S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1522–1539 (2020) УДК 517.9

DOI 10.33048/semi.2020.17.106 MSC 35R30, 35C15

ФОРМУЛЫ В ТЕОРИИ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Ю.Е.АНИКОНОВ

Abstract. The paper is devoted to some identification problems for evolution and other partial differetial equation. Explicit formulas are obtained and discussed.

Keywords: identification problems, evolution equations, the second order partial differential equations

Обратные и некорректно поставленные задачи сформулированные и развитые в работах отечественных математиков, являются быстро развивающимся направлением исследований, [1] – [3]. Фактически они обусловлены созданием новых математических моделей естественных и социально-экономических процессов по данным наблюдений в условиях частичной или полной неопределенности.

Сложные и нестандартные по своей математической сущности с широким спектром применений обратные и некорректные задачи во многом, как представляется, будут определять развитие как самой математики, так и приложений — идентификации, прогноза, мониторинга, управления, распознавания образов и других.

Отметим некоторые общие положения, рассматривая их как руководство к действию в проблемах математического моделирования в условиях неопределенности.

Представляется чрезвычайно важным максимальное и систематическое использование теории и практики предыстории природных и социально-экономических явлений с основной целью построения адекватных математических моделей этих явлений.

Anikonov, Yu.E., Formulas in the theory of identification.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект № 0314-2019-0011.

Поступила 3 июля 2020 г., опубликована 23 сентября 2020 г.

Классическими примерами являются определение И.Ньютоном гравитационного потенциала на основе законов Кеплера, построение Дж.Форрестером уравнений мировой динамики на данных 1900–1970 годов и другие, [4, 5].

В этой связи желательно систематизировать полученные к настоящему времени математические модели теории обратных задач, идентификации, распознавания образов, установить более тесные связи между дискретной и непрерывной математикой, например, с помощью производящих функций, [6], указать новые конкретные разделы математики, непосредственно связанные с моделированием на основе обратных и некорректных задач.

Также важными являются синергетические принципы эволюционных нелинейных процессов, учитывающие иерархию явлений и зависимость слоев иерархии друг от друга, в некотором смысле, подобным образом, [7, 8].

В данном случае необходима детализация явления. Математически это может означать введение параметра иерархии в искомые математические модели. Таким образом возникают новые обратные и некорректные задачи с параметром, которые нуждаются в дальнейшем развитии и применении.

В этой связи отметим, что зависимость начально-краевых данных от параметра (детализация) позволяет находить функции источников, символы операторов, коэффициенты уравнений, зависящие не только от пространственных или частотных характеристик, но и от времени, что является новым элементом исследования обратных и некорректных задач, [9] – [12].

Представляется интересным и перспективным алгебраический прием конструктивного поиска математических моделей, основанный на расширении пространств, решений, переменных и т.п., в частности, комплексификации с использованием достижений теории аналитических функций, например, связанных с аналитическим продолжением.

Хорошим классическим примером этому является направление, развитое под руководством итальянского математика Л. Фантапье, создавшего школу конструктивного построения решений дифференциальных уравнений аналитическими методами, [13].

Что касается более конкретной практической деятельности, то отметим значимость компьютерного моделирования с использованием логических символьных исчислений — как действенное средство численного решения многомерных обратных задач с помощью компьютерных палеток, минимизаций, сплайнов и тому подобное. Основой при этом могут служить формулы и способы получения формул для решений и коэффициентов эволюционных уравнений. Научное направление упомянутых общих положений можно назвать аналитическим распознаванием образов, подчеркивая этим приоритетность применения обширной теории функций и дифференциальных уравнений, см. [14] – [20].

В настоящей работе эти общие положения иллюстрируются примерами представлений решений эволюционных уравнений и систем с параметром.

1. Представления решений эволюционных уравнений с параметром

В данном разделе приведены формулы для решений эволюционных уравнений с параметром, на основе которых выписаны уравнения аналитического распознавания образов.

I. Пусть $B(\xi,t)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $B(\xi,0) = 0$ — бесконечно дифференцируемая комплекснозначная функция, $F(\xi,y)$, $\widehat{w}_a(\xi,y)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \leq y \leq \beta$ —

непрерывные комплекснозначные функции, a, α, β – постоянные. Положим $B(\xi,t)=\int\limits_0^t \widetilde{A}(\xi,\tau)d\tau$ и будем считать функцию $\widetilde{A}(\xi,t)=\dfrac{\partial B}{\partial t}$ символом оператора $A(t)$: $A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\widetilde{A}(\xi,t)$.

Будем считать, что векторное значение $\widehat{w}_a(\xi,p)$, а также $\widehat{w}_b(\xi,p)$ — непрерывны в замкнутой области $|\xi|\le R_0$, для любого p, $\alpha\le p\le\beta$, так что функции $w_a(x,p)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\widehat{w}_a(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi$ — целые экспоненциального типа.

Теорема 1. *Функции*

$$w(x,p,t) = \int\limits_{|\xi|\le R_0} \mathrm{e}^{pB(\xi,t)}\left[\int\limits_\alpha^\beta\int\limits_a^t \mathrm{e}^{B(\xi,\tau)(y-p)}d\tau F(\xi,y)dy+\mathrm{e}^{-B(\xi,a)p}\widehat{w}_a(\xi,p)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}d\xi, \tag{1}$$

$$\lambda(x,t)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\left(\int\limits_\alpha^\beta \mathrm{e}^{B(\xi,t)y}F(\xi,y)dy\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}d\xi \tag{2}$$

удовлетворяют эволюционному уравнению с параметром p, $\alpha\le p\le\beta$,

$$\frac{\partial w}{\partial t}=pA(t)w+\lambda(x,t) \tag{3}$$

и данным

$$w|_{t=a}=w_a(x,p)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{w}_a(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}d\xi,\quad w|_{t=b}=w_b(x,p)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{w}_b(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}d\xi.$$

