S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1571–1579 (2020) УДК 512.554.5
DOI 10.33048/semi.2020.17.109 MSC 17A70,17D15

ОБ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ ВЕДДЕРБЕРНА ДЛЯ ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫХ СУПЕРАЛГЕБР ЕМКОСТИ 1

О.В. ШАШКОВ

Abstract. The Wedderburn's principal theorem is proved for finite dimensional right alternative superalgebras under the following restrictions:

1) the even part is representable as the sum of a simple noncommutative subalgebra and radical;

2) the superalgebra is an alternative bimodule over its even part.

Keywords: right alternative superalgebra, nilpotent radical.

Напомним, что *супералгеброй* $A = A_0 \oplus A_1$ называется $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное многообразие алгебр, $G = G_0 \oplus G_1$ — ассоциативная алгебра Грассмана с единицей 1 и стандартной градуировкой; супералгебра $A = A_0 \oplus A_1$ называется $\mathfrak{M}$-супералгеброй, если ее грассманова оболочка $G(A) = A_0 \otimes G_0 \oplus A_1 \otimes G_1$ является $\mathfrak{M}$-алгеброй [1].

Простые конечномерные ассоциативные супералгебры описаны в [2]. Простые альтернативные супералгебры и простые $(-1,1)$-супералгебры по модулю ассоциативных супералгебр описаны в работах [3] и [4].

Алгебра называется *правоальтернативной* [5], если она удовлетворяет тождеству

$$(a, b, b) = 0,$$

где $(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$ — ассоциатор элементов a, b, c.

Супералгебра $B = A \oplus M$ является *правоальтернативной* тогда и только тогда, когда для однородных элементов выполнено супертождество:

$$(p, q, r) + (-1)^{|q|\cdot|r|}(p, r, q) = 0,$$

где $|q|$ — чётность элемента $q \in A \cup M$, то есть $|q| = 0$, если $q \in A$ и $|q| = 1$, если $q \in M$.

Shashkov, O.V., On the Wedderburn's principal theorem in right alternative superalgebras of capacity 1.

Поступила 8 декабря 2019 г., опубликована 29 сентября 2020 г.

В работе рассматриваются только правоальтернативные унитальные супералгебры (супералгебры с единицей 1).

Четная часть супералгебры называется *сильно альтернативной* (*сильно ассоциативной*), если супералгебра является альтернативным (ассоциативным) бимодулем над своей четной частью. В [6] описано строение конечномерных унитальных супералгебр с полупростой сильно альтернативной четной частью. Простые правоальтернативные унитальные супералгебры с сильно ассоциативной чётной частью ранее изучались в работах [7]–[10]. Так, в [7] были классифицированы конечномерные супералгебры абелева типа; в [8] изучались простые супералгебры абелева типа произвольной размерности, четная часть которых является полем (некоторым расширением основного поля); в [9] доказано, что простые конечномерные супералгебры с полупростой сильно ассоциативной четной частью исчерпываются ассоциативными супералгебрами и супералгебрами абелева типа; в [10] доказано, что в простой конечномерной супералгебре над полем нулевой характеристики четная часть полупроста при условии ее сильной ассоциативности.

В работах [11] и [12] были описаны простые супералгебры с ниль-унитальной и ассоциативно-коммутативной четной частью без каких-либо бимодульных ограничений.

Супералгебра $B = A \oplus M$ *имеет емкость* 1, если факторалгебра четной части A по ее ниль-радикалу $\mathfrak{R} = \operatorname{Nil} A$ является простой алгеброй S. При этом алгебру S будем называть *простой компонентой четной части*, если $A = S \oplus \mathfrak{R}$.

В [13] изучалось строение правоальтернативных унитальных супералгебр $B = A \oplus M$ емкости 1. Простая компонента S конечномерной четной части $A = S \oplus \mathfrak{R}$ предполагалась некоммутативной. Там было доказано, что такая супералгебра B над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики не 2 разлагается в прямую сумму $B = \check{B} \oplus \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{M}$ — градуированный идеал супералгебры с четной частью $\mathfrak{R}$ и нечетной — $\mathfrak{M}$, а $\check{B}$ — простая альтернативная супералгебра, в частности простая алгебра, являющаяся супералгеброй с нулевой четной частью.

Данная работа является продолжением [13] и посвящена доказательству лишь того, что отщепленный в [13] идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен:

Теорема. *Пусть $B = A \oplus M$ — правоальтернативная супералгебра с сильно альтернативной четной частью ёмкости 1 над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики не 2; S — простая конечномерная некоммутативная компонента алгебры A, причем единица алгебры S является единицей в B; B — альтернативный унитальный бимодуль над A. Тогда $B = \check{B} \oplus \mathfrak{B}$, где $\check{B}$ — простая супералгебра, а $\mathfrak{B}$ — нильпотентный градуированный идеал супералгебры B.*

Напомним определения *простого ассоциативного дубля Уолла* $\mathrm{M}_n[\sqrt{1}]$ и *простой альтернативной супералгебры Шестакова* $\mathrm{S}_{4|2}$:

1. $\mathrm{M}_n[\sqrt{1}] = \mathrm{M}_n \oplus \mathrm{M}_n u$, где $u = \sqrt{1}$, т.е. $u^2 = 1$, и элемент u перестановочен с элементами из M_n.

