S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1352–1358 (2020) УДК 512.53, 512.58
DOI 10.33048/semi.2020.17.099 MSC 18D35

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ ЧУ В КАТЕГОРИИ $Chu(S - Act)$

А.А. СТЕПАНОВА, Е.Е. СКУРИХИН, А.Г. СУХОНОС

Abstract. The necessary conditions for the existence of products of Chu spaces in the category $Chu(S - Act)$ over the category of S-acts are obtained. It is proved the existence of a product of Chu spaces $r_i : A_i \otimes X_i \longrightarrow D_i$ ($i \in I$) in the category $Chu(S - Act)$ in the cases of X_i are zero polygons for any $i \in I$ or D_i are zero polygons for any $i \in I$.
Keywords: chu spaces, chu construction, S-Act, monoidal category, limit, functor, product.

1. Введение

Пусть $\mathcal{V}$ – моноидальная категория с произведением $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Пространством Чу над категорией $\mathcal{V}$ называется произвольный морфизм $r : A \otimes X \to D$ категории $\mathcal{V}$. Совокупности всех пространств Чу над $\mathcal{V}$ с фиксированным объектом D рассматривается как категория $Chu(\mathcal{V}, D)$ [1]. При этом морфизмом из объекта $r_1 : A_1 \otimes X_1 \to D$ в объект $r_2 : A_2 \otimes X_2 \to D$ называется пара морфизмов (f, g), $f : A_1 \to A_2$, $g : X_2 \to X_1$ такие, что $r_1 \circ (1_{A_1} \otimes g) = r_2 \circ (f \otimes 1_{X_2})$. Категория $Chu(\mathcal{V}, D)$ для различных категорий $\mathcal{V}$ изучалась [2, 6] в связи с возможностью интерпретировать в терминах пространств Чу различные объекты топологии, алгебры, computer science, теории игр.

В работах [7, 8] рассматривались категории пространств Чу для случая, когда $\mathcal{V}$ является категорией S-полигонов, где S – коммутативный моноид. При этом наряду с категорией $Chu(\mathcal{V}, D)$ рассматривалась категория $Chu(\mathcal{V})$, всех пространств Чу $r : A \otimes X \to D$, где D не фиксировано. Если $r_1 : A_1 \otimes X_1 \to D_1$

Stepanova, A.A., Skurihin, E.E., Sukhonos, A.G., Product of Chu spaces in the category of $Chu(S - Act)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, дополнительное соглашение от 21.04.2020 № 075-02-2020-1482-1.

Поступила 5 июля 2020 г., опубликована 14 сентября 2020 г.

и $r_2 : A_2 \otimes X_2 \to D_2$ – пространства Чу, то морфизмом $(f, g, h) : (A_1 \otimes X_1 \to D_1) \longrightarrow (A_2 \otimes X_2 \to D_2)$ в категории $Chu(\mathcal{V})$ называется тройка морфизмов $f : A_1 \longrightarrow A_2$, $g : X_2 \longrightarrow X_1$, $h : D_1 \longrightarrow D_2$ категории $\mathcal{V}$ такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_1 \otimes X_2 \arrow[rr, "f\otimes 1_{X_2}"] \arrow[d, "1_{A_1}\otimes g"'] & & A_2 \otimes X_2 \arrow[d, "r_2"] \\
A_1 \otimes X_1 \arrow[r, "r_1"'] & D_1 \arrow[r, "h"'] & D_2
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $h \circ r_1 \circ (1_{A_1} \otimes g) = r_2 \circ (f \otimes 1_{X_2})$.

В отличии от категории $Chu(\mathcal{V}, D)$, обладающей "хорошими"категорными свойствами, категория $Chu(\mathcal{V})$ оказывается не полной, так что встает вопрос об условиях существования пределов и копределов. В [7] доказано, что копроизведения и коуравнители в категории $Chu(\mathcal{V})$ существуют, а также приведен пример, когда у пары морфизмов не существует уравнителя. В представленной работе описываются некоторые классы пространств Чу, для которых существуют произведения. Даются условия, которым должно уловлетворять произведение, если оно существует. Однако общий вопрос об условиях существования и описания пределов в категории $Chu(\mathcal{V})$ остается открытым.

2. Предварительные сведения

Приводимые ниже понятия и факты из теории полигонов можно найти в [3, 4].