В силу теоремы 1 для того, чтобы найти решение $w(x,p,t)$ и функцию источника $\lambda(x,t)$ по формулам (1), (2) нужно знать функции $F(\xi,y)$, $B(\xi,t)$, $B(\xi,0)=0$. Имея это ввиду будем предполагать, что известны дополнительно к $w_a(x,p)$ условия $w|_{t=c}=w_c(x,p)$, $w|_{t=b}=w_b(x,p)$, $a<c<b$. Подставляя последовательно значения $t=c$, $t=b$ в (1), после обращения преобразования Фурье, оказывается, получим два уравнения относительно функций $F(\xi,y)$, $B(\xi,t)$:

$$\widehat{w}_b(\xi,p)\mathrm{e}^{-B(\xi,b)p}-\widehat{w}_a(\xi,p)\mathrm{e}^{-B(\xi,a)p}=\int\limits_\alpha^\beta F(\xi,y)\left[\int\limits_a^b \mathrm{e}^{B(\xi,\tau)(y-p)}d\tau\right]dy, \tag{4}$$

$$\widehat{w}_c(\xi,p)\mathrm{e}^{-B(\xi,c)p}-\widehat{w}_a(\xi,p)\mathrm{e}^{-B(\xi,a)p}=\int\limits_\alpha^\beta F(\xi,y)\left[\int\limits_a^c \mathrm{e}^{B(\xi,\tau)(y-p)}d\tau\right]dy. \tag{5}$$

Таким образом аналитическое распознавание образов (в уравнении (3) все элементы w, A, λ неизвестны) по данным $w_a(x,p)$,$w_c(x,p)$, $w_b(x,p)$ сведена к уравнениям (4), (5). Заметим, для каждого фиксированного $\xi\in\mathbb{R}^n$ нелинейная система уравнений (4), (5) одномерна.

Приведем операторные формулы в случае, когда A — линейный ограниченный оператор, не зависящий от t, а именно пусть E — банахово пространство и

A — линейный ограниченный оператор из E в E, не зависящий от t. Рассмотрим обратную задачу с переменным параметром p: найти $w(p,t) \in E$, $\lambda(t) \in E$, $a \le t \le b$, $\alpha \le p \le \beta$ такие, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} = pAw + \lambda(t), \quad w|_{t=a} = w_a(p), \quad w|_{t=b} = w_b(p), \tag{6}$$

где $w_a(p)$, $w_b(p)$ — заданные элементы пространства E, зависящие от параметра p, $\alpha \le p \le \beta$.

Теорема 2. *Если $F(y) \in E$ — решение операторного уравнения при заданном операторе A*

$$\mathrm{e}^{-bpA} w_b(p) - \mathrm{e}^{-apA} w_a(p) = \int\limits_\alpha^\beta \left[\int\limits_a^b \mathrm{e}^{\tau(y-p)A} d\tau \right] F(y) dy,$$

то

$$w(p,t) = \mathrm{e}^{tpA} \left[\int\limits_\alpha^\beta \int\limits_a^t \mathrm{e}^{\tau(y-p)A} F(y) d\tau dy + \mathrm{e}^{-paA} w_a(p) \right],$$

$$\lambda(t) = \int\limits_\alpha^\beta \mathrm{e}^{ytA} F(y) dy$$

удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial w}{\partial t} = pAw + \lambda(t)$ *и данным* $w|_{t=a} = w_a(p)$, $w|_{t=b} = w_b(p)$.

Аналогично (4), (5), предполагая известным элемент $w|_{t=c}\, w_c(p) \in E$, можно привести уравнения относительно элемента $F(y)$ и оператора A, а именно,

$$\mathrm{e}^{-bpA} w_b(p) - \mathrm{e}^{-apA} w_a(p) = \int\limits_\alpha^\beta \left[\int\limits_a^b \mathrm{e}^{\tau(y-p)A} d\tau \right] F(y) dy,$$
$$\mathrm{e}^{-cpA} w_c(p) - \mathrm{e}^{-apA} w_a(p) = \int\limits_\alpha^\beta \left[\int\limits_a^c \mathrm{e}^{\tau(y-p)A} d\tau \right] F(y) dy.$$

В данном случае в уравнении (6) все элементы w, A, λ априори известными не предполагаются.

II. Рассмотрим эволюционное уравнение с другой функцией источника и данными управления, зависящими от параметра p, а именно

$$\frac{\partial w}{\partial t} = pA(t)w + \lambda(x,p) f(t,p), \quad w|_{t=a} = w_a(x,p), \quad w|_{t=b} = w_b(x,p),$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \le p \le \beta$.

Теорема 3. *При заданных функциях* $f(t,p)$, $B(\xi,t)=\int\limits_0^t \widetilde{A}(\xi,\tau)d\tau$, $\int\limits_a^b \mathrm{e}^{pB(\xi,\tau)}f(\tau,p)d\tau \neq 0$ *функции*

$$w(x,p,t)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\left\{\frac{\mathrm{e}^{p[B(\xi,t)-B(\xi,a)]}\int\limits_t^b \mathrm{e}^{pB(\xi,\tau)}f(\tau,p)d\tau\,\widehat{w}_a(\xi,p)}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{pB(\xi,\tau)}f(\tau,p)d\tau}\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{e}^{p[B(\xi,t)-B(\xi,b)]}\int\limits_a^t \mathrm{e}^{pB(\xi,\tau)}f(\tau,p)d\tau\,\widehat{w}_b(\xi,p)}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{pB(\xi,\tau)}f(\tau,p)d\tau}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi,$$

$$\lambda(x,p)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\frac{\mathrm{e}^{pB(\xi,b)}\widehat{w}_b(\xi,p)-\mathrm{e}^{pB(\xi,a)}\widehat{w}_a(\xi,p)}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{pB(\xi,\tau)}f(\tau,p)d\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi$$

удовлетворяют эволюционному уравнению с параметром p

$$\frac{\partial w}{\partial t}=pA(t)w+\lambda(x,p)f(t,p)$$

и данным

$$w|_{t=a}=w_a(x,p)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\widehat{w}_a(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi,\quad w|_{t=b}=w_b(x,p)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\widehat{w}_b(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi.$$

Также как и выше, чтобы найти решение $w(x,p,t)$ и функцию источника $\lambda(x,p)f(t,p)$ ($f(t,p)$ — заданная непрерывная функция) по формулам теоремы 3 нужно знать функцию $B(\xi,t)=\int\limits_0^t \widetilde{A}(\xi,\tau)d\tau$, определяющую символ $\widetilde{A}(\xi,t)$ оператора по формулам $\dfrac{\partial B}{\partial t}=\widetilde{A}(\xi,t)$ $A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\widetilde{A}(\xi,t)$ В этой связи будем предполагать, что дополнительно к данным $w_a(x,p)$, $w_b(x,p)$ задано условие $w|_{t=c}=w_c(x,p)$, $a<c<b$. Подставляя $t=c$ в формулу для $w(x,p,t)$ теоремы 3, получим уравнение на $B(\xi,t)=\int\limits_0^t \widetilde{A}(\xi,\tau)d\tau$

$$\widehat{w}_c(\xi,p)=\frac{\widehat{w}_a(\xi,p)\mathrm{e}^{p[B(\xi,c)-B(\xi,a)]}\int\limits_c^b \mathrm{e}^{pB(\xi,\tau)}f(\tau,p)d\tau}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{pB(\xi,\tau)}f(\tau,p)d\tau}$$
$$+\frac{\widehat{w}_b(\xi,p)\mathrm{e}^{p[B(\xi,c)-B(\xi,b)]}\int\limits_a^c \mathrm{e}^{pB(\xi,\tau)}f(\tau,p)d\tau}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{pB(\xi,\tau)}f(\tau,p)d\tau}.$$

то есть уравнение на символ $\widetilde{A}(\xi,t)$ оператора $A(t)$, см. также [14].