2. Пусть $\operatorname{char}\Phi = 3$, $\mathrm{S}_{4|2} = A \oplus M$ — супералгебра над Φ, $A = \mathrm{M}_2$, $M = \mathrm{C}_2 = \Phi m_1 + \Phi m_2$ — стандартный бимодуль Кэли с базисом m_1, m_2 и действием

$$\bar{e}_{ij} m_k = m_k e_{ij} = \delta_{kj} m_i,$$

где $\bar{e}_{11} = e_{22}$, $\bar{e}_{22} = e_{11}$, $\bar{e}_{12} = -e_{12}$, $\bar{e}_{21} = -e_{21}$; δ_{kj} — символ Кронекера.

Умножение на M определено равенствами

$$\overline{m}_i m_j = e_{ji},$$

где $\overline{m}_1 = m_2$, $\overline{m}_2 = -m_1$.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы напомним некоторые хорошо известные факты. Если A — конечномерная альтернативная алгебра, то A содержит единственный максимальный нильпотентный идеал $\mathfrak{R}$ (ниль-радикал алгебры A) и алгебра A является прямой суммой простых алгебр и радикала $\mathfrak{R}$; всякая простая альтернативная алгебра либо ассоциативна, либо является алгеброй Кэли над своим центром [14, 15, 16]. Простая конечномерная правоальтернативная алгебра альтернативна [5].

Над алгебраически замкнутым полем Φ возможны следующие 3 случая для простой некоммутативной компоненты S:

1) $S = \mathrm{M}_n$ $(n \geq 3)$;

2) $S = \mathrm{C}$;

3) $S = \mathrm{H}$,

где H, C — расщепляемые композиционные алгебры размерности 4 и 8. Доказательство теоремы разобьем на три предложения в соответствии с указанными случаями.

Предложение 1. *Если S-бимодуль B ассоциативен, то идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен.*

Доказательство. Пусть S-бимодуль B ассоциативен. Поскольку по [17, теорема 18.1] унитальный альтернативный C-бимодуль B является прямой суммой регулярных C-бимодулей, то S не может быть алгеброй Кэли C, а значит, $S = \mathrm{M}_n$ при $n \geq 2$. Тогда по [13, Лемма 1.7] супералгебра B ассоциативна и по [13, Предложения 2, 3] представляется в виде $B = \check{B} + \mathfrak{B}$, где $\check{B}$ — простая супералгебра $\mathrm{M}_n[\sqrt{1}]$ или простая алгебра M_n, а $\mathfrak{B} = \mathfrak{R} + \mathfrak{M}$ — градуированный идеал B с четной частью $\mathfrak{R}$ и нечетной $\mathfrak{M}$. Следовательно, в этом случае $\mathfrak{M}^2 \subseteq \mathfrak{R}$.

Докажем, что идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен. Пусть ρ — индекс нильпотентности радикала $\mathfrak{R}$. Рассмотрим произведение $\rho' = 2\rho^2 - 2\rho + 1 = (\rho - 1)2\rho + 1$ однородных элементов идеала $\mathfrak{B}$. Если в этом произведении встретились ρ четных элементов, идущих подряд, то оно равно нулю. Значит, можно считать, что ρ четных элементов не идут подряд. Откуда следует, что в произведении найдется хотя бы 2ρ нечетных элементов.

Так как произведение четного и нечетного элемента — нечетный элемент, то данное произведение совпадает с произведением не менее 2ρ нечетных элементов. А так как произведение двух нечетных элементов является четным, то и в этом случае мы получаем, что оно равно нулю. $\square$

В следующем предложении рассмотрим случай $S = \mathrm{C}$, где C — расщепляемая алгебра Кэли. Напомним таблицу умножения в алгебре $\mathrm{C} = \mathrm{H} \oplus v\mathrm{H}$:

$$v^2 = 1, \qquad \bar{v} = -v, \qquad av = v\bar{a},$$
$$a \cdot vb = v \cdot \bar{a}b, \quad vb \cdot a = v \cdot ab, \quad va \cdot vb = b\bar{a},$$

где $1 = e_{11} + e_{22}$ — единица алгебры C, H — алгебра матриц 2-го порядка, $a, b \in \mathrm{H}$, e_{ij} — матричные единицы H.

Предложение 2. *Если $S = \mathrm{C}$, то идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен.*

Доказательство. По [13] идеал $\mathfrak{B}$ является прямой суммой неприводимых регулярных C-бимодулей $[\mathrm{C}]_i$
$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{i=1}^{t} [\mathrm{C}]_i,$$
каждый из которых — линейная копия алгебры Кэли C. Элемент бимодуля $[\mathrm{C}]_i$, соответствующий $a \in \mathrm{C}$ обозначается $[a]_i$.

