

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

*Том 17, стр. 1680–1696 (2020)*  
DOI 10.33048/semi.2020.17.113УДК 515.162.3  
MSC 57M27КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАЦЕПЛЕНИЙ В УТОЛЩЁННОЙ  
БУТЫЛКЕ КЛЕЙНА

Л.Р. НАБЕЕВА

**ABSTRACT.** In paper there is a full table of essential non-split links in the thickened Klein bottle, which diagrams have at most 3 crossings. Link diagrams have two or three components. A generalized version of the Kauffman polynomial is used to prove that all these links are different.

**Keywords:** thickened Klein bottle, link, link diagram, generalized Kauffman polynomial.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время развивается теория узлов и зацеплений в трёхмерных многообразиях (см., например, [1 – 7]).

В данной работе приведена полная таблица существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна с двумя и тремя компонентами, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков. Сначала перебираются все абстрактные регулярные графы степени 4, имеющие не более трёх вершин. Затем получаем проекции как вложения этих графов на бутылку Клейна. Бутылку Клейна представляем в виде квадрата с отождествленными сторонами. Из проекций на квадрате путем разрывов в перекрёстках получаем диаграммы зацеплений. С помощью некоторых приёмов убираются эквивалентные диаграммы. Различность зацеплений доказывается с помощью обобщения полинома Кауффмана на случай зацеплений в утолщённой бутылке Клейна. Полученная таблица содержит 25 попарно неэквивалентных зацеплений с двумя и тремя компонентами, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков. Зацепления с одной компонентой в данной работе

---

НАБЕЕВА, L.R., CLASSIFICATION OF LINKS IN THE THICKENED KLEIN BOTTLE.

© 2020 НАБЕЕВА Л.Р.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00690).

Поступила 4 ноября 2018 г., опубликована 21 октября 2020 г.

не рассматриваются, поскольку табулирование узлов было проведено в работе [6].

Автор благодарит С.В. Матвеева за постановку задачи и помощь в её решении, а так же Ф.Г. Кораблёва и В.В. Таркаева за полезные обсуждения.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗАЦЕПЛЕНИЙ В УТОЛЩЁННОЙ БУТЫЛКЕ КЛЕЙНА

*Утолщённой бутылкой Клейна* называется ориентируемое косое произведение  $K \tilde{\times} I$  бутылки Клейна  $K$  на отрезок  $I$ . Под *зацеплением* в  $K \tilde{\times} I$  понимается конечный набор попарно не пересекающихся простых замкнутых кривых, лежащих внутри утолщённой бутылки Клейна. Два зацепления в  $K \tilde{\times} I$  называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм многообразия  $K \tilde{\times} I$  на себя, переводящий одно зацепление в другое.

В классическом случае зацепления в  $S^3$  задаются с помощью проекций на сферу  $S^2$ . В случае зацеплений в утолщённом торе зацепления задаются проекцией на тор [4, 5]. В данной работе будем представлять зацепления в утолщённой бутылке Клейна с помощью проекций на бутылку Клейна, как и в работах [6, 7].

**Определение 1.** *Проекцией зацепления в  $K \tilde{\times} I$  называется регулярный четырехвалентный граф на бутылке Клейна  $K$ . Вершины графа мы будем называть перекрёстками проекции. Компонентой проекции называется замкнутый путь на графе, проходящий по правилу «прямо – вперёд». Две проекции эквивалентны, если существует гомеоморфизм бутылки Клейна на себя, переводящий одну проекцию в другую.*

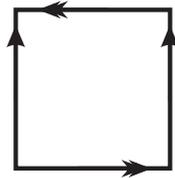


Рис. 1. Бутылка Клейна представлена в виде квадрата с отождествленными сторонами: боковые стороны отождествлены по параллельному переносу, а основания – по суперпозиции параллельного переноса и симметрии относительно середины основания

Общепринятый способ задания зацеплений в виде проекций с разрывами вблизи перекрёстков (т.е. в виде диаграмм) на бутылке Клейна не работает, так как бутылка Клейна является неориентируемой поверхностью. Чтобы устранить это препятствие, будем представлять бутылку Клейна в виде квадрата. Для этого рассмотрим две простые замкнутые кривые на бутылке Клейна. Первая кривая – это кривая, при разрезании по которой получается кольцо. Такую кривую назовём меридианом. Вторая кривая – это кривая, при разрезании по которой получается лист Мёбиуса. Такую кривую назовем средней линией листа Мёбиуса. Разрежем бутылку Клейна по этим двум кривым. Получим квадрат с отождествлёнными сторонами (см. рис. 1): боковые стороны

отождествлены по параллельному переносу, а основания – по суперпозиции параллельного переноса и симметрии относительно середины основания.

*Диаграмма зацепления* – проекция с указанием разрывов в перекрёстках на квадрате. Пример диаграммы двухкомпонентного зацепления показан на рисунке 2.

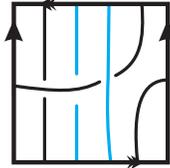


Рис. 2. Пример диаграммы двухкомпонентного зацепления на квадрате

**Определение 2.** *Диаграмма зацепления  $L \subset K \tilde{\times} I$  называется минимальной, если её число перекрёстков не превосходит числа перекрёстков любой диаграммы любого зацепления, эквивалентного зацеплению  $L$ . Проекция зацепления в  $K \tilde{\times} I$  называется минимальной, если минимальна хотя бы одна из отвечающих ей диаграмм.*

Будем говорить, что простая замкнутая кривая  $s$  (в дальнейшем мы её будем называть окружностью) соответствует одному из 4 типов (тривиальная, меридиан, параллель или средняя линия листа Мёбиуса), если существует гомеоморфизм бутылки Клейна на себя, переводящий окружность  $s$  в одну из этих 4 окружностей. Параллель – кривая, при разрезании по которой получаются два листа Мёбиуса. На рисунке 3 изображены типы нетривиальных окружностей на бутылке Клейна:  $\mu$  – меридиан;  $\lambda$  – параллель;  $m$  – средняя линия листа Мёбиуса.

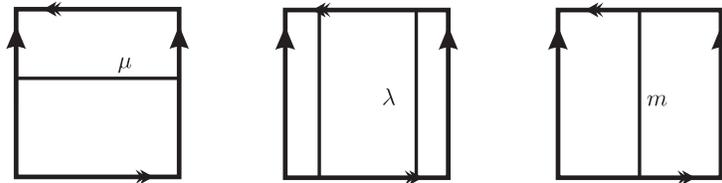


Рис. 3. Типы нетривиальных окружностей на бутылке Клейна:  $\mu$  – меридиан;  $\lambda$  – параллель;  $m$  – средняя линия листа Мёбиуса

### 3. Типы зацеплений в утолщённой бутылке Клейна

При табулировании классических зацеплений стараются ограничиться примарными зацеплениями. Мы тоже будем стараться сократить число рассматриваемых зацеплений в  $K \tilde{\times} I$  за счёт отсеивания тех зацеплений, которые можно получить из уже построенных с помощью несложных операций.