2. О корректности формальных формул

Формулы теорем 1, 2, 3 носят формальный характер. Ограничимся здесь одним достаточным результатом корректности формул теоремы 1, предполагая известным символ оператора $A(t)$. Подобные достаточные условия в других случаях аналогичны, [15], см.также [16, 17].

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — область вещественного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, (p,t) — переменные, $c \leq p \leq d$, $0 \leq a \leq t \leq b$.

Обозначим через $\{W\}$ — множество комплекснозначных функций $w(x,p,t)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $c \leq p \leq d$, $a \leq t \leq b$ таких, что

$$w(x,p,t) = \int_{|\xi| \leq R_0} \widehat{w}(\xi,p,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi},$$

где $\widehat{w}(\xi,p,t)$ непрерывна по $\xi \in \mathbb{R}^n$ с компактным фиксированным, например, носителем $K = \{\xi : |\xi| \leq R_0\} \subset \mathbb{R}^n$ по переменной ξ и достаточно гладкая по переменным (p,t). Таким образом для всех (p,t), $c \leq p \leq d$, $a \leq t \leq b$ $w(x,p,t)$ является целой функцией экспоненциального типа по переменной $x \in D$.

Пусть $A(t)$ — линейный оператор из $\{W\}$ в $\{W\}$, действующий по переменной x и имеющий бесконечно дифференцируемый символ

$$\widetilde{A}(\xi,t): \quad A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\widetilde{A}(\xi,t), \quad t \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Положим $B(\xi,t) = \int\limits_0^t \widetilde{A}(\xi,\tau)d\tau$.

Рассмотрим линейную обратную задачу с переменным параметром p: найти функции

$$w(x,p,t) \in \{W\}, \quad \lambda(x,t) \in \{W\}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial p} = 0,$$

такие, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} = pA(t)w + \lambda(x,t), \tag{7}$$

$$w|_{t=a} = w_a(x,p), \quad w|_{t=b} = w_b(x,p), \tag{8}$$

где $w_a(x,p) \in \{W\}$, $w_b(x,p) \in \{W\}$ заданные целые функции по x, $x \in D$, зависящие от параметра p, $c \leq p \leq d$. Заметим, в соответствии с условиями обратной задачи имеем

$$w_a(x,p) = \int\limits_{|\xi| \leq R_0} \widehat{w}_a(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi, \quad w_b(x,p) = \int\limits_{|\xi| \leq R_0} \widehat{w}_b(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi,$$

отсюда следуют равенства

$$\widehat{w}_a(\xi,p) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{w}_a(x,p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}dx, \quad \widehat{w}_b(\xi,p) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{w}_b(x,p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}d\xi,$$

где $\widetilde{w}_a(x,p)$, $\widetilde{w}_b(x,p)$ аналитическое продолжение на $\mathbb{R}^n$ целых функций $w_a(x,p)$, $w_b(x,p)$, $x \in D$, $c \leq p \leq d$.

Непосредственно проверяемый результат сформулирован нижеследующей теоремой.

Теорема 4. *Если $F(\xi,y)\in\{W\}$ и является решением для каждого $\xi\in\mathbb{R}^n$ уравнения типа свертки по переменной y*

$$\widehat{w}_b(\xi,p)\mathrm{e}^{-B(\xi,b)p}-\widehat{w}_a(\xi,p)\mathrm{e}^{-B(\xi,a)p}=\int\limits_c^d F(\xi,y)\left[\int\limits_a^b \mathrm{e}^{B(\xi,\tau)(y-p)}d\tau\right]dy,$$

то функции

$$w(x,p,t)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\mathrm{e}^{B(\xi,t)p}\left[\int\limits_c^d F(\xi,y)\int\limits_a^t \mathrm{e}^{B(\xi,\tau)(y-p)}d\tau dy+\widehat{w}_a(\xi,p)\mathrm{e}^{-B(\xi,a)p}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi,$$

$$\lambda(x,t)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\int\limits_c^d F(\xi,y)\mathrm{e}^{B(\xi,t)y}dy\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi$$

принадлежат $\{W\}$, удовлетворяют эволюционному уравнению (7) *и данным* (8).

Пусть дважды дифференцируемая функция $F(y,p,t)$, $y\in\mathbb{R}^1$, $t\ge 0$ — является решением уравнения $\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}=p\dfrac{\partial F}{\partial t}$, где p — переменный параметр, $a_{ij}(x,t)$, $a_{ij}=a_{ji}$, $i,j=1,2,\dots,n$ — произвольные вещественные функции переменных $x\in D\subset\mathbb{R}^n$, $t\ge 0$, D — область в $\mathbb{R}^n$, а $v(x,t)$ — дважды дифференцируемая произвольная вещественная функция этих же переменных. Имеет место формула

Теорема 5. *Функция $w(x,t)=F(v(x,t),p,t)$, $x\in D$ является решением уравнения 2-го порядка с параметром p*

$$p\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}+ \\ +\left[p\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\frac{\partial v}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\right]\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} \tag{9}$$

с коэффициентами, не зависящими от функции $F(y,p,t)$.