С этой прямой суммой связан набор невырожденных линейных отображений $\mathfrak{c}_i \colon \mathrm{C} \to [\mathrm{C}]_i \colon a \mapsto [a]_i$. Тогда $a^{\mathfrak{c}_i} = [a]_i$. Пусть $\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^t \beta_i \mathfrak{c}_i$ — линейная комбинация $\mathfrak{c}_i$. Тогда $a^{\mathfrak{b}} = \sum_{i=1}^t \beta_i a^{\mathfrak{c}_i} = \sum_{i=1}^t \beta_i [a]_i$. В дальнейшем мы будем рассматривать только однородные линейные комбинации $\mathfrak{b}$, то есть такие, что все элементы $\mathfrak{c}_i$ линейной комбинации имеют одну четность. Четность однородного элемента $a^{\mathfrak{b}}$ обозначим $|\mathfrak{b}|$, то есть $|\mathfrak{b}| = 0$, если $a^{\mathfrak{b}} \in A$ и $|\mathfrak{b}| = 1$, если $a^{\mathfrak{b}} \in M$.

В [13, лемма 3.5] доказано, что для произвольных комбинаций $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ имеется такая комбинация $\mathfrak{ab}$, что для любых $a, b \in \mathrm{C}$ выполнено
$$a^{\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{b}} = (ab)^{\mathfrak{ab}}. \tag{$*$}$$

Пусть ρ — индекс нильпотентности радикала $\mathfrak{R}$, $\rho' = 2\rho^2 - 2\rho + 1$ как и в предложении 1. Рассмотрим w — произведение $2\rho'$ элементов идеала $\mathfrak{B}$. Так как элементы $e_{ij}^{\mathfrak{c}_k}$ и $(ve_{ij})^{\mathfrak{c}_k}$ при $k = \overline{1, t}$, $i, j \in \{1, 2\}$ образуют базис идеала $\mathfrak{B}$, то можно считать, что в рассматриваемом произведении все сомножители — базисные элементы. В этом случае по $(*)$ имеется такая комбинация $\mathfrak{d}$, что $w = a^{\mathfrak{d}}$, где либо $a = e_{ij}$, либо $a = ve_{ij}$.

Пусть w имеет вид $e_{11}^{\mathfrak{d}}$. Если $ab = e_{11}$, то по $(*)$ $a^{\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{b}} = e_{11}^{\mathfrak{ab}} = e_{11}^{\mathfrak{a}} e_{11}^{\mathfrak{b}}$, поэтому можно считать, что все сомножители в w имеют вид $e_{11}^{\mathfrak{c}_i}$. В этом случае произведение w ассоциативно. В самом деле, по $(*)$ и правой альтернативности имеем
$$\begin{aligned} e_{11}^{\mathfrak{a}} e_{11}^{\mathfrak{b}} \cdot e_{11}^{\mathfrak{c}} &= e_{12}^{\mathfrak{a}} e_{22}^{\mathfrak{b}} \cdot e_{21}^{\mathfrak{c}} = \\ &= e_{12}^{\mathfrak{a}} \cdot e_{22}^{\mathfrak{b}} e_{21}^{\mathfrak{c}} - (-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|} (e_{12}^{\mathfrak{a}} e_{21}^{\mathfrak{c}} \cdot e_{22}^{\mathfrak{b}} - e_{12}^{\mathfrak{a}} \cdot e_{21}^{\mathfrak{c}} e_{22}^{\mathfrak{b}}) = \\ &= e_{12}^{\mathfrak{a}} \cdot e_{22}^{\mathfrak{b}} e_{21}^{\mathfrak{c}} = e_{11}^{\mathfrak{a}} \cdot e_{11}^{\mathfrak{b}} e_{11}^{\mathfrak{c}}. \end{aligned}$$
Так как произведение w ассоциативно, то на основании рассуждений предложения 1 заключаем, что $e_{11}^{\mathfrak{d}} = 0$. Из регулярности C-бимодулей $[\mathrm{C}]_k$ следует, что
$$w = e_{ij}^{\mathfrak{d}} = e_{i1}^{\mathfrak{d}} e_{1j} = e_{i1} e_{11}^{\mathfrak{d}} \cdot e_{1j} = 0.$$
Отсюда получаем, что $(ve_{ij})^{\mathfrak{d}} = ve_{ij}^{\mathfrak{d}} = 0$. Таким образом, в каждом из случаев $w = 0$. □

Для доказательства теоремы осталось рассмотреть случай $S = \mathrm{H}$. Так же, как в [13] в этом случае представим идеал $\mathfrak{B}$ в виде суммы неприводимых H-бимодулей $[\mathrm{H}]_i$ и $[\mathrm{C}_2]_j$:
$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{i=1}^{t'} [\mathrm{H}]_i \oplus \bigoplus_{i=t'+1}^{t} [\mathrm{C}_2]_i,$$
где $[\mathrm{H}]_i$ — регулярные ассоциативные бимодули, их элементы обозначаются $[a]_i$ для $a \in \mathrm{H}$; $[\mathrm{C}_2]_j$ — стандартные бимодули Кэли, их элементы обозначаются $[c]_j$

для $c \in \mathrm{C}_2$. Обозначим через $\mathfrak{B}_a$ сумму регулярных ассоциативных бимодулей $[\mathrm{H}]_i$, а через $\mathfrak{B}_c$ — бимодулей Кэли $[\mathrm{C}_2]_j$. То есть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_a + \mathfrak{B}_c$.

