ обозначены компоненты форм смещения ($\omega^n = \omega$); $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в келерово многообразие M^{2n}, $n \geq 3$; здесь и далее $\omega_\alpha = \omega^{\hat\alpha}$; $\alpha,\ \beta, \gamma = 1\,, \ldots,\, n-1$; $a, b, c = 1, \ldots, n$; $\hat a = a + n$.

Теорема 1. *Матрица второй квадратичной формы погружения гиперповерхности N^{2n-1}, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура Кириченко–Ускорева, в келерово многообразие M^{2n} ($n \geq 3$) имеет вид:*

$$(\sigma_{ps}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \sigma_{\alpha\beta} & \begin{matrix}0\\ \dots\\ 0\end{matrix} & 0 \\ \hline 0\dots0 & \sigma_{nn} & 0\dots0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}0\\ \dots\\ 0\end{matrix} & \sigma_{\hat\alpha\hat\beta} \end{array}\right),\ p, s = 1, ..., 2n-1.$$

Доказательство. В.Ф. Кириченко и И.В. Ускорев показали [4], что выполнение равенства $d\omega = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы почти контактная метрическая структура оказалась структурой косимплектического типа. Поэтому, принимая во внимание (1), мы можем сделать следующий вывод: условия

$$1)\ \sigma^\alpha_\beta = 0;\ \ 2)\ \sigma^\beta_n = 0;\ \ 3)\ \sigma_{n\beta} = 0$$

являются критерием того, чтобы почти контактная метрическая структура на гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести была структурой Кириченко–Ускорева. Отличными от нуля могут быть только компоненты вида $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\hat\alpha\hat\beta}$ и σ_{nn}, что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Гиперповерхность N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n}, $n \geq 3$, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура Кириченко–Ускорева, минимальна в том и только том случае, когда $\sigma(\xi, \xi) = 0$.*

Доказательство. Условием, необходимым и достаточным для минимальности (в некоторых источниках — определением минимальности) гиперповерхности является [9]

$$g^{ps}\sigma_{ps} = 0.$$

Матрица контравариантного метрического тензора гиперповерхности N^{2n-1} имеет вид [2]:

$$(g^{ps}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \text{\Large 0} & \begin{array}{c}0\\ \dots\\ 0\end{array} & \text{\Large I}_{n-1} \\ \hline 0\dots0 & 1 & 0\dots0 \\ \hline \text{\Large I}_{n-1} & \begin{array}{c}0\\ \dots\\ 0\end{array} & \text{\Large 0} \end{array}\right), \quad p,\, s = 1,\, \dots,\, 2n-1.$$

Следовательно, для гиперповерхности с почти контактной метрической структурой Кириченко–Ускорева N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n}, $n \geq 3$:

$$g^{ps}\sigma_{ps} = g^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + g^{\hat\alpha\hat\beta}\sigma_{\hat\alpha\hat\beta} + g^{\hat\alpha\beta}\sigma_{\hat\alpha\beta} + g^{\alpha\hat\beta}\sigma_{\alpha\hat\beta} + g^{nn}\sigma_{nn} =$$

$$= g^{\hat\alpha\beta}\sigma_{\hat\alpha\beta} + g^{\alpha\hat\beta}\sigma_{\alpha\hat\beta} + g^{nn}\sigma_{nn} = \sigma_{nn}.$$

Поэтому $g^{ps}\sigma_{ps} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{nn} = 0$. Последнее равенство означает, что

$$\sigma\,(\xi, \xi) = 0.$$

Итак, гиперповерхность N^{2n-1} келерова многообразия минимальна тогда и только тогда, когда $\sigma\,(\xi,\xi) = 0$, что и требовалось доказать. □

Теорема 3. *Типовое число t гиперповерхности N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n}, $n \geq 3$, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура Кириченко–Ускорева, является четным в том и только том случае, если гиперповерхность N^{2n-1} является минимальной*

Доказательство. Напомним, что под типовым числом поверхности риманова многообразия понимают ранг ее второй квадратичной формы. Пусть N^{2n-1} — минимальная гиперповерхность Кириченко–Ускорева келерова многообразия размерности не ниже шести. Тогда, в силу Теорем 1 и 2, матрица второй квадратичной формы гиперповерхности имеет вид:

$$(\sigma_{ps}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \text{\Large 0} & \begin{array}{c}0\\ \dots\\ 0\end{array} & \text{\Large σ}_{\alpha\hat\beta} \\ \hline 0\dots0 & 0 & 0\dots0 \\ \hline \text{\Large σ}_{\hat\alpha\beta} & \begin{array}{c}0\\ \dots\\ 0\end{array} & \text{\Large 0} \end{array}\right). \tag{2}$$