Доказательство. Пусть $w(x,t)=F(v,p,t)$. Имеем $\dfrac{\partial w}{\partial t}=F'_y(v,p,t)\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial F}{\partial t}(v,p,t)$, $\dfrac{\partial w}{\partial x_j}=F'_y(v,p,t)\dfrac{\partial v}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}=F''_{yy}(v,p,t)\dfrac{\partial v}{\partial x_i}\dfrac{\partial v}{\partial x_j}+F'_y(v,t)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}$. Подставляя эти данные в (9), с учетом уравнения для $F(y,p,t)$ легко убедиться в справедливости теоремы 5. □

Уравнение (9) можно записать в виде

$$p\lambda_1(x,y)\frac{\partial w}{\partial t}=\lambda_2(x,y)\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^n\mu_j(x,y)\frac{\partial w}{\partial x_j},$$

где

$$\lambda_1(x,y)=\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2,\quad \lambda_2(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j},$$

$$\mu_j(x,y)=\left[p\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\frac{\partial v}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right]\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

и при $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j>0$ получается параболическое уравнение.

Так как уравнение (9) линейно, то целесообразно и часто необходимо представлять его решение в виде $w(x,t)=F(v(x,y),p,t)+\widetilde{w}(x,p,t)$, где $\widetilde{w}(x,p,t)$ — любое решение (9). Таким образом получается общее решение уравнения (9) с коэффициентами, определенными a_{ij}, b_{kl}, v по выписанным формулам.

Заметим, формулы теоремы 5 данного раздела могут быть использованы для практического применения к конкретным задачам идентификации с возможным использованием символьного исчисления.

3. Замечания по теории идентификации

Общая задача идентификации — установление неизвестного объекта по его признакам. В такой общей постановке понятие идентификации включает в себя обратные задачи и распознавание образов. Основные математические проблемы идентификации динамических систем, в частности, управления, контроля, прогноза и т.п. непосредственно связаны с новым математическим моделированием в условиях неопределенности, когда частично или полностью неизвестны эволюционные уравнения рассматриваемых систем.

В данной работе обобщается на системы уравнений одномерный известный результат [18], суть которого заключается в следующем. Рассматривается эволюционное уравнение с параметром p, $\alpha\le p\le\beta$, α, β — фиксированные постоянные,

$$\frac{\partial w}{\partial t}=pA(t)w(x,t,p)+\lambda(x,t),\qquad\text{с данными}\quad w|_{t=a}=w_a(x,p),\quad w|_{t=b}=w_b(x,p)\tag{10}$$

a и b — фиксированные постоянные, $a<b$, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial p}=0$, $A(t)$ — линейный оператор, действующий при любом $a\le t\le b$ по переменной $x\in\mathbb{R}^n$ и имеющий символ

$$A(t)w=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial B(\xi,t)}{\partial t}\widehat{w}(\xi,t,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,d\xi,\quad\text{где } w(x,t,p)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{w}(\xi,t,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,d\xi.$$

Оказывается, имеет место формальный результат в виде.

Теорема 6. *Пусть* $w_a(x,p)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\widehat{w}_a(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,d\xi$, $w_b(x,p)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\widehat{w}_b(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,d\xi$, *где* $\widehat{w}_a(\xi,p)$, $\widehat{w}_b(\xi,p)$ *— непрерывные функции, заданные в замкнутом множестве* $|\xi|\le R_0$ *для любого* p, $\alpha\le p\le\beta$ *а функции*

$F(\xi,y)$ и $B(\xi,y)$ связаны для каждого $\xi\in\mathbb{R}^n$ уравнением типа свертки

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\int\limits_{a}^{b}\mathrm{e}^{(y-p)B(\xi,\tau)}d\tau\right]F(\xi,y)dy=\mathrm{e}^{-pB(\xi,b)}\widehat{w}_b(\xi,p)-\mathrm{e}^{-pB(\xi,a)}\widehat{w}_a(\xi,p).$$

Тогда функции $w(x,p,t)$, $\lambda(x,t)$, определенные формулами

$$w(x,t,p)=\frac{1}{2}\int\limits_{|\xi|\le R_0}\mathrm{e}^{pB(\xi,b)}\Bigg[\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\int\limits_{a}^{t}\mathrm{e}^{(y-p)B(\xi,\tau)}d\tau-\int\limits_{t}^{b}\mathrm{e}^{(y-p)B(\xi,\tau)}d\tau\right)F(\xi,y)dy$$
$$+\mathrm{e}^{-pB(\xi,b)}\widehat{w}_b(\xi,p)+\mathrm{e}^{-pB(\xi,a)}\widehat{w}_a(\xi,p)\Bigg]\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\,\xi,$$
$$\lambda(x,t)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\left[\int\limits_{\alpha}^{\beta}\mathrm{e}^{yB(\xi,t)}F(\xi,y)dy\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\,\xi,$$

удовлетворяют уравнению (10) *и данным.*

Представляет интерес обобщение результата теоремы 6 на системы эволюционных уравнений, а именно:

Пусть $B(\xi,t)=(B_{ik}(\xi,t))$, $i=1,2,\dots,N$, $k=1,2,\dots,N$ — непрерывно дифференцируемые матрицы N-го порядка, $N\ge 1$ — фиксированное целое число, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $a\le t\le b$. Для векторного непрерывного источника $\lambda(x,t)=(\lambda_1(x,t),\dots,\lambda_N(x,t))$ рассмотрим систему эволюционных уравнений с параметром p с векторными данными

$$\frac{\partial w}{\partial t}=pA(t)w+\lambda(x,t),\quad w|_{t=a}=w_a(x,p),\quad w|_{t=b}=w_b(x,p) \tag{11}$$

$\alpha\le p\le\beta$, $x\in\mathbb{R}^n$, где $A(t)$ — линейный оператор, действующий по переменной $x\in\mathbb{R}^n$ при $a<t<b$ имеющий матричный символ $\dfrac{\partial B(\xi,t)}{\partial t}$, то есть $A(t)w=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\dfrac{\partial B(\xi,t)}{\partial t}\widehat{w}(\xi,t,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\xi)}\,d\xi$, где $w(x,t,p)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\widehat{w}(\xi,t,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\xi)}\,d\xi$.

Таким образом, зависимость от времени символа $\dfrac{\partial B(\xi,t)}{\partial t}$ является определяющим.