С рассмотренным разложением $\mathfrak{B}$ в сумму неприводимых бимодулей связан набор невырожденных линейных отображений $\mathfrak{h}_i \colon \mathrm{H} \to [\mathrm{H}]_i \colon a \mapsto [a]_i$ и $\mathfrak{c}_i \colon \mathrm{C}_2 \to [\mathrm{C}_2]_i \colon c \mapsto [c]_i$. Можно считать, что $\mathrm{C}_2^{\mathfrak{h}_i} = \mathrm{H}^{\mathfrak{c}_j} = 0$.

Рассмотрим линейные комбинации $\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{t'} \beta_i \mathfrak{h}_i$ и $\mathfrak{c} = \sum_{i=t'+1}^{t} \gamma_i \mathfrak{c}_i$. Как и ранее, $a^{\mathfrak{b}} = \sum_{i=1}^{t'} \beta_i [a]_i$ для элемента $a \in \mathrm{H}$; $c^{\mathfrak{c}} = \sum_{i=t'+1}^{t} \gamma_i [c]_i$ для $c \in \mathrm{C}_2$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только однородные линейные комбинации, то есть такие, что берутся только по четным или только по нечетным компонентам. Четность однородного элемента $a^{\mathfrak{b}}$ обозначим $|\mathfrak{b}|$, то есть $|\mathfrak{b}| = 0$, если $a^{\mathfrak{b}} \in A$ и $|\mathfrak{b}| = 1$, если $a^{\mathfrak{b}} \in M$.

Два элемента x и y из $\mathfrak{B}$ назовем *однотипными* ($x \sim y$), если они лежат в одном неприводимом H-бимодуле, то есть если один может быть получен из другого цепочкой умножений на элементы из H.

Введем умножение элементов бимодуля Кэли C_2 подобно тому, как это делалось в супералгебре Шестакова $\mathrm{S}_{4|2}$. А именно:

$$\overline{m}_i m_j = e_{ji},$$

где

$$\overline{m}_1 = m_2, \qquad \overline{m}_2 = -m_1.$$

Тем самым могут быть вычислены произведения любых элементов из C_2, например, $m_1 m_2 = -\overline{m}_2 m_2 = -e_{22}$ или $m_1 m_1 = -\overline{m}_2 m_1 = -e_{12}$.

В следующей лемме перечислим свойства умножения элементов бимодулей, доказанные в [13].

Лемма 1. *Выполнены свойства:*
а) $m_i^{\mathfrak{a}} e_{jk}^{\mathfrak{b}} = (-1)^{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|} \overline{e}_{jk}^{\mathfrak{b}} m_i^{\mathfrak{a}} = (m_i e_{jk})^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$;
б) $m_i^{\mathfrak{a}} m_j^{\mathfrak{b}} = -(-1)^{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|} m_i^{\mathfrak{b}} m_j^{\mathfrak{a}} = (m_i m_j)^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$;
в) $e_{ij}^{\mathfrak{a}} e_{kl}^{\mathfrak{b}} = (e_{ij} e_{kl})^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$.

В этой лемме через $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ обозначается некоторая новая линейная комбинация отображений $\mathfrak{h}_i$ или $\mathfrak{c}_j$, определяемая комбинациями $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

Заметим, что пункт а) леммы при $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = 1$ доказан в [13, лемма 1.1]; при $|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| = 1$ доказан в [13, леммы 1.2, 1.3]; а при $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = 0$ может быть доказан полностью аналогично [13, лемма 1.2]. Пункт б) леммы при $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = 1$ доказан в [13, лемма 1.5]; при $|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| = 1$ доказан в [13, лемма 1.4]; а при $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = 0$ может быть доказан полностью аналогично. Пункт в) леммы доказан в [13, лемма 1.6].

Лемма 2. *Если $x, y \in \mathfrak{B}_a$, $z \in \mathfrak{B}_c$, то $xy \cdot z = (-1)^{|y| \cdot |z|} xz \cdot \overline{y}$.*

Доказательство. По лемме 1 произведение $e_{ij}^{\mathfrak{a}} e_{jk}^{\mathfrak{b}} \cdot m_1^{\mathfrak{c}} = e_{ik}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} m_1^{\mathfrak{c}}$ может быть ненулевым только в двух случаях: $e_{22}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} m_1^{\mathfrak{c}}$ и $e_{21}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} m_1^{\mathfrak{c}}$.