Пусть S – моноид, 1 – единица моноида S. Множество A называется левым S-полигоном (или просто полигоном), если существует отображение $S \times A \longrightarrow A$, $(s, a) \mapsto sa$, такое, что для любых $a \in A$ и $s, t \in S$

$$1a = a \text{ и } s(ta) = (st)a.$$

Иными словами, полигон – это множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно. Элемент $\theta \in A$ такой, что $s\theta = \theta$ для любого $s \in S$, называется нулем полигона A. Одноэлементный полигон $\Theta = \{\theta\}$ называется нулевым полигоном.

Конгруэнцией полигона A называется отношение эквивалентности θ на A такое, что

$$(a, b) \in \theta \Rightarrow (sa, sb) \in \theta$$

для любых $a, b \in A$, $s \in S$. Класс конгруэнции θ полигона A с представителем a обозначается через a/θ. Конгруэнцией полигона A, порожденной множеством $I \subseteq A^2$, называется наименьшая относительно включения конгруэнция полигона A, содержащая I.

Отображение $f : A \longrightarrow B$ такое, что $f(sa) = sf(a)$ для любых $a \in A$, $s \in S$, называется морфизмом из полигона A в полигон B. Пусть $g_1, g_2 : B \to A$ – морфизмы. Через $\nu(g_1, g_2)$ обозначим конгруэнцию полигона A, порожденную множеством $\{(g_1(b), g_2(b))\} \mid b \in B\}$. Тождественное отображение из полигона A в полигон A обозначается через 1_A.

Класс всех полигонов над моноидом S с морфизмами образует категорию, которую будем обозначать через $S - Act$.

Пустой полигон является инициальным объектом категории $S-Act$, нулевой полигон является терминальным объектом категории $S-Act$.

В категории $S-Act$ произведением полигонов A_i, $i \in I$, является декартовое произведение $\prod\limits_{i\in I} A_i$, действие моноида S на котором определяется покомпонентно; копроизведением полигонов A_i, $i \in I$, является их дизъюнктное объединение $\coprod\limits_{i\in I} A_i$.

Для коммутативного моноида S тензорное произведение $A \otimes B$ полигонов A и B определяется как фактор-полигон полигона $A \times B$ по конгруэнции, порожденной множеством $\{(sa, b), (a, sb) \mid a \in A, b \in B, s \in S\}$. Для $a \in A$ и $b \in B$ класс конгруэнции с представителем (a, b) будем обозначать $a \otimes b$. Заметим, что действие моноида S на множестве $A \otimes B$ обладает следующим свойством:

$$s(a \otimes b) = sa \otimes b = a \otimes sb$$

для любых $a \in A, b \in B, s \in S$.

В работе [7] показывается, что $S-Act$ – симметричная моноидально замкнутая категория и применяется конструкция Чу к категории $S-Act$, где S – коммутативный моноид, вводится в рассмотрение категория $Chu(S-Act)$.

3. Основные результаты

Напомним, что объект A категории $\mathcal{C}$ называется ретрактом объекта B категории $\mathcal{C}$ [5], если существуют морфизмы $f : A \longrightarrow B$ и $g : B \longrightarrow A$ категории $\mathcal{C}$ такие, что $g \circ f = id_A$.

Теорема 1. *Пусть $r : A\otimes X \longrightarrow D$ и $r_i : A_i\otimes X_i \longrightarrow D_i$ ($i \in I$) – пространства Чу в категории $Chu(S-Act)$, $(f_i, g_i, h_i) : r \longrightarrow r_i$ ($i \in I$) – преобразования Чу и пространство Чу r вместе с преобразованиями Чу (f_i, g_i, h_i) является произведением пространств Чу r_i ($i \in I$). Тогда*

1) полигон $\coprod\limits_{i\in I} X_i$ является ретракт полигона X;

2) полигон $\prod\limits_{i\in I} D_i$ является ретрактом полигона D;

3) если для любого $i \in I$ в полигоне X_i существует одноэлементный подполигон $\Theta_i = \{\theta_i\}$, то полигон $\prod\limits_{i\in I} A_i$ является ретрактом полигона A.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются.