Во-первых, мы не будем включать в таблицу зацепления, которые являются связной суммой зацепления в  $S^3$  и зацепления в  $K \tilde{\times} I$ . Это связано с тем, что такие зацепления однозначно определяются суммируемыми зацеплениями.

**Определение 3.** *Зацепление в  $K \tilde{\times} I$  называется связной суммой зацепления в  $S^3$  и зацепления в  $K \tilde{\times} I$ , если оно получается из нетривиального зацепления в  $S^3$  и зацепления в  $K \tilde{\times} I$  удалением из каждого многообразия по шару, пересекающемуся с зацеплением по незаузленной дуге, и склеиванием остатков по какому-нибудь гомеоморфизму сфер, возникших на их краях, так чтобы концы заузленных дуг отождествились между собой.*

Во-вторых, мы не будем включать в таблицу зацепления, которые можно вложить в шар, так как этим зацеплениям отвечают зацепления в  $S^3$ . Такие зацепления будем называть локальными.

В-третьих, мы не будем включать в таблицу зацепления, которые являются «кольцевыми» зацеплениями, т.е. зацеплениями, которые имеют в дополнение существенные кольца в утолщённой бутылке Клейна. Это связано с тем, что «кольцевые» зацепления – зацепления в полном торе, которые уже табулированы в работе [3]. Напомним определение несущественных колец в утолщённой бутылке Клейна.

**Определение 4.** *Собственное кольцо в  $K \tilde{\times} I$  называется несущественным, если либо оно параллельно относительно края кольца в  $\partial(K \tilde{\times} I)$ , либо его средняя окружность стягиваема в  $K \tilde{\times} I$ .*

В-четвертых, мы не будем включать в таблицу зацепления, которые являются расщепляемыми.

**Определение 5.** *Зацепление в  $K \tilde{\times} I$  называется расщепляемым, если в дополнении к зацеплению существует разбивающая поверхность (либо сфера, либо тор, параллельный  $\partial(K \tilde{\times} I)$ ), которая не пересекает зацепление и отделяет одну или несколько компонент зацепления от других компонент.*

Сформулируем очевидные достаточные условия того, что диаграмма задаёт зацепление одного из не рассматриваемых типов.

**Лемма 1.** *1. Если проекция зацепления содержится в диске, то любая отвечающая ей диаграмма задаёт локальное зацепление.*

*2. Если на бутылке Клейна существует кольцо или лист Мёбиуса, содержащие проекцию зацепления, то любая отвечающая этой проекции диаграмма задаёт «кольцевое» зацепление.*

*3. Пусть проекция такова, что на бутылке Клейна имеется диск, край которого трансверсально пересекается с проекцией ровно в двух точках и делит проекцию на две части, в каждой из которых есть хотя бы один перекрёсток. Тогда любая отвечающая этой проекции диаграмма либо неминимальная, либо задаёт зацепление, представимое в виде связной суммы нетривиального зацепления в  $S^3$  и зацепления в  $K \tilde{\times} I$ .*

*4. Если проекция несвязна или одна из её компонент типа меридиан пересекается с объединением остальных в единственной точке, то любая диаграмма, отвечающая этой проекции, задаёт расщепляемое зацепление.*

*5. Если в диаграмме компоненты можно разбить на два набора так, что первый набор состоит из одной компоненты типа меридиан и она проходит всюду над (или под) компонентами из второго набора, то диаграмма задаёт расщепляемое зацепление.*

*6. Если в диаграмме компоненты можно разбить на два набора так, что первый набор состоит из одной компоненты типа параллель и она проходит*

сначала над затем под компонентами из второго набора, то диаграмма задаёт расщепляемое зацепление.

**Определение 6.** Проекция зацепления называется существенной, если число её компонент больше 1, и к ней не применим ни один из пп.1–4 леммы 1.

#### 4. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОЕКЦИЙ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

В данном разделе составим таблицу существенных проекций зацеплений с двумя и тремя компонентами на бутылке Клейна, которые имеют не более чем три перекрёстка. Для этого сначала рассмотрим вспомогательные леммы.

**Лемма 2.** Пусть  $G$  – существенная проекция зацепления на бутылке Клейна  $K$ . Если проекция  $G$  имеет петли, то их не более двух, и петли соответствуют окружности типа средняя линия листа Мёбиуса.

*Доказательство.* Пусть на проекции  $G$  имеется петля  $\nu$ . Покажем, что если  $\nu$  – петля, то она соответствует типу средней линии листа Мёбиуса. Инцидентный петле перекрёсток обозначим через  $V$ . Возможны три ситуации:  $\nu$  ограничивает диск;  $\nu$  – нетривиальная окружность и подходит к  $V$  с противоположных сторон;  $\nu$  – нетривиальная окружность и подходит к  $V$  с неположенных сторон. Разберем эти ситуации.

Пусть  $\nu$  ограничивает диск. Тогда найдется диск, край которого трансверсально пересекается с проекцией ровно в двух точках и делит проекцию на две части в каждой из которых есть хотя бы один перекрёсток. В этом случае к  $G$  применим п. 3 леммы 1, получим противоречие, так как  $G$  по условию существенная проекция.

Пусть  $\nu$  – нетривиальная окружность, подходящая к  $V$  с противоположных сторон. Тогда  $\nu$  является компонентой проекции, которая пересекается с остальными в единственной точке  $V$ . Следовательно,  $\nu$  – либо меридиан, либо средняя линия листа Мёбиуса. Если  $\nu$  – меридиан, то в этом случае к  $G$  применим п. 3 леммы 1, получим противоречие, так как  $G$  по условию существенная проекция. Если  $\nu$  – средняя линия листа Мёбиуса, то проекция  $G$  имеет петлю типа средней линии листа Мёбиуса.

Пусть  $\nu$  – нетривиальная окружность, которая подходит к  $V$  с неположенных сторон. Если окружность, образуемая петлей  $\nu$ , является нетривиальной не меняющей ориентацию окружностью, то существует нетривиальная окружность, параллельная петле  $\nu$  и не имеющая с  $G$  общих точек. Следовательно, применим п. 2 леммы 1, получаем, что проекция несущественная. Если окружность, образуемая петлей  $\nu$ , является нетривиальной, меняющей ориентацию окружностью, то  $\nu$  – окружность типа средняя линия листа Мёбиуса.

В результате получаем, что проекция  $G$  может иметь петлю, которая соответствует нетривиальной окружности типа средняя линия листа Мёбиуса. Легко заметить, что количество петель не может превосходить двух, так как на бутылке Клейна существует всего две непересекающиеся окружности типа средняя линия листа Мёбиуса.  $\square$

Перечислим все абстрактные графы, вложения которых на бутылку Клейна могут быть существенными проекциями с не более чем с тремя перекрёстками. По лемме 2 проекции не могут иметь более двух петель. Легко проверить, что существует всего 6 графов такого типа. Эти графы изображены на рисунке 4. Рассмотрим существенные проекции, являющиеся вложением этих 6 графов.