Первый случай возможен в двух вариантах, которые мы и рассмотрим.

По правой альтернативности имеем

$$e_{21}^{\mathfrak{a}} e_{12}^{\mathfrak{b}} \cdot m_1^{\mathfrak{c}} = -(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|} e_{21}^{\mathfrak{a}} m_1^{\mathfrak{c}} \cdot e_{12}^{\mathfrak{b}} + e_{21}^{\mathfrak{a}} (e_{12}^{\mathfrak{b}} \circ m_1^{\mathfrak{c}}),$$

где $p \circ q = pq + (-1)^{|p||q|} qp$ для однородных элементов p, q идеала $\mathfrak{B}$. Тогда по лемме 1 а)

$$e_{12}^{\mathfrak{b}} \circ m_1^{\mathfrak{c}} = e_{12}^{\mathfrak{b}} m_1^{\mathfrak{c}} + \overline{e}_{12}^{\mathfrak{b}} m_1^{\mathfrak{c}} = e_{12}^{\mathfrak{b}} m_1^{\mathfrak{c}} - e_{12}^{\mathfrak{b}} m_1^{\mathfrak{c}} = 0.$$

То есть
$$e_{21}^{\mathfrak{a}}e_{12}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}=-(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{21}^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot e_{12}^{\mathfrak{b}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{21}^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot \overline{e}_{12}^{\mathfrak{b}}.$$

Далее,
$$\begin{aligned}e_{22}^{\mathfrak{a}}e_{22}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}&=e_{21}^{\mathfrak{a}}e_{12}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{21}^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot\overline{e}_{12}^{\mathfrak{b}}=\\&=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{c}}\overline{e}_{21}^{\mathfrak{a}}\cdot\overline{e}_{12}^{\mathfrak{b}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{c}}e_{21}^{\mathfrak{a}}\cdot e_{12}^{\mathfrak{b}}=\\&=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|}m_2^{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}e_{12}^{\mathfrak{b}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}e_{11}^{\mathfrak{b}}=\\&=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{c}}e_{11}^{\mathfrak{a}}\cdot e_{11}^{\mathfrak{b}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{22}^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot e_{11}^{\mathfrak{b}}=\\&=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{22}^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot\overline{e}_{22}^{\mathfrak{b}}.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй случай: $e_{22}^{\mathfrak{a}}e_{21}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}$. Аналогично рассуждениям первого случая, имеем $e_{21}^{\mathfrak{b}}\circ m_1^{\mathfrak{c}}=0$, то есть
$$e_{22}^{\mathfrak{a}}e_{21}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{22}^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot\overline{e}_{21}^{\mathfrak{b}}.$$

Далее,
$$\begin{aligned}e_{21}^{\mathfrak{a}}e_{11}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}&=e_{22}^{\mathfrak{a}}e_{21}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{22}^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot\overline{e}_{21}^{\mathfrak{b}}=\\&=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{c}}e_{11}^{\mathfrak{a}}\cdot\overline{e}_{21}^{\mathfrak{b}}=-(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{c}}e_{11}^{\mathfrak{a}}\cdot e_{21}^{\mathfrak{b}}=\\&=-(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{c}}e_{21}^{\mathfrak{a}}\cdot e_{22}^{\mathfrak{b}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{21}^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot e_{22}^{\mathfrak{b}}=\\&=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{21}^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot e_{22}^{\mathfrak{b}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{21}^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot\overline{e}_{11}^{\mathfrak{b}}.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Если $x,z\in\mathfrak{B}_c$, $y\in\mathfrak{B}_a$, то $xy\cdot z=(-1)^{|y|\cdot|z|}xz\cdot\overline{y}$.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $m_1^{\mathfrak{a}}e_{21}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}$. В лемме 2 было доказано, что $e_{21}^{\mathfrak{b}}\circ m_1^{\mathfrak{c}}=0$. Значит, по правой альтернативности имеем
$$m_1^{\mathfrak{a}}e_{21}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}=-(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot e_{21}^{\mathfrak{b}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot\overline{e}_{21}^{\mathfrak{b}}.$$

Далее,
$$\begin{aligned}m_2^{\mathfrak{a}}e_{22}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}&=m_1^{\mathfrak{a}}e_{21}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot\overline{e}_{21}^{\mathfrak{b}}=\\&=-(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot e_{21}^{\mathfrak{b}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}\overline{m}_2^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot e_{21}^{\mathfrak{b}}=\\&=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{12}^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}e_{21}^{\mathfrak{b}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{11}^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}e_{11}^{\mathfrak{b}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}\overline{m}_1^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot\overline{e}_{22}^{\mathfrak{b}}=\\&=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}m_2^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot\overline{e}_{22}^{\mathfrak{b}}.\end{aligned}$$