Теорема 7. *Пусть $w_a(x,p)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\widehat{w}_a(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,d\xi$, $w_b(x,p)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\widehat{w}_b(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,d\xi$ — вектор -функции при непрерывных в замкнутой области $|\xi|\le R_0$ для любого p, $\alpha\le p\le\beta$, при этом $B(\xi,t)$ связаны для любого $\xi\in\mathbb{R}^n$ с вектором $F(\xi,y)$, $F(\xi,y)=(F_1(\xi,y),F_2(\xi,y),\dots,F_N(\xi,y))$, интегральным уравнением типа свертки*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\int\limits_{a}^{b}\mathrm{e}^{(y-p)B(\xi,\tau)}d\tau\right]F(\xi,y)dy=\mathrm{e}^{-pB(\xi,b)}\widehat{w}_b(\xi,p)-\mathrm{e}^{-pB(\xi,a)}\widehat{w}_a(\xi,p).$$

Тогда вектор-функции $w(x,p,t)$, $\lambda(x,t)$

$$w(x,t,p)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{pB(\xi,b)}\left[\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\int\limits_{a}^{t}\mathrm{e}^{(y-p)B(\xi,\tau)}d\tau-\int\limits_{t}^{b}\mathrm{e}^{(y-p)B(\xi,\tau)}d\tau\right)F(\xi,y)dy\right.$$

$$\left.+\mathrm{e}^{-pB(\xi,b)}\widehat{w}_b(\xi,p)+\mathrm{e}^{-pB(\xi,a)}\widehat{w}_a(\xi,p)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\,\xi,$$

$$\lambda(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\int\limits_{\alpha}^{\beta}\mathrm{e}^{yB(\xi,t)}F(\xi,y)dy\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\,\xi$$

удовлетворяют уравнению и данным (11).

Необходимо исследовать корректность указанных выше формул. Первое, что нужно сделать — это изучение интегрального уравнения типа свертки в зависимости от параметра $\xi\in\mathbb{R}^n$ в одномерном и многомерном варианте. В работе [19] исследованы вопросы представления в зависимости от параметра $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Необходимо исследовать корректность представлений в виде интегралов. Для этого достаточно, чтобы матрица $B(\xi,t)$ была достаточно гладкой, в частности, бесконечно дифференцируемой, а векторные данные $\widehat{w}_a(\xi,p)$, $\widehat{w}_b(\xi,p)$ непрерывно дифференцируемы по p и кроме того финитны по ξ. Например, выполнены векторные условия $w_a(x,p)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\widehat{w}_a(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,d\xi$, $w_b(x,p)=\int\limits_{|\xi|\le R_0}\widehat{w}_b(\xi,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,d\xi$, где $\widehat{w}_a(\xi,p)$, $\widehat{w}_b(\xi,p)$ непрерывны в замкнутой области $|\xi|\le R_0$, $R_0>0$ для любого p, $\alpha\le p\le\beta$.

4. Задачи для специального источника

Рассмотрим задачу идентификации при специальном источнике и независимости скорости звука и давления от t, [21, 22]. Найти в области $D\subset\mathbb{R}^n$ при $a\le t\le b$ бесконечно-дифференцируемые комплекснозначные функции $w(x,t)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial t}=0$, $\dfrac{\partial\mu}{\partial t}=0$ такие, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+Aw(x,t)=\lambda(x)f(t)+\mu(x)\varphi(t), \tag{12}$$

$$w|_{t=a}=w_a(x),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=a}=w'_a(x),\quad w|_{t=b}=w_b(x),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=b}=w'_b(x). \tag{13}$$

Здесь A — линейный, не зависящий от t, оператор, действующий по переменной $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in D\subset\mathbb{R}^n$, $f(t)\ne 0$, $\varphi(t)\ne 0$ известные непрерывные функции, $a<b$ — фиксированные постоянные, $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство.

Сделаем несколько замечаний относительно постановки задач идентификации (12), (13). Прежде всего отметим смысл оператора A в (12). Разумеется A может быть гиперболическим оператором, $A=-\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, где $a_{ij}(x)$, $a_{ij} = a_{ji}$, a_i — бесконечно дифференцируемые матрицы m-го порядка с условиями гиперболичности. Примером является система уравнений теории упругости, известная как система уравнений Ламе. При этом, если допустить комплекснозначность коэффициентов a_{ij}, a_i, то можно говорить об операторах Шрёдингера. Оператор A может быть и дифференциально-разностным, который действует по переменной $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и не зависит от t.

Переменная t в эволюционном уравнении (12) не обязана быть временем, но может им быть.

Если это действительно так, то есть, если t — время, то поставленная обратная задача (12), (13) может интерпретироваться как перевод субстанции $w(x,t)$ из одного состояния (w_a, w'_a) в другое состояние (w_b, w'_b), то данная обратная задача интерпретируется как задача управления перевода состояния (w_a, w'_a) в состояние (w_b, w'_b); при этом управляющими параметрами являются функции $\lambda(x)$, $\mu(x)$ при заданных $f(t)$, $\varphi(t)$.

Если же t пространственная переменная, а вектор x содержит компоненту времени, то есть в новых переменных пусть $t = z$, а $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \tau)$ где τ – время, а $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ — координаты, то уравнение (12) с данными (13) имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + Aw = \lambda(x',\tau)f(z) + \mu(x',\tau)\varphi(z),$$

$$w|_{t=a} = w_a(x',\tau),\ \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{t=a} = w'_a(x',\tau), \quad w|_{t=b} = w_b(x',\tau),\ \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{t=b} = w'_b(x',\tau)$$

и обратная задача в данном случае состоит в поиске движущегося источника, определённого функциями $\lambda(x',\tau)$, $\mu(x',\tau)$ при заданных $f(z) \neq 0$, $\varphi(z) \neq 0$, характеризующих положение и при известных данных $(w_a(x',\tau), w'_a(x',\tau))$, $(w_b(x',\tau), w'_b(x',\tau))$. Разумеется оператор A не зависит от переменной z.

Сначала сделаем общее замечание относительно операторных формул, которые будут приведены в дальнейшем. Пусть $F(z,t)$ целая функция по переменной z, то есть $F(z,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k(t) z^k$ с достаточно гладкими $F_k(t)$, $a \le t \le b$ и пусть A — ограниченный оператор. Оператор $F(A,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k(t) A^k$ является также ограниченным для каждого t, $a \le t \le b$. Рассмотрим выражения переменной z, из которых, подстановкой оператора A вместо z будут получены нужные нам операторные выражения. Обозначим через $\Delta(z)$ функциональный определитель

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{z}} \sin\sqrt{z}(r-p) f(p)dp, & \int\limits_a^b \cos\sqrt{z}(r-p) f(p)dp \\ \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{z}} \sin\sqrt{z}(r-p) \varphi(p)dp, & \int\limits_a^b \cos\sqrt{z}(r-p) \varphi(p)dp \end{vmatrix}.$$

Определитель $\Delta(z)$ не зависит от переменной r, что легко можно проверить дифференцированием по r. Данное обстоятельство удобно при выборе r в качестве a или b в дальнейшем.

