S⓪MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1478–1487 (2020) УДК 519.71
DOI 10.33048/semi.2017.20.103 MSC 08A99

О МИНИМАЛЬНЫХ БАЗИСАХ В ПОЛНОМ ЧАСТИЧНОМ УЛЬТРАКЛОНЕ РАНГА 2

С.А. БАДМАЕВ, И.К. ШАРАНХАЕВ

Abstract. The problem of classification of minimal bases of multifunctions in full partial ultraclone of rank 2 is considered. A description of all types of minimal bases is obtained using the classification of multifunctions with respect to belonging to the maximal partial ultraclones.

Keywords: partial function, multifunction, many-valued logic, superposition, partial ultraclone.

Настоящая работа завершает исследования, начатые в [1, 2, 3], и окончательно решает вопрос об описании всех классов эквивалентности мультифункций по отношению принадлежности максимальным частичным ультраклонам. Этот результат позволил получить описание всех типов минимальных базисов в полном частичном ультраклоне ранга 2.

1. Основные понятия и определения

Пусть $A = \{0,1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$P^{\overline{*}}_{2,n} = \{f | f : A^n \to F\}, P^{\overline{*}}_2 = \bigcup\limits_n P^{\overline{*}}_{2,n}$,

$P^{*}_{2,n} = \{f | f \in P^{\overline{*}}_{2,n}$ и $|f(\tilde{\alpha})| \leq 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P^{*}_2 = \bigcup\limits_n P^{*}_{2,n}$.

$P^{-}_{2,n} = \{f | f \in P^{\overline{*}}_{2,n}$ и $1 \leq |f(\tilde{\alpha})| \leq 2$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P^{-}_2 = \bigcup\limits_n P^{-}_{2,n}$.

Badmaev, S.A., Sharankhaev, I.K., On minimal bases in full partial ultraclone of rank 2.

Работа первого автора поддержана РФФИ (грант 18-31-00020).

Поступила 25 января 2020 г., опубликована 16 сентября 2020 г.

$P_{2,n} = \{f | f \in P_{2,n}^{\overline{*}}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}$.

Функции из P_2 называют функциями алгебры логики, из P_2^* – частичными функциями на A, из P_2^- – гиперфункциями на A, из $P_2^{\overline{*}}$ – мультифункциями на A.

Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)),$$

где $f, f_1, \ldots, f_n \in P_2^{\overline{*}}$, определяла мультифункцию $g(x_1, \ldots, x_m)$, следуя [4, 5], определим значения мультифункции f на наборах из подмножеств множества A следующим образом: если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in A^m$, то

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что пересечение и объединение берутся по всевозможным наборам $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, где $\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

На наборах, содержащих $\varnothing$, мультифункция принимает значение $\varnothing$.

Это определение позволяет вычислить значение $f(x_1, \ldots, x_n)$ на любом наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in F^n$.

Мощность множества A называется рангом частичного ультраклона. Для упрощения записи договоримся использовать следующую кодировку: $\varnothing \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0, 1\} \leftrightarrow -$. Мультифункцию, которая на всех наборах принимает значение $*$, будем обозначать просто $*$.

Из [6] известно, что в полном частичном ультраклоне ранга 2 максимальными частичными ультраклонами являются следующие 12 множеств:

1) K_1 – множество, состоящее из всех мультифункций f, принимающих на нулевом наборе либо значение 0, либо значение $*$;

2) K_2 – множество, состоящее из всех мультифункций f, принимающих на единичном наборе либо значение 1, либо значение $*$;

3) K_3 – множество, состоящее из всех мультифункций f, для которых выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{0}) = *$ или $f(\tilde{1}) = *$;
- $f(\tilde{0}) = 0$ и $f(\tilde{1}) = 1$.

4) K_4 – множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из трех условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = -$;
- $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$.

5) K_5 – множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = *$ или $f(\bar{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$.

6) $K_6 = P_2^- \cup \{*\}$;

7) $K_7 = P_2^*$;

8) K_8 – множество всех мультифункций f, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

- если $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\gamma}) \in \{0, 1\}$, то

$$f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\},$$

  где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что $(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000), (001), (010), (111)\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- если существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde{\beta}$ верно $f(\tilde{\beta}) \neq 1$;
- пусть двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда, если $f(\tilde{\alpha}) = *$, то $f(\tilde{\beta}) = *$.