Рассмотрим второй случай:
$$m_2^{\mathfrak{a}}e_{12}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}=-(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}m_2^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot e_{12}^{\mathfrak{b}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}m_2^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot\overline{e}_{12}^{\mathfrak{b}}.$$

Далее,
$$\begin{aligned}m_1^{\mathfrak{a}}e_{11}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}&=m_2^{\mathfrak{a}}e_{12}^{\mathfrak{b}}\cdot m_1^{\mathfrak{c}}=-(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}m_2^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot e_{12}^{\mathfrak{b}}=\\&=-(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{11}^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}e_{12}^{\mathfrak{b}}=-(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}e_{12}^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}e_{22}^{\mathfrak{b}}=\\&=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot e_{22}^{\mathfrak{b}}=(-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}m_1^{\mathfrak{a}}m_1^{\mathfrak{c}}\cdot\overline{e}_{11}^{\mathfrak{b}}.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Для всяких элементов $x\in\mathfrak{B}_a$, $y,z\in\mathfrak{B}_c$ имеются такие элементы $\tilde{x}\sim x$, $\tilde{y}\sim y$ и $\tilde{z}\sim z$, что $x\cdot yz=\tilde{y}\tilde{z}\cdot\tilde{x}$.*

Доказательство. Рассмотрим произведение
$$e_{12}^{\mathfrak{a}} \cdot m_1^{\mathfrak{b}} m_2^{\mathfrak{c}} = -e_{12}^{\mathfrak{a}} \cdot \overline{m}_2^{\mathfrak{b}} m_2^{\mathfrak{c}} = -e_{12}^{\mathfrak{a}} e_{22}^{\mathfrak{bc}}.$$
Так как
$$e_{12}^{\mathfrak{a}} \cdot m_2^{\mathfrak{c}} m_1^{\mathfrak{b}} = e_{12}^{\mathfrak{a}} \cdot \overline{m}_1^{\mathfrak{c}} m_1^{\mathfrak{b}} = e_{12}^{\mathfrak{a}} e_{11}^{\mathfrak{cb}} = 0,$$
то
$$\begin{aligned} e_{12}^{\mathfrak{a}} \cdot m_1^{\mathfrak{b}} m_2^{\mathfrak{c}} = e_{12}^{\mathfrak{a}}(m_1^{\mathfrak{b}} \circ m_2^{\mathfrak{c}}) = e_{12}^{\mathfrak{a}} m_1^{\mathfrak{b}} \cdot m_2^{\mathfrak{c}} + (-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|} e_{12}^{\mathfrak{a}} m_2^{\mathfrak{c}} \cdot m_1^{\mathfrak{b}} = \\ = (-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|} e_{12}^{\mathfrak{a}} m_2^{\mathfrak{c}} \cdot m_1^{\mathfrak{b}} =_{\text{л. } 1} (-1)^{|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|} m_2^{\mathfrak{c}} \overline{e}_{12}^{\mathfrak{a}} \cdot m_1^{\mathfrak{b}} =_{\text{л. } 3} \\ = (-1)^{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|} m_2^{\mathfrak{c}} m_1^{\mathfrak{b}} \cdot e_{12}^{\mathfrak{a}} =_{\text{л. } 1} -(-1)^{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|} m_2^{\mathfrak{b}} m_1^{\mathfrak{c}} \cdot e_{12}^{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$
Что и требовалось в этом случае.

Далее, отсюда следует, что
$$\begin{aligned} -e_{12}^{\mathfrak{a}} e_{22}^{\mathfrak{bc}} = -(-1)^{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|} m_2^{\mathfrak{b}} m_1^{\mathfrak{c}} \cdot e_{12}^{\mathfrak{a}} = \\ = -(-1)^{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|} \overline{m}_1^{\mathfrak{b}} m_1^{\mathfrak{c}} \cdot e_{12}^{\mathfrak{a}} = -(-1)^{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|} e_{11}^{\mathfrak{bc}} e_{12}^{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$
Таким образом, по лемме 1 в) заключаем, что для любых $a, b \in \mathrm{H}$ выполнено
$$a^{\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{bc}} = (-1)^{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|} a^{\mathfrak{bc}} b^{\mathfrak{a}},$$
если $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ — линейные комбинации $\mathfrak{c}_i$.

Из полученного равенства легко следуют остальные случаи. Например,
$$e_{11}^{\mathfrak{a}} \cdot m_2^{\mathfrak{b}} m_1^{\mathfrak{c}} = e_{11}^{\mathfrak{a}} e_{11}^{\mathfrak{bc}} = (-1)^{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|} e_{11}^{\mathfrak{bc}} e_{11}^{\mathfrak{a}} = (-1)^{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|} m_2^{\mathfrak{b}} m_1^{\mathfrak{c}} \cdot e_{11}^{\mathfrak{a}}.$$
Лемма доказана. □

Предложение 3. *Если $S = \mathrm{H}$, то идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен.*

Доказательство. Рассмотрим w — произведение 2^N однородных элементов идеала $\mathfrak{B}$. Так как произведение однородных элементов является однородным, то имеется представление
$$w = w_1 T_{w_2} T_{w_3} \cdots T_{w_N},$$
где w_i — однородные элементы из $\mathfrak{B}$, $T_a \in \{R_a, L_a\}$, R_a и L_a — операторы правого и левого умножения: $xR_a = xa$, $xL_a = ax$.