Например, если $f(\tau) = \delta(\tau - \tau_0)$, $\varphi = \delta(\tau - \tau_1)$, $t_0 \in (a,b)$, $t_1 \in (a,b)$, то $\Delta(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \sin\sqrt{z}(t_1 - t_0)$.

Далее введем функции, зависящие от данных и переменной z

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
P_a^f &= w_a \int\limits_a^b \cos\sqrt{z}(r-p)f(p)dp - w_a' \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{z}}\sin\sqrt{z}(r-p)f(p)dp,\\
P_a^\varphi &= w_a \int\limits_a^b \cos\sqrt{z}(r-p)\varphi(p)dp - w_a' \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{z}}\sin\sqrt{z}(r-p)\varphi(p)dp,\\
P_b^f &= w_b \int\limits_a^b \cos\sqrt{z}(r-p)f(p)dp - w_b' \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{z}}\sin\sqrt{z}(r-p)f(p)dp,\\
P_b^\varphi &= w_a \int\limits_a^b \cos\sqrt{z}(r-p)\varphi(p)dp - w_b' \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{z}}\sin\sqrt{z}(r-p)\varphi(p)dp.
\end{aligned}
$$

Формальная подстановка в указанные формулы вместо переменной z оператора A приводит к теореме 8, дающей решение (12), (13).

Теорема 8. *Следующие формулы*

$$
(15)\quad w(x,t) = \\
= \Delta^{-1}(A)\left\{\begin{vmatrix} \int_t^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(t-p)f(p)dp & \int_t^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(t-p)\varphi(p)dp \\ P_a^f & P_a^\varphi \end{vmatrix} + \right.\\
\left. + \begin{vmatrix} \int_a^t (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(t-p)f(p)dp & \int_a^t (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(t-p)\varphi(p)dp \\ P_b^f & P_b^\varphi \end{vmatrix}\right\},
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda(x) &= \Delta^{-1}(A)(P_b^\varphi - P_a^\varphi),\\
\mu(x) &= \Delta^{-1}(A)(P_b^f - P_a^f)
\end{aligned}
$$

дают формальное решение задачи (12)*,* (13)*.*

Доказательство. Сначала покажем, что при $t=a$, $w(x,a)=w_a(x)$, а при $t=b$, $w(x,b)=w_b(x)$. Имеем по формуле теоремы 8

$$
w(x,a) = \Delta^{-1}(A)\begin{vmatrix} \int_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & \int_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \\ P_a^f & P_a^\varphi \end{vmatrix}.
$$

Подставляя выражения для P_a^f, P_a^φ из (14) в формулу для $w_a(x)$ получаем

$$
\begin{aligned}
&w(x,a) = \\
&= \Delta^{-1}(A)\left\{\begin{vmatrix} \int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & \int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \\ w_a\int\limits_a^b \cos\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & w_a\int\limits_a^b \cos\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \end{vmatrix}\right. \\
&\quad \left. - \begin{vmatrix} \int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{A}}\sin\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \\ w_a'\int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & w_a'\int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \end{vmatrix}\right\} \\
&= \Delta^{-1}(A)\begin{vmatrix} \int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & \int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \\ w_a\int\limits_a^b \cos\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & w_a\int\limits_a^b \cos\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \end{vmatrix} \\
&\qquad\qquad = w_a(x)\Delta^{-1}(A)\Delta(A) = w_a(x),
\end{aligned}
$$

в силу того, что

$$
-\begin{vmatrix} \int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & \int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \\ w_a'\int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & w_a'\int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \end{vmatrix} = 0.
$$

Аналогично,

$$
\begin{aligned}
&w(x,b) = \\
&= \Delta^{-1}(A)\begin{vmatrix} \int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(b-p)f(p)dp & \int\limits_a^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(b-p)\varphi(p)dp \\ P_b^f & P_b^\varphi \end{vmatrix} \\
&\qquad\qquad = w_b(x).
\end{aligned}
$$

Дифференцируя по t один раз функцию $w(x,t)$ теоремы 8, получаем равенство

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \Delta^{-1}(A)\left\{\begin{vmatrix} \int\limits_t^b \cos\sqrt{A}(r-p)f(p)dp & \int\limits_t^b \cos\sqrt{A}(r-p)\varphi(p)dp \\ P_a^f & P_a^\varphi \end{vmatrix} +\right. \\
&\qquad \left. + \begin{vmatrix} \int\limits_a^t \cos\sqrt{A}(r-p)f(p)dp & \int\limits_a^t \cos\sqrt{A}(r-p)\varphi(p)dp \\ P_b^f & P_b^\varphi \end{vmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

Подставляя здесь $t = a$ с учетом соотношений (13) имеем

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=a} =$$

$$= \Delta^{-1}(A)\left\{\begin{vmatrix} \int\limits_a^b \cos\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & \int\limits_t^b \cos\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \\ w_a(x)\int\limits_a^b \cos\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & w_a(x)\int\limits_a^b \cos\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} \int\limits_t^b \cos\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & \int\limits_t^b \cos\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \\ w_a'(x)\int\limits_t^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & w_a(x)'\int\limits_t^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \Delta^{-1}(A)\begin{vmatrix} \int\limits_t^b \cos\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & \int\limits_t^b \cos\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \\ w_a'(x)\int\limits_t^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)f(p)dp & w_a'(x)\int\limits_t^b (\sqrt{A})^{-1}\sin\sqrt{A}(a-p)\varphi(p)dp \end{vmatrix}$$

$$= \Delta^{-1}(A)\Delta(A)w_a'(x) = w_a'(x)$$

Аналогично при $t = b$ имеет место равенство $\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=b} = w_b'(x)$. Дифференцируя два раза по t формулу (15) для $w(x,t)$, получаем равенство