9) K_9 – множество всех мультифункций f, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

- если $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\gamma}) \in \{0, 1\}$, то

$$f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\},$$

  где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что $(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000), (011), (101), (111)\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- если существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde{\beta}$ верно $f(\tilde{\beta}) \neq 0$;
- пусть двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда, если $f(\tilde{\beta}) = *$, то $f(\tilde{\alpha}) = *$.

10) K_{10} – множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат:
$$R_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & \delta \end{pmatrix},$$ где $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^t$ – всевозможные столбцы, в которых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1, -, *\}$ одновременно удовлетворяют двум условиям:

- в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$ среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ как минимум два принимают значение $*$;
- в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$, если среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ встречается 0 или 1, то все они неравны $-$.

11) K_{11} – множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат

$$R_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & 0 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & 0 & 0 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}.$$

12) K_{12} – множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\tilde{\alpha}^0$ и $\tilde{\alpha}^1$ уточнения набора $\tilde{\alpha}$, в которых все значения $-$ заменили на 0 и 1 соответственно.

Для каждой мультифункции f однозначно определяется вектор принадлежности $\tau(f) = (\tau_1, \dots, \tau_{12})$ классам $K_1 - K_{12}$, в котором для каждого $i \in \{1, \dots, 12\}$
$$\tau_i = \begin{cases} 0, \text{если } f \in K_i; \\ 1, \text{если } f \notin K_i. \end{cases}$$

Отношение принадлежности множествам $K_1 - K_{12}$ является отношением эквивалентности и порождает разбиение $P_2^{\overline{*}}$ на классы эквивалентности, у мультифункций из одного класса векторы принадлежности множествам $K_1 - K_{12}$ совпадают.

Под базисом будем понимать полное множество мультифункций в полном частичном ультраклоне ранга 2. Базис называется минимальным, если после удаления из него любой мультифункции получается множество, не являющееся базисом.

2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе доказываются вспомогательные утверждения необходимые для получения основного результата.

Лемма 1. *Для любой функции $f \in P_2^{\overline{*}} \setminus (P_2^* \cup P_2^-)$ справедливо, что:*

1) если $f \in K_8$, то $f(\tilde{0}) \neq *$ и $f(\tilde{1}) = *$;

2) если $f \in K_9$, то $f(\tilde{0}) = *$ и $f(\tilde{1}) \neq *$;

3) если существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$, то $f \notin K_{10}$.

Доказательство. Следует непосредственно из определений K_8, K_9, K_{10}. □

Лемма 2. *Для любой функции $f \in P_2^{\overline{*}} \setminus (P_2^* \cup P_2^-)$ справедливо, что:*

1) если $f \in K_1 \cap K_2$, то $f \in K_3$;

2) если $f \notin K_1 \cup K_2$, то $f \notin K_3$;

3) если $f \in K_1 \cap K_2 \cap K_{10}$, то $f \notin K_8 \cup K_9$;

4) $f \notin K_8 \cap K_9$.

Доказательство. Справедливость утверждений в пунктах 1) и 2) очевидна.

3) Так как $f \in K_1 \cap K_2$, то $f(\tilde{0}) \in \{0, *\}$ и $f(\tilde{1}) \in \{1, *\}$. Если $f(\tilde{0}) = 0$ или $f(\tilde{1}) = 1$, то в силу пункта 3) леммы 1 получим противоречие условию $f \in K_{10}$. Поэтому $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1}) = *$. Тогда справедливость утверждения легко следует из пунктов 1) и 2) леммы 1.

4) Если $f(\tilde{0}) = *$, то из пункта 1) леммы 1 следует, что $f \notin K_8$. Если $f(\tilde{0}) \neq *$, то из пункта 2) леммы 1 следует, что $f \notin K_9$. □

Лемма 3. *Для любой функции $f \in P_2^{\overline{*}} \setminus (P_2^* \cup P_2^-)$ справедливо, что:*

1) если $f \in K_{11}$, то $f \in (K_1 \cap K_3 \cap K_5) \setminus (K_2 \cup K_4 \cup K_8 \cup K_{12})$;

2) если $f \in K_{11}$, то либо $f \in K_9 \cap K_{10}$, либо $f \notin K_9 \cup K_{10}$;

3) если $f \in K_{12}$, то $f \in (K_2 \cap K_3 \cap K_5) \setminus (K_1 \cup K_4 \cup K_9 \cup K_{11})$;

4) если $f \in K_{12}$, то либо $f \in K_8 \cap K_{10}$, либо $f \notin K_8 \cup K_{10}$.