Можно считать, что $w_1 \in \mathfrak{B}_c$. В самом деле, если $w_i \in \mathfrak{B}_a$ при $i = \overline{1, \rho'}$, где $\rho' = 2\rho^2 - 2\rho + 1$, ρ — индекс нильпотентности радикала $\mathfrak{R}$, то $w = 0$. Поэтому, если $w \neq 0$, то найдется $w_j \in \mathfrak{B}_c$ при $j \leq \rho'$. Пусть j — минимальный индекс с таким свойством, тогда в силу ассоциативности $\mathfrak{B}_a$ после некоторой перенумерации индексов $i = \overline{1, j-1}$ имеем
$$w = w_1 R_{w_2} \cdots R_{w_{j-1}} T_{w_j} \cdots T_{w_N}.$$
Если $T_{w_j} = L_{w_j}$, то по лемме 1 а)
$$w = \tilde{w}_1 R_{\tilde{w}_2} \cdots R_{\tilde{w}_{j-1}} R_{w_j} \cdots T_{w_N}$$
для некоторых элементов $\tilde{w}_i \sim w_i$ того же типа, и можно считать, что $T_{w_j} = R_{w_j}$.

Если $T_{w_j} = R_{w_j}$, то, последовательно применяя лемму 2, получаем, что
$$w = (-1)^{(|w_2|+|w_3|+\cdots+|w_{j-1}|)|w_j|} w_1 R_{w_j} R_{\overline{w_2}} \cdots R_{\overline{w_{j-1}}} T_{w_{j+1}} \cdots T_{w_N}.$$
Далее, применяя лемму 1 а), получим, что
$$w = (-1)^{(|w_1|+|w_2|+\cdots+|w_{j-1}|)|w_j|} w_j R_{\overline{w_1}} \cdots R_{\overline{w_{j-1}}} T_{w_{j+1}} \cdots T_{w_N}.$$

Итак, можно считать, что

$$w = w_1 R_{w_2} \cdots R_{w_{l-1}} L_{w_l} T_{w_{l+1}} \cdots T_{w_N},$$

где $w_1 \in \mathfrak{B}_c$. Заметим, что по леммам 1 а), 2 и 3 элементы w_i при $i = \overline{1, l-1}$ в этой цепочке перестановочны с заменой на однотипные элементы.

Очевидно, что при замене элементов w_i $(i = \overline{1, l})$ на однотипные оператор L_{w_l} может быть заменен на R_{w_l}. Если $w_l \in \mathfrak{B}_c$, то это следует из леммы 1 а), б). Если же $w_l \in \mathfrak{B}_a$, то из леммы 4.

Таким образом, двигаясь по цепочке слева направо, можно последовательно преобразовать все операторы левого умножения в операторы правого и получить цепочку $w = w_1 R_{w_2} \cdots R_{w_N}$. Причем, по леммам 1 а), 2 и 3 все элементы w_i в цепочке перестановочны с заменой на элементы того же типа. Поэтому, если среди w_i элементов из $\mathfrak{B}_a$ много (больше ρ'), то можно считать, что они стоят первыми, а тогда их произведение равно 0. Если же их мало, то много (т.е. больше, чем $2\rho'$) элементов из $\mathfrak{B}_c$. Тогда, уменьшая количество элементов из $\mathfrak{B}_c$ на 2, увеличиваем количество элементов из $\mathfrak{B}_a$ на 1 следующим образом. Переставляем w_i так, чтобы $w_1, w_2 \in \mathfrak{B}_c$. По лемме 1 б) произведение $w_1 R_{w_2} = w_1 w_2 \in \mathfrak{B}_a$. Вводим замену

$$w_1 w_2 \mapsto w_1, w_3 \mapsto w_2, \ldots, w_N \mapsto w_{N-1}.$$

Применяя эту операцию несколько раз, мы увеличим количество $w_i \in \mathfrak{B}_a$ до ρ' и получим, что $w = 0$. Предложение доказано. $\square$

Этим предложением заканчивается доказательство теоремы.

