S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 512.54
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 20B07,
20B30, 20B35

О СМЕШАННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУППЫ $Lim(N)$

А.И. СОЗУТОВ, Н.М. СУЧКОВ, Н.Г. СУЧКОВА

Abstract. We study mixed normal subgroups of limited permutation group $G = Lim(N)$ and chains of such subgroups.

Keywords: group, limited permutation, mixed group, normal subgroup, chains of subgroups.

1. Введение

Пусть $S(N)$ — группа всех подстановок множества натуральных чисел N. Напомним, что носителем подстановки $g \in S(N)$ называется множество

$$supp(g) = \{\alpha \mid \alpha \in N,\ \alpha^g \neq \alpha\}.$$

Подстановки с конечными носителями называются финитарными и образуют локально конечную счётную группу $Fin(N)$.

Подстановка множества N называется ограниченной, если

$$\omega(g) = \max_{\alpha \in N} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Все такие подстановки образуют смешанную группу $G = Lim(N)$, представимую в виде произведения двух локально конечных подгрупп [1]. При этом в группу G изоморфно вложимы любая счётная свободная группа и 2-группа Алёшина [5]. Далее, в [1] доказано, что G порождается подстановками x с параметром ограниченности $\omega(x) = 1$. Такие подстановки являются инволюциями,

Sozutov, A.I., Suchkov N.M., Suchkova N.G., On mixed normal subgroups of group $Lim(N)$.

Работа поддержана РФФИ (грант 19-01-00566A) и Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Поступила ?? декабря 2020 г., опубликована ?? январе 2021 г.

в разложении которых на независимые циклы участвуют только транспозиции вида $(\alpha\ \ \alpha+1)$, $\alpha \in N$.

По сравнению с группами $S(N)$ и $Fin(N)$ нормальное строение группы $G = Lim(N)$ оказалось весьма сложным. Изучение этого строения началось в работах [2]–[5]. В частности, в терминах свойств носителя $supp(g)$ подстановки $g \in G$ получены критерии принадлежности g локально конечному радикалу группы G и её собственной нормальной подгруппе.

В данной статье получены следующие основные результаты.

Теорема 1. *Группа G не удовлетворяет условиям минимальности и максимальности для смешанных нормальных подгрупп.*

Теорема 2. *Группа G содержит континуальное множество смешанных нормальных подгрупп.*

Аналогичные теоремы для локально конечных нормальных подгрупп группы G установлены в [5].

2. Предварительные построения

Если γ, ε — целые числа и $\gamma \leqslant \varepsilon$, то множество

$$U(\gamma,\varepsilon) = \{\beta \mid \beta \in Z,\ \gamma \leqslant \beta \leqslant \varepsilon\}$$

будем называть отрезком целых чисел; γ — левый конец отрезка, ε — правый. В частности, $U(\gamma,\gamma) = \{\gamma\}$. Для $\varepsilon > 0$ обозначим

$$V(\gamma,\varepsilon) = U(\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon).$$

Лемма 1. *Для любого отрезка $U(\gamma,\varepsilon)$ целых чисел найдётся такой цикл $c = c(\gamma,\varepsilon)$, состоящий из элементов этого отрезка, что $\omega(c) \leqslant 2$.*

Доказательство. Если $\varepsilon = \gamma$, то $c = (\gamma)$ и $\omega(c) = 0$. При $\varepsilon = \gamma + 1$ достаточно взять $c = (\gamma\ \ \varepsilon)$. Тогда $\omega(c) = 1$. Пусть $\varepsilon = \gamma + 2k$, $k \in N$. Положим

$$c = (\gamma\ \ \gamma+2\ \ \dots\ \ \gamma+2(k-1)\ \ \varepsilon\ \ \varepsilon-1\ \ \varepsilon-3\ \ \dots\ \ \gamma+1).$$

Очевидно, $\omega(c) = 2$. Наконец, если $\varepsilon = \gamma + 2k + 1$, $k \in N$, то $\omega(c) = 2$ для

$$c = (\gamma\ \ \gamma+2\ \ \dots\ \ \gamma+2k\ \ \varepsilon\ \ \varepsilon-2\ \ \varepsilon-4\ \ \dots\ \ \gamma+1).$$

Лемма доказана. □

Фиксируем целое нечётное число $q > 3$ и пусть

$$L_q = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots\},$$

где $\alpha_1 = 2q,\ \alpha_2 = 2^2q,\ \dots,\ \alpha_n = 2^nq,\ \dots$.