Доказательство. 1) По условию леммы найдутся наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $f(\tilde{\alpha}) = -$ и $f(\tilde{\beta}) = *$. Если $f(\tilde{0}) = \lambda \neq *$, то $f\begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ * \\ \lambda \end{pmatrix} \notin R_{11}$. Значит

$f(\tilde{0}) = *$, т. е. $f \in K_1 \cup K_3$. Если $f(\tilde{1}) = \mu \neq -$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{1}\\ \tilde{\alpha}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ \mu\\ -\end{pmatrix} \notin R_{11}$. Поэтому $f(\tilde{1}) = -$, т. е. $f \notin K_2$. В силу пункта 1 леммы 1 имеем $f \notin K_8$. Так как $f(\tilde{0}) = *$ и $f(\tilde{1}) = -$, то $f \notin K_4$. Поскольку $f\begin{pmatrix}\tilde{1}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ *\\ -\end{pmatrix} \notin R_{12}$ имеем $f \notin K_{12}$. Предположение, что $f \notin K_5$, которое равносильно существованию набора $\tilde{\gamma}$ такого, что $f(\tilde{\gamma}) = \alpha \neq *$ и $f(\bar{\tilde{\gamma}}) = \beta \neq *$, приводит к противоречию, поскольку $f\begin{pmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{\gamma}\\ \bar{\tilde{\gamma}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\ \lambda\\ \lambda\end{pmatrix} \notin R_{11}$. Поэтому $f \in K_5$.

2) Методом от противного докажем, что ситуация $f \in K_9 \setminus K_{10}$ невозможна. Предположим, что найдется функция f такая, что $f \in K_9$, но $f \notin K_{10}$. Покажем, что функции, обладающей такими свойствами в классах K_9 и K_{11} не существует, иначе из нее с помощью суперпозиции с функциями из этих классов (с константами 0, 1, $-$ и проекциями) можно получить функцию, непринадлежащую этим классам, что противоречит их замкнутости.

Вначале заметим, что $f(\tilde{\delta}) \in \{-, *\}$ для любого набора $\tilde{\delta}$, иначе, если $f(\tilde{\delta}) = 0$, то f не удовлетворяет второму условию в определении класса K_8, а если $f(\tilde{\delta}) = 1$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\delta}\\ \tilde{\alpha}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta\\ 1\\ -\end{pmatrix} \notin R_{11}$, где $\eta \in \{0, 1, -, *\}$, а набор $\tilde{\tau}$ такой, что $(\tau_i \delta_i \alpha_i)^t \in R_{11}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Так как f не сохраняет R_{10}, то найдутся наборы $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$, где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, такие, что $(\alpha_j^1 \alpha_j^2 \alpha_j^3 \alpha_j^4)^t \in R_{10}$ для любого j, но значение функции f на этих наборах представляет набор, который не принадлежит R_{10}, а именно один из наборов $(---*)^t$, $(--*-)^t$, $(-*--)^t$, $(*---)^t$. Обозначим через M матрицу, состоящую из столбцов $(\alpha_j^1 \alpha_j^2 \alpha_j^3 \alpha_j^4)^t \in R_{10}$, где $j \in \{1, \dots, n\}$. Если в матрице M нет каких-то столбцов из R_{10}, то вставим их в M, добавив на соответствующие позиции в функцию f фиктивные переменные. Если в M встречаются столбцы со $*$ на позициях i_1, i_2, то заменим их на столбцы из M, в которых на позициях i_1, i_2 не встречается $*$, а на других позициях те же значения, что и в заменяемом столбце. Далее, если в матрице M встречаются одинаковые столбцы, то в функции f отождествим соответствующие этим столбцам переменные. В результате получим функцию $f'(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$, которая не сохраняет предикат R_{10}, т. е. $f'(M) \notin R_{10}$, где матрица M состоит из столбцов $(0000)^t$, $(0011)^t$, $(0101)^t$, $(1010)^t$, $(1100)^t$, $(1111)^t$, $(0110)^t$, $(1001)^t$, $(----)^t$. Ниже представлен пример одного из вариантов расположения столбцов матрицы M после таких преобразований

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & - \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & - \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & - \end{pmatrix}.$$

Далее покажем, что наборы $(0110)^t, (1001)^t$, которые могут встречаться в M, можно заменить на другие наборы из M без $*$ и при этом $f'(M) \notin R_{10}$.