Поскольку $\sigma_{\hat\alpha\beta} = \overline{\sigma_{\alpha\hat\beta}}$, получим, что $rank(\sigma_{ps}) = 2rank(\sigma_{\hat\alpha\beta})$. Следовательно, $t = rank(\sigma_{ps})$ — число четное, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим случай, когда минимальная гиперповерхность N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n}, $n \geq 3$, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура Кириченко–Ускорева, является его вполне омбилическим подмногообразием. Тогда

$$\sigma_{ps} = \lambda g_{ps}, \quad \lambda - const,$$

и, учитывая (2), получим: $\lambda = 0$, а это означает, что матрица (σ_{ps}) — нулевая. Следовательно, в этом случае N^{2n-1} — вполне геодезическая гиперповерхность. Обратная цепочка рассуждений совершенно очевидна.

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Не существует отличной от вполне геодезической вполне омбилической минимальной гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести, на которой индуцируется почти контактная метрическая структура Кириченко–Ускорева.*

Отметим, что приведенные теоремы являются обобщением результатов для косимплектических и кенмоцевых гиперповерхностей келеровых многообразий [8], [10], [11], [12], [13] (напоминаем, что косимплектическая структура и структура Кенмоцу — частные виды структуры Кириченко–Ускорева).

Авторы искренне благодарят рецензента за внимательное отношение к данной работе и за полезные замечания.

References

[1] A.L. Kholodenko, *Applications of contact geometry and topology in physics*, World Scientific, Hackensack etc., 2013. Zbl 1279.53001

[2] M.B. Banaru, V.F. Kirichenko, *Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds*, J. Math. Sci., (New York), **207**:4 (2015), 513–537. Zbl 1325.53037

[3] L.V. Stepanova, *Contact geometry of hypersurfaces in quasi-Kählerian manifolds (PhD thesis)*, Moscow State Pedagogical University, 1995.

[4] V.F. Kirichenko, I.V. Uskorev, *Invariants of conformal transformations of almost contact metric structures*, Math. Notes, **84**:5 (2008), 783–794. Zbl 1219.53076

[5] V.F. Kirichenko, *Differential-geometric structures on manifolds*, Pechatnyi Dom, Odessa, 2013.

[6] V.F. Kirichenko, *Methods of generalized Hermitian geometry in the theory of almost-contact manifolds*, J. Sov. Math., **42**:5 (1988), 1885–1919. Zbl 0715.53033

[7] M.B. Banaru, *On almost contact metric 1-hypersurfaces in Kählerian manifolds*, Sib. Math. J., **55**:4 (2014), 585–588. Zbl 1312.53077

[8] L.V. Stepanova, M.B. Banaru, G.A. Banaru, *On geometry of QS-hypersurfaces of Kählerian manifolds*, Sib. Electron. Math. Izv., **15** (2018), 815–822. Zbl 1398.53028

[9] S. Ianus, *Geometrie diferenţială cu aplicaţii in teoria relativităţii*, Editura Academiei Romane, Bucuresti, 1983

[10] L.V. Stepanova, M.B. Banaru, *On hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds*, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, Ser. Nouă, Mat., , **47**:1 (2001), 165–170. Zbl 1062.53050

[11] M.B. Banaru, *On cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Kählerian submanifolds of the Cayley algebra*, Russ. Math., **47**:7 (2003), 60–63. Zbl 1078.53524

[12] M.B. Banaru, *On the Kenmotsu hypersurfaces of special Hermitian manifolds*, Sib. Math. J., **45**:1 (2004), 7–10. Zbl 1125.53038

[13] A. Abu-Saleem, M.B. Banaru, *Two theorems on Kenmotsu hypersurfaces in a W_3-manifold*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math., **51**:3 (2005), 3–11. Zbl 1112.53044

Mihail Borisovich Banaru
Smolensk State University,
4, Przhevalskogo str.,
Smolensk, 214000, Russia
Email address: mihail.banaru@yahoo.com

Galina Anatol'evna Banaru
Smolensk State University,
4, Przhevalskogo str.,
Smolensk, 214000, Russia
Email address: mihail.banaru@yahoo.com