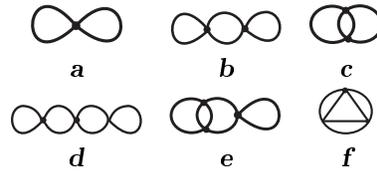


Рис. 4. Регулярные графы степени 4, имеющие не более трёх вершин и двух петель

**Лемма 3.** *На бутылке Клейна не существует существенных проекций зацеплений, являющихся вложением графа **a**, изображённого на рисунке 4.*

*Доказательство.* Предположим, что на бутылке Клейна существует существенная проекция  $G$ , являющаяся вложением графа **a**. Граф **a** состоит из двух петель. По лемме 2, петли проекции соответствуют окружностям типа средней линии листа Мёбиуса. Тогда проекция  $G$ , соответствующая графу **a**, состоит из двух окружностей типа средней линии листа Мёбиуса, пересекающихся трансверсально ровно в одной точке. Дополнение к такой проекции состоит из диска и листа Мёбиуса. Применим п. 2 леммы 1, получим, что проекция  $G$  не существенная, это противоречит выбору  $G$ .  $\square$

Для построения остальных проекций нам понадобится две операции. Первая операция – *операция устранения перекрёстка*, введённая в работе [6], изображённая на рисунке 5 слева. Она заключается в следующем: ориентируем ребра проекции, используя любой из двух её полных обходов по правилу «прямо – вперёд». Тогда операция устранения данного перекрёстка состоит в замене этого перекрёстка на пунктирную дугу так, как это показано на рисунке 5. В результате получится новая проекция, у которой на один перекрёсток меньше и которая снабжена пунктирной дугой. Обозначим через  $M$  операцию устранения перекрёстка, а обратную операцию к  $M$  через  $M^{-1}$ .



Рис. 5. Операция устранения (добавления) перекрёстка и операция устранения (добавления) двуугольника

Вторая операция – *операция устранения двуугольника*, изображённая на рисунке 5 справа. Операция состоит в замене двуугольника на пунктирную дугу. В результате получится новая проекция, у которой на два перекрёстка меньше и которая снабжена пунктирной дугой. Обозначим через  $N$  операцию устранения двуугольника, а обратную операцию к  $N$  через  $N^{-1}$ .

**Лемма 4.** *На бутылке Клейна существует ровно 2 существенных проекции зацеплений, являющиеся вложением графа **b**, изображённый на рисунке 4. Это проекции  $l_{2_1}$  и  $l_{2_2}$ , см. рис. 6.*

*Доказательство.* Граф  $\mathbf{b}$  состоит из двух петель, соединенных двойным ребром. Тогда в этом графе возможно выделить максимально три замкнутых пути. Следовательно, проекция  $G$ , соответствующая графу  $\mathbf{b}$ , может иметь 3 компоненты или 2 компоненты.

Предположим, что проекция  $G$  состоит из двух компонент. Применим операцию устранения перекрёстка к перекрёстку, где одна компонента пересекается сама с собой. Получим, что проекция  $G$  получается из трёх окружностей, две из которых петли, так как трансверсальное пересечение ровно в одной точке с одной петлёй из двух возможно только со средней линией листа Мёбиуса. Следовательно,  $G$  получается из трёх окружностей типа средней линии листа Мёбиуса, две из которых пересекаются трансверсально, а третья соединена пунктирной дугой с одной из двух. Тогда с точностью до гомеоморфизма проекций существует единственная такая дуга. Применим операцию  $M^{-1}$ , получим проекцию  $l_{2_1}$ , см. рис. 6.

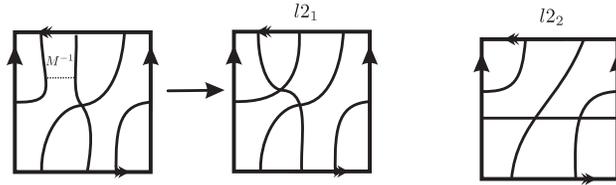


Рис. 6. Построение проекций типа  $\mathbf{b}$

Предположим, что проекция  $G$  состоит из трёх компонент. По лемме 2 петли проекции – две средние линии листа Мёбиуса. Третья компонента пересекается трансверсально ровно в одной точке с каждой петлёй. Следовательно, с точностью до гомеоморфизма,  $G$  является объединением двух средних линий листа Мёбиуса и меридиана. Это проекция  $l_{2_2}$ , см. рис. 6.  $\square$

В дальнейшем, мы будем обозначать через  $\#(s_1 \cap s_1)$  – число точек пересечения окружностей  $s_1$  и  $s_2$ .

**Лемма 5.** На бутылке Клейна существуют 3 существенных проекции зацеплений, являющихся вложением графа  $\mathbf{d}$ , изображённого на рисунке 4. Это проекции  $l_{3_1}, l_{3_2}, l_{3_3}$ , см. рис. 7.

*Доказательство.* Граф  $\mathbf{d}$  состоит из трёх вершин и двух петель, соединенных двумя двойными рёбрами. Тогда в этом графе возможно выделить максимально четыре замкнутых пути. Следовательно, проекция, соответствующая графу  $\mathbf{d}$ , может иметь 4, 3, или 2 компоненты.

Предположим, что  $G$  состоит из 2 компонент. Применим операцию устранения перекрёстка к двум перекрёсткам, в которых компоненты пересекаются сами с собой. Тогда проекция получается из четырёх окружностей:  $s_1, s_2, s_3, s_4$ . Пусть  $s_1$  и  $s_4$  – окружности, соответствующие петлям. Возможны две ситуации. Первая ситуация:  $\#(s_2 \cap s_3) = 1$ , и окружности  $s_1$  и  $s_4$  соединены пунктирной дугой с окружностями  $s_2$  и  $s_3$ , соответственно. Получаем, что  $s_1, s_2, s_3, s_4$  – окружности типа средней линии листа Мёбиуса, что невозможно на  $K$ , так как бутылка Клейна состоит из двух листов Мёбиуса. Следовательно, первая ситуация не подходит. Вторая ситуация:  $\#(s_4 \cap s_3) = 1$ , и пары  $(s_1, s_2)$  и  $(s_2, s_3)$

соединены пунктирными дугами. Так как  $\#(s_4 \cap s_3) = 1$ , то  $s_1, s_3, s_4$  – окружности типа средней линии листа Мёбиуса. Определим окружность  $s_2$ . Дополнение к  $s_1, s_3, s_4$  состоит из диска и кольца. Следовательно, чтобы проекция  $G$  была существенной, нужно выбрать окружность  $s_2$  на кольце. Получаем, что окружность  $s_2$  либо тривиальная, либо параллель. С точностью до гомеоморфизмов проекций выбор пунктирных дуг однозначен для каждого случая. Применим операцию  $M^{-1}$  вдоль пунктирных дуг, получим проекции  $l3_1$  и  $l3_2$ , см. рис. 7.