Для каждого натурального k определим отрезки натуральных чисел

$$T_k^{-1} = U(1, \alpha_k - 2k),\ T_k^s = V(\alpha_{k+s}, 2k+s-1),\ s = 0,1,2,\dots. \tag{1}$$

Покажем, что правый конец отрезка T_k^s меньше левого конца отрезка T_k^{s+1} при любом $s = -1, 0, 1, 2, \dots$. В самом деле, если $s = -1$, то $\alpha_k - 2k$ является правым концом отрезка T_k^{-1}, а левый конец отрезка T_k^0 равен $\alpha_k - (2k-1)$, т. е. на 1 больше. Пусть $s > -1$. Тогда $\alpha_{k+s} + 2k + s - 1 = a_k$ есть правый конец отрезка

T_k^s, а $\alpha_{k+s+1}-(2k+s)=b_k$ — левый конец отрезка T_k^{s+1}. В силу неравенств $2^n>n$ $(n\in N)$, $q\geqslant 5$, $k\geqslant 1$, $s\geqslant 0$ мы имеем

$$b_k-a_k=2^{k+s+1}q-2^{k+s}q-4k-2s+1=2^{k+s}q-(4k+2s-1)>$$
$$>(k+s)5-(4k+2s-1)>0.$$

Из последнего абзаца вытекает, что отрезки (1) попарно не пересекаются. Пусть T_k — объединение всех этих отрезков. Положим

$$P_k(q)=\{x\mid x\in G,\ (T_k^s)^x=T_k^s\ (s=-1,0,1,2,\ldots),\ \beta^x=\beta\ (\beta\in N\setminus T_k)\}.$$

Очевидно, $P_k(q)$ — подгруппа группы G.

Заметим, что наибольший элемент объединения $T_k^{-1}\cup T_k^0$ есть правый конец отрезка T_k^0; он равен $d_k=\alpha_k+2k-1$. Так как $T_{k+1}^{-1}=U(1,e_k)$, где $e_k=\alpha_{k+1}-2(k+1)$, то e_k — наибольший элемент отрезка T_{k+1}^{-1}. Мы имеем

$$e_k-d_k=2^k-4k-1>5k-(4k+1)\geqslant 0.$$

Таким образом, выполняется включение

$$T_{k+1}^{-1}\supset(T_k^{-1}\cup T_k^0). \tag{2}$$

Кроме того, очевидно, что

$$V(\alpha_{k+s+1},2k+s+1)=T_{k+1}^s\supset T_k^{s+1}=V(\alpha_{k+s+1},2k+s) \tag{3}$$

при $s\geqslant 0$ и любом натуральном k.

Из определения группы $P_k(q)$ и включений (2), (3) следует, что $P_k(q)<P_{k+1}(q)$, $k\in N$. Положим

$$P(q)=\bigcup_{k\in N}P_k(q). \tag{4}$$

Лемма 2. *$P(q)$ — смешанная локально финитно аппроксимируемая нормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Фиксируем натуральное k. В силу леммы 1 для каждого отрезка T_k^s $(s=-1,0,1,2,\ldots)$ найдётся такой цикл $t(k,s)$, состоящий из элементов этого отрезка, что $\omega(t(k,s))\leqslant 2$. Если

$$g_k=t(k,-1)\,t(k,0)\,t(k,1)\,t(k,2)\,\ldots\ —$$

разложение подстановки $g_k\in S(N)$ на независимые циклы, то $\omega(g_k)\leqslant 2$, а значит, $g_k\in P_k(q)$. Так как длины этих независимых циклов неограничены, то g_k — элемент бесконечного порядка из $P_k(q)<P(q)$. Поскольку существование неединичных элементов конечных порядков в группе $P(q)$ очевидно, то эта группа смешанная.