Докажем 1). Пусть пространство Чу $t : A\otimes \coprod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow D$ задается следующим образом: $t(a\otimes x_i) = r(a\otimes g_i(x_i))$, где $a \in A$ и $x_i \in X_i$; g_i' – естественное вложение полигона X_i в полигон $\coprod\limits_{i\in I} X_i$. Из равенств

$$h_i \circ t(a \otimes g_i'(x_i)) = h_i \circ t(a \otimes x_i) = h_i \circ r(a \otimes g_i(x_i)) = r_i(f_i(a) \otimes x_i),$$

где $a \in A$ и $x_i \in X_i$ ($i \in I$), следует, что $(f_i, g_i', h_i) : t \longrightarrow r_i$ – преобразование Чу ($i \in I$). Поскольку пространство Чу r вместе с преобразованием Чу (f_i, g_i, h_i) является произведением пространств Чу r_i, $i \in I$, то существует преобразование Чу $(\varphi, \psi, \chi) : t \longrightarrow r$ такое, что $(f_i, g_i, h_i) \circ (\varphi, \psi, \chi) = (f_i, g_i', h_i)$ для любого $i \in I$. Следовательно, $g_i' = \psi \circ g_i$ для любого $i \in I$.

Пусть гомоморфизм полигонов $g : \coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow X$ задается следующим образом: $g(x_i) = g_i(x_i)$ для любого $x_i \in X_i$. Тогда

$$\psi(g(x_i)) = \psi(g_i(x_i)) = g_i'(x_i) = x_i$$

для любого $x_i \in X_i$, т.е. $\psi \circ g = id_{\coprod_{i\in I} X_i}$. Следовательно, $\coprod_{i\in I} X_i$ является ретрактом X.

Докажем 2). Пусть пространство Чу $t : A\otimes X \longrightarrow \prod_{i\in I} D_i$ задается следующим образом: $t(a \otimes x) = (h_j \circ r(a \otimes x))_{j\in I}$, где $a \in A$ и $x \in X$; $h_i' : \prod_{j\in I} D_j \longrightarrow D_i$ задается равенством $h_i'((d_j)_{j\in I}) = d_i$ для любого $(d_j)_{j\in I} \in \prod_{j\in I} D_j$. Из равенств

$$h_i' \circ t(a \otimes g_i(x_i)) = h_i' \circ (h_j \circ r(a \otimes g_i(x_i)))_{j\in I} = h_i \circ r(a \otimes g_i(x_i)) = r_i(f_i(a) \otimes x_i),$$

где $a \in A$ и $x_i \in X_i$ $(i \in I)$, следует, что $(f_i, g_i, h_i') : t \longrightarrow r_i$ – преобразование Чу $(i \in I)$. Поскольку пространство Чу r вместе с преобразованием Чу (f_i, g_i, h_i) является произведением пространств Чу r_i $(i \in I)$, то существует преобразование Чу $(\varphi, \psi, \chi) : t \longrightarrow r$ такое, что $(f_i, g_i, h_i) \circ (\varphi, \psi, \chi) = (f_i, g_i, h_i')$ для любого $i \in I$. Следовательно, $h_i' = h_i \circ \chi$ для любого $i \in I$.

Пусть гомоморфизм полигонов $h : D \longrightarrow \prod_{i\in I} D_i$ задается следующим образом: $h(d) = (h_i(d))_{i\in I}$ для любого $d \in D$. Тогда

$$h(\chi((d_j)_{j\in I})) = (h_i(\chi((d_j)_{j\in I})))_{i\in I} = (h_i'((d_j)_{j\in I}))_{i\in I} = (d_i)_{i\in I}$$

для любого $d_i \in D_i \in \prod_{i\in I} D_i$, т.е. $h \circ \chi = id_{\prod_{i\in I} D_i}$. Следовательно, $\prod_{i\in I} D_i$ является ретрактом D.

Докажем 3). Пусть для любого $i \in I$ в полигоне X_i существует одноэлементный подполигон $\Theta_i = \{\theta_i\}$. Пусть пространство Чу $t : \prod_{i\in I} A_i \otimes \coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} D_i$ задается следующим образом: $t((a_j)_{j\in I} \otimes x_i) = (r_j(a_j \otimes y_j))_{j\in I}$, где $(a_j)_{j\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, $y_i = x_i \in X_i$ и $y_k = \theta_k$ для любого $k \in I\backslash\{i\}$. Поскольку для любых $(a_j)_{j\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, $x_i \in X_i$, $s \in S$ и $i \in I$ имеют место равенства

$$t((a_j)_{j\in I} \otimes sx_i) = t(s(a_j)_{j\in I} \otimes x_i) = t((sa_j)_{j\in I} \otimes x_i) =$$
$$= (r_j(sa_j \otimes y_j))_{j\in I} = (r_j(a_j \otimes sy_j))_{j\in I}$$