Так как перестановка строк в матрице M не меняет её, то можно считать, что $f'(M) = (- - - *)^t$.

Рассмотрим только случай $(0110)^t$, случай $(1001)^t$ аналогичен.

Заменим в M столбец $(0110)^t$ на $(1111)^t$, получим $f'(M) = (\sigma_1 - -\sigma_2)^t$, где $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1, -, *\}$. Если среди σ_1, σ_2 встречается одна $*$ или две $*$, то в первом случае замену $(0110)^t$ на $(1111)^t$ оставим без изменений, а во втором случае заменим $(0110)^t$ на $(----)^t$. В результате получим столбец, в котором встречается только одно значение $*$. Если среди σ_1, σ_2 нет $*$, то вместо столбца $(0110)^t$ подставим столбец $(1100)^t$ и получим $f'(M) = (\sigma_1 - \tau *)^t$. Если $\tau \neq *$, то замену оставим без изменений. Если $\tau = *$, то столбец $(0110)^t$ заменим на столбец $(0101)^t$. В результате получим столбец, в котором встречается только одно значение $*$.

Далее заменим столбцы $(0110)^t$,$(1001)^t$ на другие столбцы из M без $*$, затем отождествим переменные и подставим константы 0, 1, $-$. Получим функцию $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ такую, что $g(M) \notin R_{10}$, где матрица M состоит из столбцов $(0011)^t$, $(0101)^t$, $(1010)^t$, $(1100)^t$.

Так как перестановка строк в матрице M равносильна перестановке переменных в g, а доказательство ниже не зависит от расположения столбцов матрицы M, то достаточно рассмотреть случай, когда

$$g\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\-\\-\\*\end{pmatrix}.$$

Имеем $g(0000) = *$, иначе $g\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\*\end{pmatrix}$, что противоречит $g \in K_9$.
Отсюда $g\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\-\\-\end{pmatrix}$, что противоречит $g \in K_{11}$.

Теперь предположим, что $f \in K_{10} \setminus K_9$. В силу пункта 3) леммы 1 функция f может принимать в качестве значений только $-$ и $*$, поэтому не выполняется третье условие в определении класса K_9. Найдутся наборы $\tilde{\sigma}^1$ и $\tilde{\sigma}^2$ такие, что $\sigma_i^1 \leq \sigma_i^2$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $f(\tilde{\sigma}^1) = -$, $f(\tilde{\sigma}^2) = *$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\sigma}^1\\\tilde{\sigma}^2\\\tilde{\sigma}^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\*\\-\end{pmatrix} \notin R_{11}$. Противоречие.

3) Аналогично доказательству пункта 1).

4) Аналогично доказательству пункта 2). □

Лемма 4. *Для любой функции $f \in P_2^{\mp} \setminus (P_2^* \cup P_2^-)$ справедливо, что:*

1) если $f \in K_4$, то $f \notin K_5 \cup K_8 \cup K_9 \cup K_{11} \cup K_{12}$;

2) если $f \in K_4$, то либо $f \in K_1 \cap K_2$, либо $f \notin K_1 \cup K_2$;

3) если $f \notin K_4 \cup K_5$, то $f \notin K_{10}$.

Доказательство. 1) По условию леммы найдутся наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $f(\tilde{\alpha}) = -$ и $f(\tilde{\beta}) = *$. Заметим, что если $f(\tilde{0}) \neq *$, то $f(\tilde{1}) \neq *$, а если $f(\tilde{0}) = *$, то $f(\tilde{1}) = *$. Поэтому из пунктов 1) и 2) леммы 1 получим $f \notin K_8 \cup K_9$. Из $f \in K_4$ следует, что $f(\bar{\tilde{\alpha}}) = -$, поэтому $f \notin K_5$. Из леммы 3 следует, что $f \notin K_{11} \cup K_{12}$.