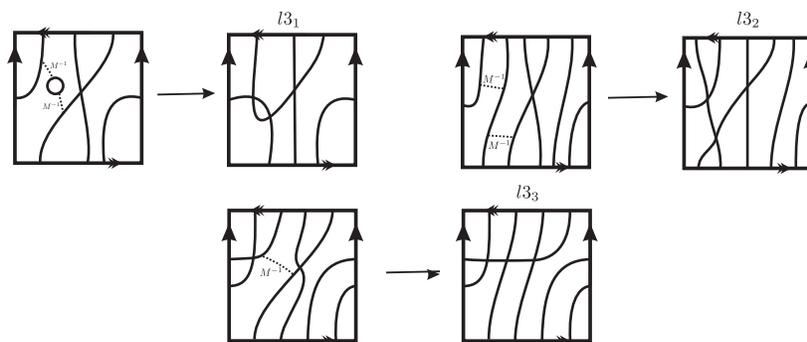


Рис. 7. Построение проекций типа  $d$

Предположим, что проекция  $G$  состоит из 3 компонент. Применим операцию устранения перекрёстка к перекрёстку, который образован одной компонентой. Тогда проекция получается из четырёх окружностей:  $s_1, s_2, s_3, s_4$ . Пусть  $s_1$  и  $s_4$  – окружности, соответствующие петлям. Возможны две ситуации. Первая ситуация:  $\#(s_4 \cap s_3) = 1$ ,  $\#(s_3 \cap s_2) = 1$ , а окружности  $s_1$  и  $s_2$  соединены пунктирной дугой. Следовательно,  $s_1, s_3, s_4$  – окружности типа средней линии листа Мёбиуса. Но выбрать  $s_2$  невозможно, так как дополнение к  $s_1, s_3, s_4$  на бутылке Клейна состоит из диска и кольца, тогда любая окружность как минимум трансверсально пересекается с  $s_1$  в двух точках. Следовательно, первая ситуация невозможна на  $K$ . Вторая ситуация:  $\#(s_1 \cap s_2) = 1$ ,  $\#(s_4 \cap s_3) = 1$  и окружности  $s_2$  и  $s_3$  соединены пунктирной дугой. Тогда  $s_1, s_2, s_3, s_4$  – окружности типа средней линии листа Мёбиуса, и с точностью до гомеоморфизма проекций существует единственная дуга, соединяющая  $s_2$  и  $s_3$ , см. рис. 7. Применим операцию  $M^{-1}$ , получим проекцию  $l3_3$ .

Предположим, что проекция  $G$  состоит из 4 компонент:  $s_1, s_2, s_3, s_4$ . Пусть  $s_1$  и  $s_4$  – две петли, тогда  $\#(s_1 \cap s_2) = 1$ ,  $\#(s_2 \cap s_4) = 0$ . Таким образом,  $s_2$  – окружность типа средняя линия листа Мёбиуса. Теперь нужно выбрать  $s_3$  так, чтобы  $\#(s_3 \cap s_2) = 1$ . Но выбрать такую окружность невозможно, так как дополнение к  $s_1, s_2, s_4$  на бутылке Клейна состоит из диска и кольца, то любая окружность как минимум трансверсально пересекается с  $s_2$  в двух точках. Следовательно, проекция  $G$ , соответствующая графу  $d$ , не состоит из 4 компонент.  $\square$

**Лемма 6.** На бутылке Клейна существуют 2 существенных проекции зацеплений, являющихся вложением графа  $c$ , изображённого на рисунке 4. Это проекции  $l2_3, l2_4$ , см. рис. 8.

*Доказательство.* Пусть проекция является вложением графа  $c$ . Граф  $c$  состоит из двух вершин, соединённых 4 рёбрами. Тогда в этом графе возможно выделить максимально два замкнутых пути. Тогда проекция  $G$ , соответствующая графу  $c$ , состоит из 2 компонент:  $s_1, s_2$ . Если проекция содержит двуугольник, применим операцию  $N$ . Получим, что  $s_1, s_2$  – две обращённые ориентации окружности. В противном случае к проекции применим п. 2 леммы 1. Тогда  $s_1, s_2$  – две средние линии листа Мёбиуса, соединённые пунктирной дугой. С точностью до гомеоморфизмов проекций выбор пунктирных дуг однозначен. Применим операцию  $N^{-1}$  вдоль пунктирной дуги, получим проекцию  $l_{23}$ , см. рис. 8. Если проекция  $G$  не содержит двуугольник, то  $\#(s_1 \cap s_2) = 2$ . Получаем,  $s_1, s_2$  – меридиан и параллель. Получим проекцию  $l_{24}$ , см. рис. 8.

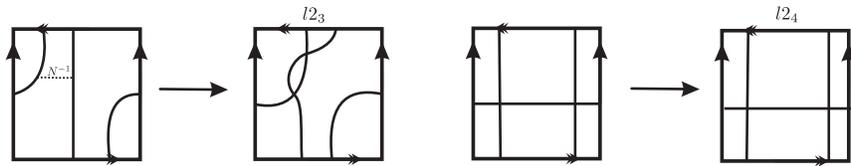


Рис. 8. Построение проекций типа  $c$

□

**Лемма 7.** На бутылке Клейна существуют 6 существенных проекций зацеплений, являющихся вложением графа  $e$ , изображённого на рисунке 4. Это проекции  $l_{34}, l_{35}, l_{36}, l_{37}, l_{38}, l_{39}$ , см. рис. 9.

*Доказательство.* Граф  $e$  получается из графа  $c$  присоединением петли. Тогда в этом графе возможно выделить максимально три замкнутых пути. Следовательно, проекция  $G$ , соответствующая графу  $e$ , может иметь 3 или 2 компоненты.

Предположим, что проекция  $G$  состоит из 2 компонент:  $s_1, s_2$ . Возможны две ситуации. Первая ситуация: пусть  $s_1$  – петля и  $\#(s_1 \cap s_2) = 1$ . Компонента  $s_2$  – проекция узла  $G'$  соответствующая графу  $c$ , см. рис. 4. Проекция  $G'$  получается из двух окружностей, трансверсально пересекающихся ровно в одной точке и соединённых пунктирной дугой. Две трансверсально пересекающихся окружности – либо две средние линии листа Мёбиуса, либо средняя линия листа Мёбиуса и меридиан, соединённые пунктирными дугами. Применим операцию  $M^{-1}$ , получим проекции узлов. Легко заметить, что только вторая пара нам подходит. В результате получим проекцию  $l_{35}$ , см. рис. 9. Вторая ситуация:  $\#(s_1 \cap s_2) = 2$  и  $s_2$  соединена пунктирной дугой с петлёй. Окружности  $s_1, s_2$  не могут быть одновременно не меняющими ориентацию окружностями, так как при соединении петли получим проекцию, к которой применим пункт 2 леммы 1. Если пересечения  $s_1, s_2$  образуют двуугольник, то применим операцию устранения двуугольника  $N$ , получим три окружности. С учетом всех условий, имеем две тройки: две средние линии листа Мёбиуса и тривиальная окружность; две средние линии листа Мёбиуса и параллель. Применим операцию  $N^{-1}$  и  $M^{-1}$ , получим проекции  $l_{34}, l_{36}, l_{37}$ , см. рис. 9. Легко проверить, что если пересечение  $s_1, s_2$  не образует двуугольник, то такой проекции на бутылке Клейна не существует.