и $sy_k = s\theta_k = \theta_k = y_k$, где $k \in I\backslash\{i\}$, то гомоморфизм t определен корректно. Пусть $f_i' : \prod_{j\in I} A_j \longrightarrow A_i$ задается равенством $f_i'((a_j)_{j\in I}) = a_i$ для любого $(a_j)_{j\in I} \in \prod_{j\in I} A_j$, $h_i' : \prod_{j\in I} D_j \longrightarrow D_i$ задается равенством $h_i'((d_j)_{j\in I}) = d_i$ для любого $(d_j)_{j\in I} \in \prod_{j\in I} D_j$, g_i' – естественное вложение полигона X_i в полигон $\coprod_{i\in I} X_i$ $(i \in I)$. Из равенств

$$h_i' \circ t((a_j)_{j\in I} \otimes g_i'(x_i)) = h_i'((r_j(a_j \otimes y_j))_{j\in I}) =$$
$$= r_i(a_i \otimes x_i) = r_i(f_i'((a_j)_{j\in I}) \otimes x_i),$$

где $(a_j)_{j\in I} \in \prod_{j\in I} A_j$, $y_i = x_i \in X_i$, $y_k = \theta_k$, $(k \in I\backslash\{i\})$ и $i \in I$, следует, что $(f_i', g_i', h_i') : t \longrightarrow r_i$ – преобразование Чу $(i \in I)$. Поскольку пространство Чу

r вместе с преобразованием Чу (f_i, g_i, h_i) является произведением пространств Чу r_i $(i \in I)$, то существует преобразование Чу $(\varphi, \psi, \chi) : t \longrightarrow r$ такое, что $(f_i, g_i, h_i) \circ (\varphi, \psi, \chi) = (f'_i, g'_i, h'_i)$ для любого $i \in I$. Следовательно, $f'_i = f_i \circ \varphi$, $g'_i = \psi \circ g_i$, $h'_i = h_i \circ \chi$ для любого $i \in I$.

Пусть гомоморфизм полигонов $f : A \longrightarrow \prod\limits_{i \in I} A_i$ задается следующим образом: $f(a) = (f_i(a))_{i \in I}$ для любого $a \in A$. Тогда

$$f(\varphi((a_j)_{j \in I})) = (f_i(\varphi((a_j)_{j \in I})))_{i \in I} = (f'_i((a_j)_{j \in I}))_{i \in I} = (a_j)_{j \in I}$$

для любого $a_i \in A_i \in \prod\limits_{i \in I} A_i$, т.е. $f \circ \varphi = id_{\prod\limits_{i \in I} A_i}$. Следовательно, $\prod\limits_{i \in I} A_i$ является ретрактом A. $\square$

Теорема 2. *Пусть $r_i : A_i \otimes X_i \longrightarrow \Theta_i$, – пространства Чу в категории $Chu(S - Act)$, $\Theta_i = \{\theta_i\}$ – одноэлементный полигон ($i \in I$). Тогда существует произведение пространств Чу r_i, $i \in I$.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются, пространство Чу $r : \prod\limits_{i \in I} A_i \otimes \coprod\limits_{i \in I} X_i \longrightarrow \Theta$, где $\Theta = \{\theta\}$ – одноэлементный полигон, задается следующим образом: $r((a_j)_{j \in I} \otimes x_i) = \theta$, где $(a_j)_{j \in I} \in \prod\limits_{i \in I} A_i$ и $x_i \in X_i$; $f_i : \prod\limits_{j \in I} A_j \longrightarrow A_i$ задается равенством $f_i((a_j)_{j \in I}) = a_i$ для любого $(a_j)_{j \in I} \in \prod\limits_{j \in I} A_j$, $h_i : \Theta \longrightarrow \Theta_i$ задается равенством $h_i((d_j)_{j \in I}) = d_i$ и g_i – естественное вложение полигона X_i в полигон $\coprod\limits_{i \in I} X_i$. Ясно, что $(f_i, g_i, h_i) : r \longrightarrow r_i$ – преобразованием Чу.