2) Из $f \in K_4$ следует, что если $f(\tilde{0}) \in \{0,*\}$, то $f(\tilde{1}) \in \{1,*\}$, а если $f(\tilde{0}) \in \{1,-\}$, то $f(\tilde{1}) \in \{0,-\}$. Поэтому либо $f \in K_1 \cap K_2$, либо $f \notin K_1 \cup K_2$.

3) Так как $f \notin K_4 \cup K_5$, то либо найдется набор $\tilde{\gamma}$ такой, что $f(\tilde{\gamma}) \in \{0,1\}$, либо наборы $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\delta}$ такие, что $f(\tilde{\sigma}) = f(\bar{\tilde{\sigma}}) = -$ и $f(\tilde{\delta}) = -$, $f(\bar{\tilde{\delta}}) = *$. В первом случае справедливость утверждения следует из пункта 3) леммы 1. Во втором случае имеем $f\begin{pmatrix}\tilde{\sigma}\\ \bar{\tilde{\sigma}}\\ \tilde{\delta}\\ \bar{\tilde{\delta}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\-\\-\\*\end{pmatrix} \notin R_{10}$, т. е. $f \notin K_{10}$. □

Лемма 5. *Для любой функции $f \in P_2^{\overline{*}} \setminus (P_2^* \cup P_2^-)$ справедливо, что:*
1) если $f \notin K_1$, то $f \notin K_9 \cup K_{11}$;
2) если $f \notin K_2$, то $f \notin K_8 \cup K_{12}$.

Доказательство. 1) Так как $f(\tilde{0}) \in \{1,-\}$, то $f \notin K_9$. В силу пункта 1) леммы 3 получим, что $f \notin K_{11}$.

2) Аналогично доказательству пункта 1). □

Лемма 6. *Для любой функции $f \in P_2^{\overline{*}} \setminus (P_2^* \cup P_2^-)$ справедливо, что:*
1) если $f \in K_9 \cap K_{10}$, то $f \in K_{11}$;
2) если $f \in K_8 \cap K_{10}$, то $f \in K_{12}$.

Доказательство. 1) От противного. Предположим, что $f \notin K_{11}$. Допустим, существуют наборы $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$, где $i \in \{1,2,3\}$, такие, что $(\alpha_j^1\alpha_j^2\alpha_j^3)^t \in R_{11}$ для любого j, но значение функции f на этих наборах представляет набор, который не принадлежит R_{11}. Так как $f \in K_{10}$, то по пункту 3) леммы 1 функция f принимает в качестве значений только $-$ и $*$. Поэтому $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\alpha}^2\\ \tilde{\alpha}^3\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}-\\-\\*\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\*\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\-\\-\end{pmatrix}\right\}$. Так как перестановка строк в R_{11} не меняет его, то достаточно рассмотреть только случай $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\alpha}^2\\ \tilde{\alpha}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\-\\*\end{pmatrix}$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\alpha}^2\\ \tilde{\alpha}^3\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\-\\*\\ \mu\end{pmatrix}$, где набор $\tilde{\tau}$ такой, что $(\alpha_i^1\alpha_i^2\alpha_i^3\tau_i)^t \in R_{10}$ для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. Если $\mu = *$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\*\end{pmatrix}$, при этом $(\alpha_i^1\tau_i)^t \in \{(00)^t, (01)^t, (11)^t\}$ для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. Противоречие $f \in K_9$, поэтому $\mu = -$. Но в этом случае имеем противоречие условию $f \in K_{10}$.

2) Аналогично доказательству пункта 1). □

Лемма 7. *Для любой функции $f \in P_2^{\overline{*}} \setminus (P_2^* \cup P_2^-)$ справедливо, что:*
1) если $f \in K_1 \setminus (K_2 \cup K_3)$, то $f \notin K_4 \cup K_5 \cup K_8 \cup K_9 \cup K_{10} \cup K_{11} \cup K_{12}$;
2) если $f \in K_2 \setminus (K_1 \cup K_3)$, то $f \notin K_4 \cup K_5 \cup K_8 \cup K_9 \cup K_{10} \cup K_{11} \cup K_{12}$.

Доказательство. 1) Так как $f(\tilde{0}) = 0$, $f(\tilde{1}) \in \{0,-\}$, то $f \notin K_4 \cup K_5$. В силу леммы 1 получим, что $f \notin K_8 \cup K_9 \cup K_{10}$. Из леммы 3 следует, что $f \notin K_{11} \cup K_{12}$.