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} =$$

$$= \Delta^{-1}(A)\left\{\begin{vmatrix} -\int\limits_t^b (\sqrt{A})^{-1}A\sin\sqrt{A}(t-p)f(p)dp & -\int\limits_t^b (\sqrt{A})^{-1}A\sin\sqrt{A}(t-p)\varphi(p)dp \\ P_a^f(A) & P_a^\varphi(A) \end{vmatrix}\right.$$

$$+ \begin{vmatrix} f(t) & \varphi(t) \\ P_a^f(A) & P_a^\varphi(A) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -\int\limits_a^t (\sqrt{A})^{-1}A\sin\sqrt{A}(t-p)f(p)dp & -\int\limits_a^t (\sqrt{A})^{-1}A\sin\sqrt{A}(t-p)\varphi(p)dp \\ P_b^f(A) & P_b^\varphi(A) \end{vmatrix}$$

$$\left. + \begin{vmatrix} f(t) & \varphi(t) \\ P_b^f(A) & P_b^\varphi(A) \end{vmatrix}\right\} = -Aw + f(t)\lambda(x) + \varphi(t)\mu(x).$$

□

5. Аналитические представления решений для эволюционных уравнений

Рассматривается многомерная обратная задача для эволюционного уравнения: найти комплекснозначные функции $w(x,t)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad a \le t \le b,$$

такие, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Aw(x,t) = \lambda(x) f(t) + \mu(x)\varphi(t), \tag{16}$$

$$w|_{t=a} = w_a(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=a} = w'_a(x), \quad w|_{t=b} = w_b(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=b} = w'_b(x). \tag{17}$$

Здесь A — линейный оператор, действующий по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$ вещественного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ и имеющий символ $\widetilde{A}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\widetilde{A}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad A e^{ix\xi} = e^{ix\xi} \widetilde{A}(\xi).$$

Дифференцируемые функции $f(t)$, $\varphi(t)$, $w_a(x)$, $w'_a(x)$, $w_b(x)$, $w'_b(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ и постоянные a, b предполагаются известными. Обратная задача (16), (17) может интерпретироваться как задача управления при переводе состояния $(w_a(x), w'_a(x))$ в состояние $(w_b(x), w'_b(x))$ при этом управлением являются функции $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Введем обозначения, полагая

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} \int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}(r-p)}{\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}} f(p)dp, & \int\limits_a^b \cos\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}(r-p) f(p)dp \\ \int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}(r-p)}{\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}} \varphi(p)dp, & \int\limits_a^b \cos\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}(r-p) \varphi(p)dp \end{vmatrix}, \tag{18}$$

(19)

$$P_r^\alpha = \widehat{w}_r(\xi) \int\limits_a^b \cos\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}(r-p)\alpha(p)dp - \widehat{w}'_r(\xi) \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}} \sin\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}(r-p)\alpha(p)dp.$$

В этих формулах $|\cdot|$ означает определитель, число r может принимать два значения: a либо b, функция $\alpha(p)$ может равняться $f(p)$ либо $\varphi(p)$, $a \le p \le b$, функции $\widehat{w}_r(\xi)$, $\widehat{w}'_r$ являются образами Фурье $w_a(x)$, $w'_a(x)$ и $w_b(x)$, $w'_b(x)$ при $r = a$ и $r = b$ соответственно, т.е.

$$w_r(x) = \int\limits_{|\xi| \le R_0} \widehat{w}_r(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi, \quad w'_r(x) = \int\limits_{|\xi| \le R_0} \widehat{w}'_r(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$

с непрерывными $\widehat{w}_r(\xi)$, $\widehat{w}'_r(\xi)$ в замкнутой области $|\xi| \le R_0$. Имеет место следующая теорема

Теорема 9. *Пусть в* (17) *функции* $w_a(x)$, $w'_a(x)$, $w_b(x)$, $w'_b(x)$ *принадлежат классу целых функций экспоненциального типа и пусть выполнено соотношение*

$$\Delta(\xi) \ne 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда существует целое по x решение обратной задачи, определенное формулами

$$
\begin{aligned}
&w(x,t)\\
&= \int\limits_{|\xi|\le R_0} \left\{ \frac{1}{\Delta(\xi)} \left| \begin{matrix} \displaystyle\int_t^b \frac{\sin(\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}(t-p))}{\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}} f(p)dp & \displaystyle\int_t^b \frac{1}{\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}} \sin\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}(t-p)\varphi(p)dp \\ P_a^f & P_a^\varphi \end{matrix} \right| \right.\\
&\left. + \frac{1}{\Delta(\xi)} \left| \begin{matrix} \displaystyle\int_a^t \frac{\sin(\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}(t-p))}{\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}} f(p)dp & \displaystyle\int_a^t \frac{1}{\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}} \sin\sqrt{\widetilde{A}(\xi)}(t-p)\varphi(p)dp \\ P_b^f & P_b^\varphi \end{matrix} \right| \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\, d\xi,
\end{aligned}
$$

$$
\lambda(x) = \int\limits_{|\xi|\le R_0} \left[\frac{P_b^\varphi(\xi)}{\Delta(\xi)} - \frac{P_a^\varphi(\xi)}{\Delta(\xi)} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\, d\xi,
$$

$$
\mu(x) = \int\limits_{|\xi|\le R_0} \left[\frac{P_a^f(\xi)}{\Delta(\xi)} - \frac{P_b^f(\xi)}{\Delta(\xi)} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\, d\xi.
$$

Предположим теперь, что $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, где D — область с гладкой границей, и будем считать, что оператор A в (16) может зависеть от x, например,

$$
A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}.
$$

Пусть $T_k(x)$ и λ_k — собственные функции и собственные значения оператора A

$$
AT_k + \lambda_k T_k = 0, \quad x \in D,
$$

подчиненные некоторому граничному условию, например, $T_k|_{\partial D} = 0$. Оказывается, существует аналог формул теоремы 9 для обратной задачи (16), (17) в данном случае, когда оператор A зависит от $x \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Предположим, что данные (17) обратной задачи (16), (17) представляются в виде

$$
\begin{aligned}
w_a(x) &= \sum_{k=1}^\infty a_k T_k(x), & w'_a(x) &= \sum_{k=1}^\infty a'_k T_k(x),\\
w_b(x) &= \sum_{k=1}^\infty b_k T_k(x), & w'_b(x) &= \sum_{k=1}^\infty b'_k T_k(x),
\end{aligned}
$$

где a_k, a'_k, b_k, b'_k — постоянные.