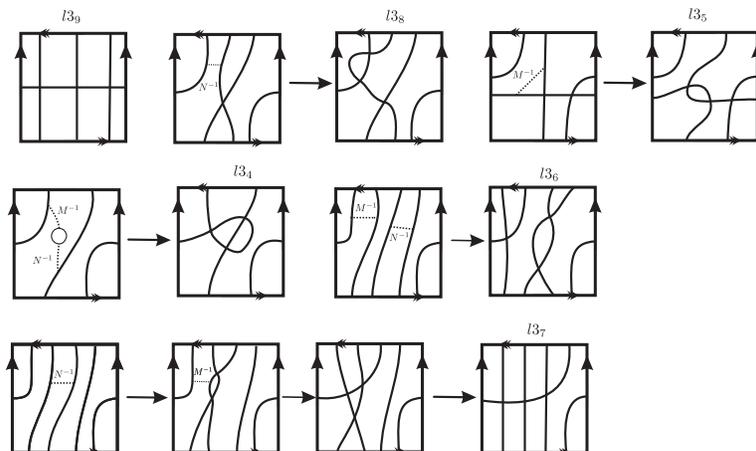


Рис. 9. Построение проекций типа  $e$

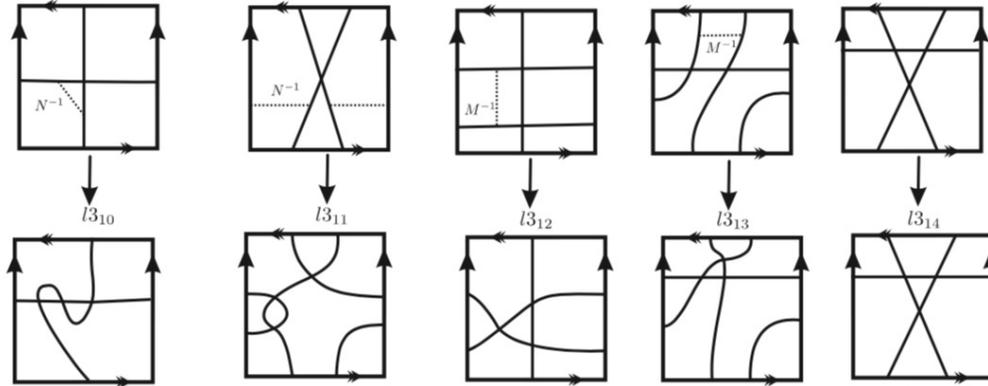
Предположим, что проекция  $G$  состоит из 3 компонент:  $s_1; s_2; s_3$ . Пусть  $s_1$  – петля,  $\#(s_1 \cap s_2) = 1$ , тогда  $\#(s_2 \cap s_3) = 2$ . Петля трансверсально пересекается ровно в одной точке либо с меридианом, либо со средней линией листа Мёбиуса. Тогда за  $s_3$  нужно взять параллель, либо среднюю линию листа Мёбиуса, соответственно. Имеем проекции  $I_{39}$  и  $I_{38}$ , см. рис. 9.  $\square$

**Лемма 8.** На бутылке Клейна существуют 5 существенных проекций зацеплений, являющихся вложением графа  $f$ , изображённый на рисунке 4. Это проекции  $I_{310}, I_{311}, I_{312}, I_{313}, I_{314}$ , см. рис. 10.

*Доказательство.* Граф  $f$  состоит из трёх вершин, каждые две соединены двойным ребром. Тогда в этом графе возможно выделить максимально три замкнутых пути. Следовательно, проекция  $G$ , соответствующая графу  $f$ , может иметь 3 или 2 компоненты.

Предположим, что  $G$  состоит из 2 компонент. Пусть проекция  $G$  содержит двугольную грань. Тогда применим операцию устранения двугольника. Получим набор из двух окружностей:  $s_1, s_2$  и  $\#(s_1 \cap s_2) = 1$ . Окружности  $s_1, s_2$ , либо меридиан и средняя линия листа Мёбиуса, либо две средние линии листа Мёбиуса. Применим операцию  $N^{-1}$ , получим проекции  $I_{310}$  и  $I_{311}$ , см. рис. 10. Пусть проекция  $G$  не содержит двугольной грани. Тогда применим операцию устранения перекрёстка к перекрёстку, в котором одна компонента пересекается сама с собой. Получим набор из трёх окружностей:  $s_1, s_2, s_3$ . Пусть  $\#(s_1 \cap s_2) = 1$  и  $\#(s_1 \cap s_3) = 1$ ,  $s_2$  и  $s_3$  соединены пунктирной дугой. Окружности  $s_2$  и  $s_3$  являются неразбивающими, следовательно, либо два меридиана, либо две средние линии листа Мёбиуса. Тогда,  $s_1$  – либо средняя линия листа Мёбиуса, либо меридиан. Применим операцию  $M^{-1}$  вдоль пунктирных дуг, получим проекции  $I_{312}$  и  $I_{313}$ , см. рис. 10.

Предположим, что проекция  $G$  состоит из 3 компонент. Тогда проекция получается из трёх окружностей, каждые две из которых трансверсально пересекаются ровно в одной точке. На бутылке Клейна существует две пары окружностей, трансверсально пересекающихся ровно в одной точке: две средние линии листа Мёбиуса, либо меридиан со средней линией листа Мёбиуса.

Рис. 10. Построение проекций типа  $f$ 

Тогда в качестве третьей окружности можно выбрать к первой паре меридиан, а ко второй паре – среднюю линию листа Мёбиуса. В результате получим две эквивалентные проекции на бутылке Клейна:  $I_{314}$ , см. рис 10.  $\square$

**Теорема 1.** *Существует ровно 18 попарно неэквивалентных существенных проекций зацеплений с двумя и тремя компонентами на бутылке Клейна, которые имеют не более чем три перекрёстка. Все они изображены на рисунке 11.*

*Доказательство.* Используя леммы с 3 по 8, получаем, что существует всего 18 существенных проекций зацеплений на бутылке Клейна, которые имеют не более чем три перекрёстка. Докажем, что все полученные проекции на рисунке 11 попарно неэквивалентны. Сопоставим каждой проекции так называемый *фасе-вектор*:  $(j(r)i_1, i_2, \dots, i_n)$ , где  $r$  – число компонент проекции,  $i_1, i_2, \dots, i_n$  – упорядоченное по убыванию число углов её граней,  $j$  – графический тип проекции,  $j \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$ . Строки, отвечающие построенным проекциям, приведены на рис. 11. Таких строк достаточно, чтобы различить любые две проекции, за исключением пары  $(I_{312}, I_{313})$ . Но проекции неэквивалентны, потому что в первом случае треугольные грани имеют общее ребро, а во втором не имеют.  $\square$

## 5. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

**Определение 7.** *Зацепление в  $K \tilde{\times} I$  называется существенным, если оно не является связной суммой зацепления в  $S^3$  и зацепления в  $K \tilde{\times} I$ , и дополнение к нему не содержит существенные кольца.*