Далее, если в определении группы $P_k(q)$ рассматривать не только подстановки из группы $G=Lim(N)$, а любые другие подстановки группы $S(N)$, то мы получим группу $R_k(q)$, содержащую $P_k(q)$. Поскольку отрезки T_k^s $(s=-1,0,1,2,\ldots)$ попарно не пересекаются, то $R_k(q)$ — декартово произведение симметрических групп $S_{n(s,k)}$, где $n(s,k)=|T_k^s|$, $s=-1,0,1,2,\ldots$. Итак, $R_k(q)$ — финитно аппоксимированная группа для любого $k\in N$. Но тогда таковой является и её подгруппа $P_k(q)$. В силу (4) $P(q)$ — объединение возрастающей цепочки подгрупп $P_1(q)<P_2(q)<\ldots<P_n(q)<\ldots$. Отсюда немедленно вытекает, что группа $P(q)$ локально финитно аппроксимируема.

Пусть $1 \neq h \in P(q)$, $g \in G$ и $\omega(g) = 1$. Из определения группы $P(q)$ вытекает, что найдётся такое натуральное k, что $h \in P_k(q)$. Рассмотрим произвольный цикл $x = (\alpha_1 \ \dots \ \alpha_r)$ из разложения подстановки h на независимые циклы. Согласно определению группы $P_k(q)$ либо элементы цикла x содержатся в объединении $T_k^{-1} \cup T_k^0$, либо на отрезке T_k^s для некоторого $s \in N$. В силу включений (2), (3) и равенства $\omega(g) = 1$ отсюда получаем, что $x^g = (\alpha_1^g \ \dots \ \alpha_r^g) \in P_{k+1}(q) < P(q)$. Таким образом, $h^g \in P(q)$. Во введении отмечалось, что G порождается подстановками с параметром ограниченности равным 1. Поэтому $P(q) \lhd G$. Лемма доказана. $\square$

3. Доказательство теорем 1, 2

Пусть q, r — различные натуральные нечётные числа, каждое из которых больше 3.

Лемма 3. *Если $x \in P(q)$, $y \in P(r)$, то пересечение*

$$W = supp(x) \cap supp(y)$$

конечно.

Доказательство. Предположим, что множество W бесконечно. Тогда в силу определений найдётся такой номер k, что $x \in P_k(q)$, $y \in P_k(r)$ и для достаточно больших $\gamma \in W$ выполняются неравенства

$$|\gamma - q2^{k+s}| \leqslant 2k + s - 1, \quad |\gamma - r2^{k+t}| \leqslant 2k + t - 1,$$

где s, t — некоторые натуральные числа. Отсюда легко следует, что

$$|q2^{k+s} - r2^{k+t}| \leqslant 4k + s + t - 2. \tag{5}$$

Таким образом, из нашего предположения вытекает бесконечность множества

$$D = \{(s,t) \mid s,t \in N \text{ и удовлетворяют } (5)\}.$$

Если D содержит пару (s, s), то

$$2^{k+s}|q - r| \leqslant 4k + 2s - 2.$$

Так как $|q - r| \geqslant 2$, то таких натуральных k и s не существует. Поэтому из элементов D можно выбрать последовательность

$$(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_m, t_m), \dots, \tag{6}$$

где $s_1 < s_2 < \dots < s_m < \dots$ и либо $s_m > t_m$ $(m \in N)$, либо $s_m < t_m$ $(m \in N)$. В силу симметричного вхождения t и s в неравенство (5) достаточно рассмотреть только первый случай. При этом имеются две возможности.

1. Существует такое натуральное n_0, что $s_m - t_m < n_0$ для любого $m \in N$. Так как тогда

$$4k + s_m + t_m - 2 < 4k + 2t_m + n_0 < 4(k + t_m) + n_0,$$

то в силу (5) мы имеем

$$2^{k+t_m}|q2^{s_m - t_m} - r| < 4(k + t_m) + n_0.$$

Ясно, что это неравенство не выполняется при достаточно больших t_m.