В заключение приведем пример, показывающий существование супералгебр B с максимальным нильпотентным отщепляемым идеалом $\mathfrak{B}$. Пусть $B = A \oplus M$ — супералгебра с четной частью $A = [\mathrm{H}]_1 \oplus [\mathrm{H}]_2$ и нечетной $M = [\mathrm{C}_2]_3 \oplus [\mathrm{C}_2]_4$; характеристика B равна 3. Ненулевое умножение базисных элементов в B зададим по правилам, описанным в лемме 1:

$$\begin{array}{ll}
[e_{ij}]_1[e_{jk}]_n = [e_{ij}]_n[e_{jk}]_1 = [e_{ik}]_n & (n \in \{1,2\}), \\
[\bar{e}_{ij}]_1[m_j]_n = [m_j]_n[e_{ij}]_1 = [m_i]_n & (n \in \{3,4\}), \\
[m_i]_3[m_j]_3 = [m_i m_j]_1, & \\
[m_j]_3[e_{ij}]_2 = [\bar{e}_{ij}]_3[m_j]_2 = [m_i]_4, & \\
[m_i]_3[m_j]_4 = [m_i]_4[m_j]_3 = [m_i m_j]_2. &
\end{array}$$

Можно проверить, что такая супералгебра B является унитальной правоальтернативной супералгеброй емкости 1. В наших обозначениях $S = [\mathrm{H}]_1$, $\mathfrak{R} = [\mathrm{H}]_2$, $\check{B} = \mathrm{S}_{4|2} = [\mathrm{H}]_1 + [\mathrm{C}_2]_3$, $\mathfrak{B} = [\mathrm{H}]_2 \oplus [\mathrm{C}_2]_4$. Заметим, что идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен индекса 2, а сама супералгебра B — альтернативна.

Точно также могут быть построены аналогичные примеры для других простых компонент $\check{B}$ и нильпольтеного идеала $\mathfrak{B}$ индекса 2. Все построенные примеры являются альтернативными супералгебрами. Нам не известно существует ли пример не альтернативной супералгебры с сильно альтернативной четной частью емкости 1.

References

[1] E.I. Zel'manov, I.P. Shestakov, *Prime alternative superalgebras and the nilpotence of the radical of a free alternative algebra*, Izv. AN SSSR, Ser. Mat., **54**:4 (1990), 676–693. Zbl 0713.17020

[2] C.T.C. Wall, *Graded Brauer groups*, J. Reine Angew. Math, **213** (1964), 187–199. Zbl 0125.01904

[3] I.P. Shestakov, *Prime alternative superalgebras of arbitrary characteristic*, Algebra Logic, **36**:6 (1997), 389–412. Zbl 0904.17025

[4] I.P. Shestakov, *Simple* $(-1,1)$*-superalgebras*, Algebra Logic, **37**:6 (1998), 411–422. Zbl 0913.17003

[5] A.A. Albert, *On right alternative algebras*, Ann. Math., **50**:2 (1949), 318–328. Zbl 0033.15501

[6] L.S.I. Murakami, S.V. Pchelintsev, O.V. Shashkov, *Finite-dimensional right alternative superalgebras with a semisimple strongly alternative even part*, J. Algebra, **528** (2019), 150–176. Zbl 1419.17040

[7] S.V. Pchelintsev, O.V, Shashkov, *Simple finite-dimensional right-alternative superalgebras of abelian type of characteristic zero*, Izv. Math., **79**:3 (2015), 554–580. Zbl 1384.17004

[8] S.V. Pchelintsev, O.V, Shashkov, *Simple right alternative superalgebras of abelian type whose even part is a field*, Izv. Math., **80**:6 (2016), 1231–1241. Zbl 1407.17039

[9] S.V. Pchelintsev, O.V, Shashkov, *Simple finite-dimensional right-alternative superalgebras with semisimple strongly associative even part*, Sb. Math., **208**:2 (2017), 223–236. Zbl 1419.17041

[10] S.V. Pchelintsev, O.V, Shashkov, *Simple finite-dimensional right-alternative unital superalgebras with strongly associative even part*, Sb. Math., **208**:4 (2017), 531–545. Zbl 1419.17042

[11] S.V. Pchelintsev, O.V, Shashkov, *Simple finite-dimensional right alternative superalgebras with unitary even part over a field of characteristic 0*, Math. Notes, **100**:4 (2016), 589–596. Zbl 1407.17040

[12] S.V. Pchelintsev, O.V, Shashkov, *Simple finite-dimensional right-alternative unital superalgebras with associative-commutative even part over a field of characteristic zero*, Izv. Math., **82**:3 (2018), 578–595. Zbl 1419.17043

[13] O.V, Shashkov, *Right alternative superalgebras of capacity 1 with a strongly alternative even part*, Algebra Logic, (in press).

[14] R.D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Pure and applied mathematics, **22**, Academic Press, New York and London, 1966. Zbl 0145.25601

[15] M. Zorn, *Alternative rings and related questions i: existence of the radical*, Ann. Math., **42**:2 (1941), 676–686. Zbl 0025.30203

[16] M. Zorn, *Theorie der alternativen Ringe*, Abhandlungen Hamburg, **8** (1931), 123–147. JFM 56.0140.01

[17] N. Jacobson, *Structure of alternative and Jordan bimodules*, Osaka Math. J., **6** (1954), 1–71. Zbl 0059.02902

Oleg Vladimirovich Shashkov
Financial University under the Government of the Russian Federation,
49, Leningradsky ave.,
Moscow, 125993, Russia
Email address: o.v.shashkov@yandex.ru