**Теорема 2.** *Существует ровно 25 попарно неэквивалентных существенных нерасцепляемых зацеплений с двумя и тремя компонентами в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков. Задающие их диаграммы изображены на рис. 12.*

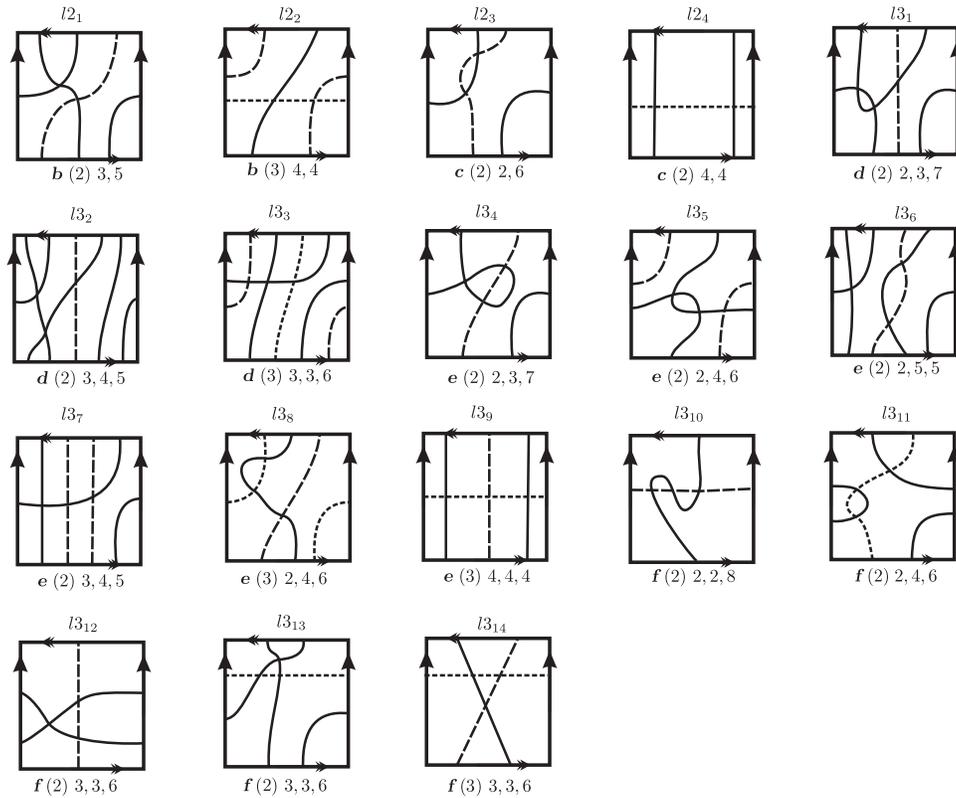


Рис. 11. Проекция зацеплений с двумя и тремя компонентами на бутылке Клейна с не более чем тремя перекрёстками. Над каждой проекцией указан её номер, а под ней приведены её графический тип (см. рис. 4) и face-вектор, который составлен из чисел углов её граней и в скобках указано количество компонент

*Доказательство.* По теореме 1 существует 18 существенных проекций. Чтобы по данной проекции построить диаграммы, нужно путем разрывов разметить все её перекрёстки. При смене всех знаков перекрёстков на противоположные класс эквивалентности зацеплений остаётся прежним. Тогда в рассмотрении каждой проекции тип одного перекрёстка можно зафиксировать, в силу чего для проекции с  $n$  перекрёстками достаточно рассмотреть  $2^{n-1}$  вариантов. Получаем, что проекций с двумя перекрёстками их 4, а проекций с тремя перекрёстками их 14. В итоге достаточно рассмотреть 64 диаграммы  $(4 \cdot 2^1 + 14 \cdot 2^2)$ . Эти диаграммы изображены на рисунке 13. Легко заметить, что диаграммы с номерами 6, 11, 12, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 39, 40, 46, 47, 48, 51, 52 не минимальны. Диаграммы 3, 7, 8, 34, 35, 42, 43, 44, 54, 55, 58, 60, 62, 63 задают расщепляемые зацепления по пунктам 5 и 6 леммы 1 и диаграммы 2, 16, 19, 36, 59 задают расщепляемые зацепления по определению. Диаграммы 20, 56, 64 эквивалентны диаграммам 17, 53, 61, соответственно, так одну диаграмму

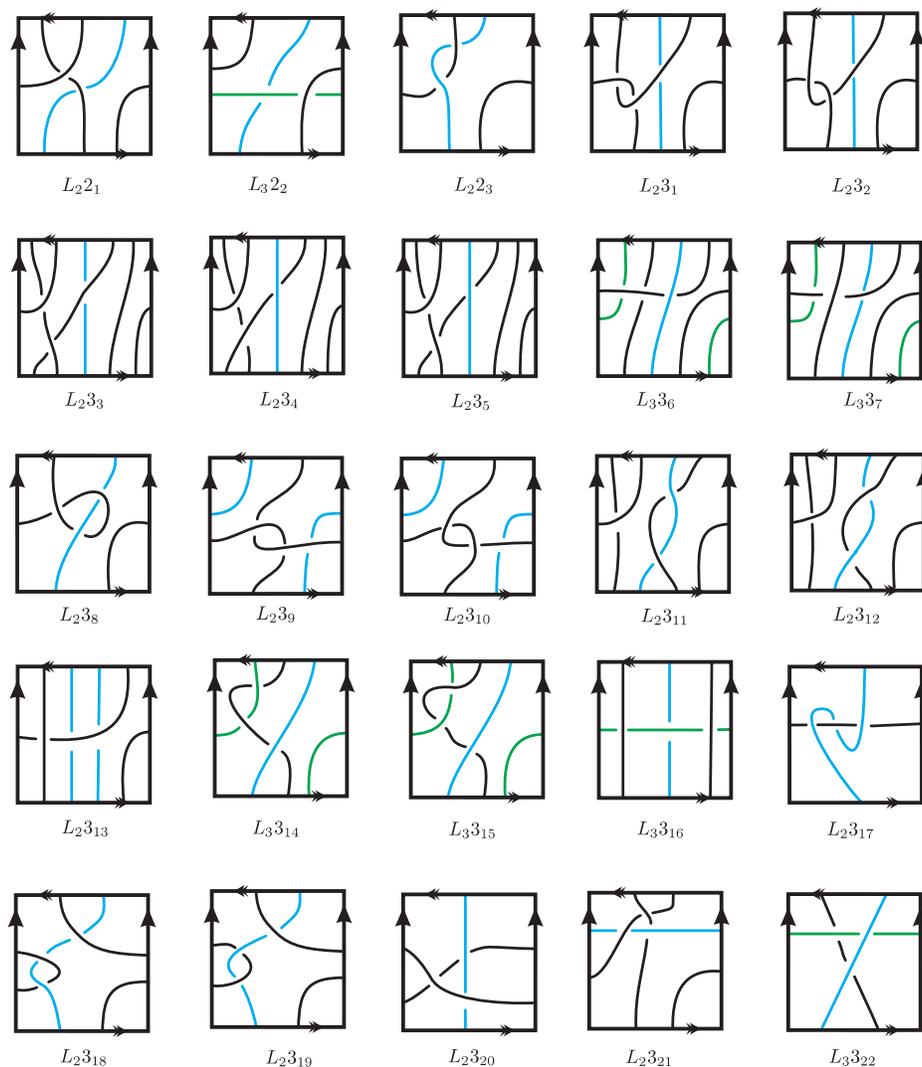


Рис. 12. Таблица существенных нерасщепляемых зацеплений в  $K \tilde{\times} I$ , минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков

можно получить из другой с помощью преобразований диаграмм зацеплений  $R_1 - R_{12}$ , введенные в работе [7]. В результате осталось 25 диаграмм, см. рис. 12.