2. Найдётся такая строго возрастающая последовательность $i_1, \dots, i_m, \dots$ натуральных чисел, что $s_{i_m} - t_{i_m} > m$ $(m \in N)$. В этом случае

$$4k + s_{i_m} + t_{i_m} - 2 < 4k + 2s_{i_m} - m < 4(k + s_{i_m}),$$

а значит, в силу (5) получаем

$$2^{k+s_{i_m}}|q - r2^{t_{i_m}-s_{i_m}}| < 4(k + s_{i_m}). \tag{7}$$

Пусть $m > r$. Тогда $s_{i_m} - t_{i_m} > r$, $2^{t_{i_m}-s_{i_m}} < r^{-1}$. Отсюда и из (7) выводим неравенство

$$2^{k+s_{i_m}}(q - 1) < 4(k + s_{i_m}).$$

Так как $q-1 \geqslant 4$, то данное неравенство не выполняется при $m > r$. Получили противоречие. Лемма доказана. $\square$

Пусть $E = \{2k - 1 \mid k \in N,\ k \geqslant 3\}$, $\varnothing \neq A \subset E$. Обозначим

$$P(A) = \langle P(q) \mid q \in A\rangle.$$

В силу леммы 2 $P(A)$ — смешанная нормальная подгруппа группы G.

Лемма 4. *Пусть A, B — различные непустые подмножества множества E. Тогда $P(A) \neq P(B)$.*

Доказательство. Пусть, например, $q \in A$ и $q \notin B$. Предположим, что $P(q) \leqslant P(B)$ и пусть v — элемент бесконечного порядка группы $P(q)$. В частности, носитель $supp(v)$ бесконечен. Мы имеем $v = h_1 \cdot \ldots \cdot h_s$, где $h_i \in P(r_i)$, $1 \leqslant i \leqslant s$; $r_1, \ldots, r_s$ — некоторые различные элементы множества B. Очевидно, что тогда

$$supp(v) \subseteq \bigcup_{k=1}^{s} supp(h_k),$$

а потому

$$supp(v) \subseteq \bigcup_{k=1}^{s} (supp(v) \cap supp(h_k)).$$

Но в силу леммы 3 отсюда следует, что $supp(v)$ — конечное множество. Получили противоречие. Итак, $P(q)$ содержится в $P(A)$ и не содержится в $P(B)$. В частности, $P(A) \neq P(B)$. Лемма доказана. $\square$

Теперь мы легко завершим доказательства теорем 1, 2. Рассмотрим конечные множества

$$A_k = \{5, 7, \ldots, 2k - 1\}, \quad k = 3, 4, \ldots.$$

Очевидно, $A_3 \subset A_4 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$. Согласно лемме 4 мы имеем бесконечную строго возрастающую цепочку

$$P(A_3) < P(A_4) < \ldots < P(A_k) < \ldots$$

смешанных нормальных в группе G подгрупп.

Если $B_k = E \setminus A_k$, $k = 3, 4, \ldots$, то $B_3 \supset B_4 \supset \ldots \supset B_k \supset \ldots$ и по лемме 4

$$P(B_3) \supset P(B_4) \supset \ldots \supset P(B_k) \supset \ldots \text{ —}$$

бесконечнаая строго убывающая цепочка смешанных нормальных в группе G подгрупп. Теорема 1 доказана.

Поскольку множество всех подмножеств счётного множества E континуально, то снова по лемме 4 таковым является и множество

$$\{P(A) \mid \varnothing \neq A \subseteq E\},$$

состоящее из смешанных нормальных в группе G подгрупп. Теорема доказана.

References

[1] N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *On groups of limited permutations*, Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, **3** : 2 (2010), 262–266.

[2] N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *On normal subgroups of limited permutation groups*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 344–353. MR3493735.

[3] N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *On locally finite radical of the group of limited permutations*, Trudy Inst. Math. Mekh. UrO RAN, **22** : 3 (2016), 259–264. MR3555731.

[4] N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *Normal closures of elements in group $Lim(N)$*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 158–164.

[5] A.I. Sozutov, N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *On subgroups of group $Lim(N)$*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 208–217.

Anatoly Ilyich Sozutov
Siberian Federal University
pr. Svobodny, 79
660041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: sozutov_ai@mail.ru

Nikolai Mihailovich Suchkov
Siberian Federal University
pr. Svobodny, 79
660041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: ns7654321@mail.ru

Nadezhda Georgievna Suchkova
Siberian Federal University
pr. Svobodny, 79
660041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: ns7654321@mail.ru