2) Аналогично доказательству пункта 1). □

Лемма 8. *Для любой функции $f \in P_2^{\overline{*}} \setminus (P_2^* \cup P_2^-)$ верно, что если $f \notin K_1 \cup K_2 \cup K_4$, то $f \notin K_8 \cup K_9 \cup K_{10} \cup K_{11} \cup K_{12}$.*

Доказательство. 1) Так как $f(\tilde{0}) \in \{1, -\}$, $f(\tilde{1}) \in \{0, -\}$, то в силу леммы 1 получим, что $f \notin K_8 \cup K_9$. Если существует набор $\tilde{\gamma}$ такой, что $f(\tilde{\gamma}) \in \{0, 1\}$, то из пункта 3) леммы 1 получим, что $f \notin K_{10}$. Поэтому $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1}) = -$. Так как $f \notin K_4$, то существует набор $\tilde{\delta}$ такой, что $f(\tilde{\delta}) = -$, $f(\bar{\tilde{\delta}}) = *$. Тогда $f \begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{\delta} \\ \bar{\tilde{\delta}} \\ \tilde{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ * \\ - \end{pmatrix} \notin R_{10}$. Из леммы 3 следует, что $f \notin K_{11} \cup K_{12}$. □

3. Описание классов эквивалентности мультифункций

Теорема 1. [1] *Существует ровно 15 классов эквивалентности функций алгебры логики по отношению принадлежности максимальным частичным ультраклонам ранга 2.*

Теорема 2. [2] *Существует ровно 49 классов эквивалентности частичных функций по отношению принадлежности максимальным частичным ультраклонам ранга 2.*

Теорема 3. [3] *Существует ровно 28 классов эквивалентности гиперфункций по отношению принадлежности максимальным частичным ультраклонам ранга 2.*

Теорема 4. *Существует ровно 29 классов эквивалентности функций из $P_2^{\overline{*}} \setminus (P_2^* \cup P_2^-)$ по отношению принадлежности максимальным частичным ультраклонам ранга 2.*

Доказательство. Из пунктов 1) и 2) леммы 2 следует, что для любой функции f, у которой вектор принадлежности максимальным частичным ультраклонам $K_1 - K_{12}$ имеет вид $(\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5 11\tau_8\tau_9\tau_{10}\tau_{11}\tau_{12})$, набор $(\tau_1\tau_2\tau_3)$ должен совпадать с одним из следующих наборов (000), (010), (011), (100), (101), (111). Рассмотрим все варианты.

Пусть $(\tau_1\tau_2\tau_3) = (000)$, т. е. $f \in K_1 \cap K_2 \cap K_3$. Если $f \in K_4$, то в силу пункта 1) леммы 4 существует не более двух классов, содержащих f. Из лемм 2, 3 и 4 можно получить следующие выводы. Если $f \in K_5 \cap K_{10}$, то существует не более одного класса, содержащего f. Если $f \in K_5 \setminus K_{10}$, то существует не более трех классов, содержащих f. Если $f \notin K_5 \cup K_{10}$, то существует не более трех классов, содержащих f. Случай, когда $f \in K_{10} \setminus K_5$, невозможен. Таким образом, число классов эквивалентности, в которые входят функции, одновременно принадлежащие K_1, K_2, K_3, не превосходит 9.

Пусть $(\tau_1\tau_2\tau_3) = (010)$ (при $(\tau_1\tau_2\tau_3) = (100)$ ситуация аналогична). Если $f \in K_{11}$ ($f \in K_{12}$), то по лемме 3 существует не более двух классов, содержащих f. Из лемм 3, 4, 5, 6 следует, что если $f \in K_5 \setminus K_2$ ($f \in K_5 \setminus K_1$), то существует не более трех классов, содержащих f, а если $f \notin K_2 \cup K_5$ ($f \notin K_1 \cup K_5$), то существует не более двух классов, содержащих f. Таким образом, число классов эквивалентности, которые содержат функции, принадлежащие множеству $(K_1 \cup K_3) \setminus K_2$ ($(K_2 \cup K_3) \setminus K_1$), не превосходит 7.

Пусть $(\tau_1\tau_2\tau_3) = (011)$ (при $(\tau_1\tau_2\tau_3) = (101)$ ситуация аналогична). В этом случае по лемме 7 существует не более одного класса, содержащего f.