Различность всех полученных зацеплений доказывается с помощью вычисления их обобщённых полиномов Кауффмана [6]. В отличие от обычной нормализованной скобки Кауффмана от одной переменной, мы используем 4 переменные:  $A$ ,  $x$ ,  $y$  и  $z$ , – которые нужны для учёта числа и типов окружностей

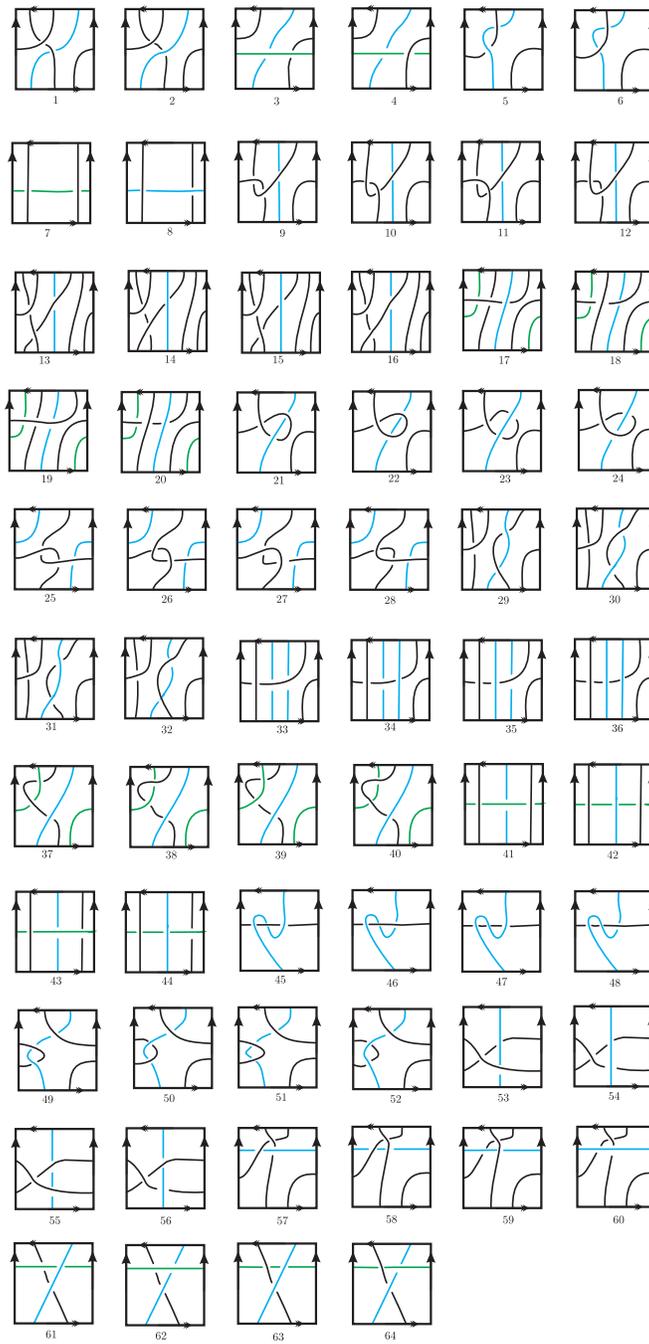


Рис. 13. Таблица 64 диаграмм, полученных из 18 проекций  $s$  зафиксированным одним перекрёстком

в  $K$ , получающихся после разрешения всех перекрёстков диаграммы согласно выбранному состоянию  $s$ . Точная формула такова:

$$X(L) = (-A)^{-3w'(L)} \sum_s A^{\alpha(s)-\beta(s)} (-A^2 - A^{-2})^{\gamma(s)} x^{\delta_1(s)} y^{\delta_2(s)} z^{\delta_3(s)},$$

где  $\alpha(s)$  и  $\beta(s)$  – число маркеров  $A$  и  $B$  в состоянии  $s$ ,  $\gamma(s)$  – число тривиальных окружностей на бутылке Клейна и  $\delta_1(s)$ ,  $\delta_2(s)$  и  $\delta_3(s)$  – числа окружностей типа  $\mu$ ,  $\lambda$ , и  $m$ , соответственно, полученных в результате разрешения всех перекрёстков. Сумма берётся по всем возможным состояниям, а  $w'(L)$  – сумма знаков перекрёстков, образованных одной компонентой. Ниже приведена таблица полиномов Кауффмана для всех зацеплений, заданных диаграммами на рис. 12.

$$\begin{aligned} L_2\mathfrak{2}_1 &: (-A^{-5} + A)z - A^{-3}yz; \\ L_3\mathfrak{2}_2 &: -A^{-4} - 2 - A^4 + 2y; \\ L_2\mathfrak{2}_3 &: (1 - A^4)x + A^{-2}z^2; \\ L_2\mathfrak{3}_1 &: (A^{-7} + A^{-1})z + (A^{-5} - A^{-1})yz; \\ L_2\mathfrak{3}_2 &: (A^{-1} + A^9)z + (-A^3 + A^7)yz; \\ L_2\mathfrak{3}_3 &: (-A^{-5} - A^5)z + (-A^{-3} + A^{-1})yz + Ay^2z; \\ L_2\mathfrak{3}_4 &: (-A^{-5} - A^{-3})z + (A^{-7} - A^{-1})yz + A^{-5}y^2z; \\ L_2\mathfrak{3}_5 &: (-A^{-3} - A^3)z + (A^{-3} - A^{-1})yz + A^{-1}y^2z; \\ L_3\mathfrak{3}_6 &: A^{-6} - A^2 + (A^{-2} + A^2)y - A^{-2}y^2; \\ L_3\mathfrak{3}_7 &: -A^{-4} - 1 + A^4 + A^8 + 2y - A^4y^2; \\ L_2\mathfrak{3}_8 &: (-A^4 + A^8)x + (A^{-2} - A^2 + A^6)z^2; \\ L_2\mathfrak{3}_9 &: -2A^3 - A^7 + A^{11} + (A^3 + A^7 - A^{11})z; \\ L_2\mathfrak{3}_{10} &: A^{-13} - 2A^{-5} - A^{-1} + (-A^{-9} + 2A^{-5})z; \\ L_2\mathfrak{3}_{11} &: (1 - A^{-4})x + (-A^{-6} - A^{-2} + A^2)z^2 - A^{-4}yz^2; \\ L_2\mathfrak{3}_{12} &: (A^{-8} - A^{-4})x + (A^{-6} - 2A^{-2})z^2 - yz^2; \\ L_2\mathfrak{3}_{13} &: -2A^4x + (A^{-2} - 2A^2 - A^6)z^2 - A^4yz^2; \\ L_3\mathfrak{3}_{14} &: (-A^{-5} + A - A^3 - A^5)z + A^{-1}yz; \\ L_3\mathfrak{3}_{15} &: (-A^{-5} - A^{-3} + A - A^3)z + A^3z^2; \\ L_3\mathfrak{3}_{16} &: (-A^{-5} + A^{-1} + A - A^5)z + (A^{-1} + A)yz; \\ L_2\mathfrak{3}_{17} &: (A^{-3} + A^{-1} - A^3 + A^7)z; \\ L_2\mathfrak{3}_{18} &: -2A^{-3} - A + A^5 + A^{-3}y + (A - A^5)x^2; \\ L_2\mathfrak{3}_{19} &: A^{-7} - 2A - A^5 + Ay + (-A^{-3} + A)x^2; \\ L_2\mathfrak{3}_{20} &: (A^{-8} - A^{-4} - 2A^{-2})z; \\ L_2\mathfrak{3}_{21} &: A^{-2} + 3A^2 + A^6 - A^{10} - A^2x^2 - 2A^2y; \\ L_3\mathfrak{3}_{22} &: (-A^{-5} + A^{-1})x + 2Az^2. \end{aligned}$$