Введем последовательности Δ_k и P_{rk}^α

$$
\Delta_k(z) = \left| \begin{matrix} \displaystyle\int_a^b \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}(r-p)}{\sqrt{\lambda_k}} f(p)dp, & \displaystyle\int_a^b \cos\sqrt{\lambda_k}(r-p) f(p)dp \\ \displaystyle\int_a^b \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}(r-p)}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi(p)dp, & \displaystyle\int_a^b \cos\sqrt{\lambda_k}(r-p)\varphi(p)dp \end{matrix} \right|,
$$

$$P_{rk}^{\alpha} = r_k(\xi)\int\limits_a^b \cos\sqrt{\lambda_k}(r-p)\alpha(p)dp - r_k'(\xi)\int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}(r-p)\alpha(p)dp, \dots,$$

$r = a, b$, $k = 1, 2$, подставляя в (18), (19) вместо символа $\widetilde{A}(\xi)$ собственное значение λ_k оператора A, а вместо функций $\widehat{w}_r(\xi)$, $\widehat{w}_r'(\xi)$ — постоянные a_k, a_k' при $r = a$ и постоянные b_k, b_k' при $r = b$. Имеет место следующая теорема

Теорема 10. *Пусть $\Delta_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда следующие формулы*

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\Delta_k}\begin{vmatrix} \int\limits_t^b \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}(t-p))}{\sqrt{\lambda_k}}f(p)dp & \int\limits_t^b \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}(t-p)\varphi(p)dp \\ P_{ak}^f & P_{ak}^{\varphi}\end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Delta_k}\begin{vmatrix} \int\limits_a^t \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}(t-p))}{\sqrt{\lambda_k}}f(p)dp & \int\limits_a^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}(t-p)\varphi(p)dp \\ P_{bk}^f & P_{bk}^{\varphi}\end{vmatrix}\right\} T_k,$$

$$\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{P_{bk}^{\varphi}}{\Delta_k} - \frac{P_{ak}^{\varphi}}{\Delta_k}\right\}T_k,$$

$$\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{P_{ak}^{f}}{\Delta_k} - \frac{P_{bk}^{f}}{\Delta_k}\right\}T_k.$$

дают для формальное решение $w(x,t)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$ обратной задачи (16), (17).

Замечание. Если $f(t) = \delta(t - t_0)$, $\varphi(t) = \delta(t - t_1)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, то

$$\Delta_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin[\sqrt{\lambda_k}(t_1 - t_0)],$$

и в этом случае числовое условие $\sqrt{\lambda_k}(t_1 - t_0) \neq m\pi$, где m — целое число, является условием управляемости. В частности, при $\sqrt{\lambda_k} = k$, число $\frac{1}{\pi}(t_1 - t_0)$ не должно быть рациональным.

References

[1] A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston, Washington, 1977. Zbl 0354.65028

[2] M.M. Lavrent'ev, V.G. Romanov, S.P. Shishatskij, *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, American Mathematical Society, Providence, 1986. Zbl 0593.35003

[3] I. Gelfand, *Some aspects of functional analysis and algebra.* In: *Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam I*, Amsterdam, 1957, 253–276. Zbl 0079.32602

[4] J.W. Forrester, *World Dynamics*, Wright-Allen Press, Cambridge (Mass.), 1971.

[5] S.A. Makhov, *Mathematical modeling of the world dynamics and sustainable development on the model of Forrester.* In: *New in Synergetics. New reality. New Problems. New Generation*, Nauka, Moscow, 2007, 79–101.

[6] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1980. Zbl 0436.05001

[7] I.V. Kuznetsov, M.V. Rodkin, D.V. Serebryakov, O.B. Uryadov, *Hierarchical approach to dynamics of criminality.* In: *New in Synergetics. New reality. New Problems. New Generation*, Nauka, Moscow, 2007, 203–228.

[8] G.G. Malinetskii, I.V. Kuznetsov, A.V. Podlazov, *On national system of scientific monitoring.* In: *New in Synergetics. New reality. New Problems. New Generation*, Nauka, Moscow, 2007, 40–78.

[9] Yu.E. Anikonov, *The identification problem for the functional equation with a parameter*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **20**:4 (2012), 401–409. Zbl 1279.35098

[10] Yu.E. Anikonov, M.V. Neshchadim, *On inverse problems for equations of mathematical physics with parameter*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **9** (2012), 45—64. Zbl 1330.35518

[11] Yu.E. Anikonov, M.V. Neshchadim, *On a method of studying identification problems for the second order equations*, J. Appl. Ind. Math., **13**:1 (2019), 11–21. Zbl 1438.35457

[12] Yu.E. Anikonov, N.B. Ayupova, *Ray expansions and identities for second order equations. Applications to inverse problems*, J. Math. Sci., **231**:2 (2018), 111–123. Zbl 1413.35450

[13] P. Lévy, *Concrete problems of functional analysis*, Gauthier-Villars, Paris, 1951. Zbl 0043.32302

[14] Yu.E. Anikonov, *Formulas in a problem of the search of the symbol of an linear operator*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **8** (2011), 163–167. Zbl 1329.35342

[15] Yu.E. Anikonov, N.B. Ayupova, V.G. Bardakov, V.P. Golubyatnikov, M.V. Neshchadim, *Inversion of mapping and inverse problems*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **9** (2012), 382–432. Zbl 1330.35517

[16] Yu.E. Anikonov, M.V. Neshchadim, *Representations for the solutions and coefficients of second-order differential equations*, J. Appl. Ind. Math., **7**:1 (2013), 15–21. Zbl 1324.35206

[17] Yu.E. Anikonov, M.V. Neshchadim, *Representations for the solutions and coefficients of evolution equations*, J. Appl. Ind. Math., **7**:3 (2013), 326–334. Zbl 1340.35189

[18] N.L. Abasheeva, Yu.E. Anikonov, *Operator formulae in the inverse problems for evolution equations*, J. Math. Sci., **237**:4 (2019), 501–510. Zbl 1438.35453

[19] Yu.E. Anikonov, N.B. Ayupova, *Remarks on identification theory*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **15** (2018), 1091–1102. Zbl 1400.35059

[20] Yu.E. Anikonov, *Functional equations and identification problems*, Sib. Zh. Chist. Prikl. Mat., **18**:2 (2018), 3–12. Zbl 1438.35456

[21] Yu.E. Anikonov, M.P. Vishnevskii, *Reduction of multidimensional inverse problems to initial-boundary value problems in Hilbert spaces*, Sib. Math. J., **35**:3 (1994), 439–458. Zbl 0866.35133

[22] Yu.E. Anikonov, *Analytical representations of solutions to multidimensional inverse problems for evolutionary equations*, Dokl. Math., **54**:3 (1996), 838–841. Zbl 0897.35077

Yurii Evgenievich Anikonov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: anikon@math.nsc.ru