Пусть $(\tau_1\tau_2\tau_3) = (111)$. Если $f \in K_4$, то по лемме 4 существует не более двух классов, содержащих f, в противном случае по лемме 7 также существует не более двух классов. Следовательно, число классов эквивалентности, в которые входят функции, не принадлежащие ни одному из K_1, K_2, K_3, не превосходит 4.

Все варианты рассмотрены. В итоге существует не более 29 классов эквивалентности функций, удовлетворяющих условиям теоремы.

Компьютерный эксперимент (полный перебор) установил, что для функций от трех переменных из $P_2^{\overline{*}} \setminus (P_2^* \cup P_2^-)$ существует ровно 29 классов. Ниже в таблице приведены векторы принадлежности максимальным частичным ультраклонам и соответствующие им функции.

№	$\tau(f)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	№	$\tau(f)$	$f(x_1,x_2,x_3)$
1	(000011111011)	$(*--**--*)$	16	(010111111111)	$(*000000-)$
2	(000011111111)	$(00-**-11)$	17	(011111111111)	$(000000*-)$
3	(000101101111)	$(000-****)$	18	(100101101010)	$(----****)$
4	(000101110111)	$(*1*1*-*1)$	19	(100101101111)	$(-000****)$
5	(000101111011)	$(*--*****)$	20	(100101111011)	$(-**-*--*)$
6	(000101111111)	$(000-*111)$	21	(100101111110)	$(-111****)$
7	(000111101111)	$(000000-*)$	22	(100101111111)	$(100-*11*)$
8	(000111110111)	$(*11111-1)$	23	(100111101111)	$(-000000*)$
9	(000111111111)	$(000001-*)$	24	(100111111111)	$(100000-*)$
10	(010101110001)	$(*-*-*-*-)$	25	(101111111111)	$(10000-*1)$
11	(010101110111)	$(*1*1*1*-)$	26	(111011111011)	$(--****--)$
12	(010101111011)	$(*--*-**-)$	27	(111011111111)	$(10-**-10)$
13	(010101111101)	$(*0*0*0*-)$	28	(111101111111)	$(100-*110)$
14	(010101111111)	$(*000111-)$	29	(111111111111)	$(100000*-)$
15	(010111110111)	$(*111111-)$			

$\square$

Теорема 5. *Существует ровно 91 класс эквивалентности мультифункций по отношению принадлежности максимальным частичным ультраклонам ранга 2.*

Доказательство. Следует из теорем 1, 2, 3 и 4. $\square$

4. Заключение

Таким образом, имея полное описание векторов принадлежности мультифункций максимальным частичным ультраклонам, легко получается описание всех типов минимальных базисов. С помощью программы на языке C++ было выяснено, что имеется 1 тип таких базисов мощности 1, 690 типов базисов мощности 2, 7940 типов базисов мощности 3, 2830 типов базисов мощности 4, минимальных базисов большей мощности не существует.

References

[1] S.A. Badmaev, *On the classes of Boolean functions generated by maximal partial ultraclones*, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **27** (2019), 3–14. Zbl 07105743

[2] S.A. Badmaev, I.K. Sharankhaev, *On the classes of partial functions generated by maximal partial ultraclones*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **17** (2020), 32–46. Zbl 1435.08002
[3] S.A. Badmaev, *Classification of Hyperfunctions of Rank 2 with Respect to Membership in the Maximal Partial Ultraclones*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **12**:5 (2019), 645–652.
[4] V.I. Panteleyev, *On two maximal multiclones and partial ultraclones*, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **5**:4 (2012), 46–53. Zbl 1304.08003
[5] S.A. Badmaev, I.K. Sharankhaev, *On maximal clones of partial ultrafunctions on a two-element set*, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **16** (2016), 3–18. Zbl 1350.08002
[6] S.A. Badmaev, *A Completeness Criterion of Set of Multifunctions in Full Partial Ultraclone of Rank 2*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **15** (2018), 450–474. Zbl 1436.08003

Sergey Alexandrovich Badmaev, Ivan Konstantinovich Sharankhaev
Buryat State University,
24a, Smolina str.,
Ulan-Ude, 670000, Russia
Email address: `badmaevsa@mail.ru, goran5@mail.ru`