Построенные зацепления на рисунке 12 существенные и нерасщепляемые, так как их дополнительные пространства являются гиперболическими многообразиями. Это было проверено при помощи компьютерных программ «SnapPy» см. [9] и «3-Manifold Recognizer» см. [8]. Результаты программ приведены в таблице 1. Где изометрические сигнатуры – один из способов задания триангуляции многообразий, получены при помощи [8] и величины гиперболических объёмов были вычислены при помощи [9].

Таблица 1

| Имя          | Изометрическая сигнатура            | Гиперболический объём |
|--------------|-------------------------------------|-----------------------|
| $L_2 2_1$    | iLLAMPcbedeffhhhebbddbfcb           | 6.3545865572          |
| $L_3 2_2$    | iLMLAPcbbdeffhhhpuaabbbvo           | 7.32772475342         |
| $L_2 2_3$    | ivLAPQcdefeghhghbvaouavob           | 5.3334895669          |
| $L_2 3_1$    | mLLALMMwQccdeghihjlllpvbabaaavobv   | 6.3545865572          |
| $L_2 3_2$    | mLLALMMzQccdeghihjlllpvabapabvobv   | 8.7786588032          |
| $L_2 3_3$    | kLLPLMAkceefeghijjiiatdvppevs       | 9.5357002543          |
| $L_2 3_4$    | mLLMLPPwQcdedfghijllltgafvftfffvvg  | 7.035521457           |
| $L_2 3_5$    | mLLAzMMzQbcedfhhijllldfabbaadcccbf  | 6.3545865572          |
| $L_3 3_6$    | mLLwAPMzQceefhhijllladeedffedbcfb   | 7.3277247534          |
| $L_3 3_7$    | mLLvAMMAQcefgigikkllliamoocimagco   | 10.1494160641         |
| $L_2 3_8$    | mLLAvPPMQbcedeigikjllklebbdacafadca | 7.706911803           |
| $L_2 3_9$    | mLLvQLLQQceffjljkllaaaimaaiaccco    | 6.35458655720         |
| $L_2 3_{10}$ | mLMvzLMQQbbdfjhijklpuaababbbbabpu   | 9.5034039310          |
| $L_2 3_{11}$ | mLLALLwQQcdehijljkllpvbappaboovo    | 7.8679012756          |
| $L_2 3_{12}$ | mLLLzAzQQcddhghlljkklgtfvfgfffgvf   | 6.5517432879          |
| $L_2 3_{13}$ | mLLALLMAQbcedhjiklklldfabddaacfdae  | 6.354586557           |
| $L_3 3_{14}$ | mLMLvMwQQbbdehghlkjllpuabuaoapvaao  | 8.929317823           |
| $L_3 3_{15}$ | mLMLvMPMQbbdegiijkllpuaoavopaapv    | 7.327724753           |
| $L_3 3_{16}$ | mLLzwQPwQceefghijllliiaaooommmai    | 3.328                 |
| $L_2 3_{17}$ | mLvvwAQQQcghhikijlliacococoioaa     | 7.3277247534          |
| $L_2 3_{18}$ | mLvvwAQQQcghhikijlllaacgocccccima   | 6.3545865572          |
| $L_2 3_{19}$ | mLvvwAQQQcghhijlklklliacoccccciam   | 9.5034039310          |
| $L_2 3_{20}$ | mLvLAzAQQQcefgiikllkllaaacccaefcb   | 7.32772475342         |
| $L_2 3_{21}$ | mLvLAzQMQcfgeigijkllklddaebcbadefbb | 10.1494160641         |
| $L_3 3_{22}$ | mLLzwPLQQceefhijlklklliaiacccamcco  | 7.327724753           |

□

REFERENCES

[1] J. Drobotukhina, *Classification of links in  $RP^3$  with at most six crossings*, Adv. Sov. Math., **18** (1994), 87–121. Zbl 0866.57007

[2] A. Cattabriga, E. Manfredi, M. Mulazzani, *On knots and links in lens spaces*, Topology Appl., **160**:2 (2013), 430–442. Zbl 1263.57004

[3] B. Gabrovsek, M. Mroczkowski, *Knots in the solid torus up to 6 crossings*, J. Knot Theory Ramifications, **21**:11 (2012), Paper No 1250106. Zbl 1278.57006

[4] A.A. Akimova, S.V. Matveev, *Classification of genus 1 virtual knots having at most five classification crossings*, J. Knot Theory Ramifications, **23**:6 (2014), Article ID 1450031. Zbl 1302.57008

[5] A.A. Akimova, S.V. Matveev, V.V. Tarkaev *Classification links of small complexity in the thickened torus*, Proc. Steklov Inst. Math., **303**: 1 (2018), S12–S24. Zbl 1418.57002

[6] S.V. Matveev, L.R. Nabeeva, *Tabulating knots in the thickened Klein bottle*, Sib. Math. J., **57**:3 (2016), 542–548. Zbl 1348.57013

[7] L.R. Nabeeva, *On the equivalence of some tabulation knots in a thickened Klein bottle*, Sib. Electron. Math. Izv, **14** (2017), 1472–1479. MR3744044

[8] Atlas of 3-Manifolds [site] / Laboratory of Quantum Topology of Chelyabinsk State University. URL: <http://www.matlas.math.csu.ru>.

[9] SnapPy 2.5.4 documentation [e-recource]. URL: <http://www.math.uic.edu/t3m/SnapPy>.

LILIYA NABEEVA  
CHELYABINSK STATE UNIVERSITY,  
129, BRATIEV KASHIRINYKH STR.,  
CHELYABINSK, 454001, RUSSIA  
*Email address: liya.nabeyeva@yandex.ru*