Покажем, что пространство Чу r вместе с преобразованиями Чу $(f_i, g_i, h_i) : r \longrightarrow r_i$ является произведением пространств Чу r_i, $i \in I$. Пусть $t : B \otimes Y \longrightarrow D$ – пространство Чу, $(f'_i, g'_i, h'_i) : t \longrightarrow r_i$ – преобразования Чу $(i \in I)$. Поскольку $\prod\limits_{i \in I} A_i$ – произведение полигонов A_i $(i \in I)$, то существует единственный гомоморфизм $\varphi : B \longrightarrow \prod\limits_{i \in I} A_i$ полигонов такой, что $f_i \circ \varphi = f'_i$. Поскольку $\coprod\limits_{i \in I} X_i$ – копроизведение полигонов X_i $(i \in I)$, то существует единственный гомоморфизм $\psi : \coprod\limits_{i \in I} X_i \longrightarrow Y$ полигонов такой, что $\psi \circ g_i = g'_i$. Пусть $\chi_i : D \longrightarrow \Theta$. Тогда $(\varphi, \psi, \chi) : t \longrightarrow r$ – преобразование Чу. $\square$

Теорема 3. *Пусть $r_i : A_i \otimes \Theta_i \longrightarrow D_i$, – пространства Чу в категории $Chu(S - Act)$ и $\Theta_i = \{\theta_i\}$ – одноэлементные полигоны. Тогда существует произведение пространств Чу r_i, $i \in I$.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются, $\{\theta_i^{j_i} \mid j_i \in J_i\}$ – все нули полигонов D_i, $r_i(a_i \otimes \theta_i) = \theta_i^{\gamma(a_i)}$, где $a_i \in A_i$, $\gamma(a_i) \in J_i$, $J_i^0 = \{\gamma(a_i) \mid a_i \in A_i\}$. Пусть

$$L = \{l \in (\prod_{i \in I} J_i^{J_i^0})^I \mid \forall i \in I \forall a_i \in A_i((l(i))(i)(\gamma(a_i)) = \gamma(a_i) \wedge$$
$$\wedge \forall n \in I(n \neq i \Rightarrow |(l(i))(n)(\gamma(J_n^0))| = 1)).$$

Пусть A_n^l – копии полигона A_n, a_n^l – копии элементов $a_n \in A_n$ $(n \in I, l \in L)$ и пространство Чу $r : \coprod\limits_{l \in L} \prod\limits_{n \in I} A_n^l \otimes \coprod\limits_{n \in I} \Theta_n \longrightarrow \prod\limits_{n \in I} D_n$ задается следующим образом: $r(\bar{a} \otimes \theta_i) = (\theta_n^{n(\bar{a}, i, l)})_{n \in I}$, где $\bar{a} = (a_n^l)_{n \in I} \in \prod\limits_{n \in I} A_n^l$, $n(\bar{a}, i, l) =$

$((l(i))(n))(\gamma(a_n)) \in J_n$, $l \in L$, $i \in I$. Заметим, что $i(\bar{a}, i, l) = ((l(i))(i))(\gamma(a_i)) = \gamma(a_i)$ для любого $i \in I$. Для $i \in I$ пусть $f_i : \coprod\limits_{l\in L}\prod\limits_{n\in I} A_n^l \longrightarrow A_i$ задается равенством $f_i((a_n^l)_{n\in I}) = a_i$ для любых $(a_n^l)_{n\in I} \in \prod\limits_{n\in I} A_n^l$, $l \in L$; $h_i : \prod\limits_{n\in I} D_n \longrightarrow D_i$ задается равенством $h_i((d_n)_{n\in I}) = d_i$ для любого $(d_n)_{n\in I} \in \prod\limits_{n\in I} D_n$; g_i – естественное вложение полигона Θ_i в полигон $\coprod\limits_{n\in I} \Theta_n$. Из равенств

$$h_i \circ r(\bar{a} \otimes g_i(\theta_i)) = h_i \circ r(\bar{a} \otimes \theta_i) = h_i((\theta_n^{n(\bar{a},i,l)})_{n\in I}) =$$
$$= \theta_i^{i(\bar{a},i,l)} = \theta_i^{\gamma(a_i)} = r_i(a_i \otimes \theta_i) = r_i(f_i(\bar{a}) \otimes \theta_i),$$

где $\bar{a} = (a_n^l)_{n\in I} \in \prod\limits_{n\in I} A_n^l$, $l \in L$, следует, что $(f_i, g_i, h_i) : r \longrightarrow r_i$ – преобразование Чу.

Покажем, что пространство Чу r вместе с преобразованиями Чу $(f_i, g_i, h_i) : r \longrightarrow r_i$ является произведением пространств Чу r_i, $i \in I$. Пусть $t : B \otimes Y \longrightarrow D$ – пространство Чу, $(f_i', g_i', h_i') : t \longrightarrow r_i$ – преобразования Чу ($i \in I$). Заметим, что $g_i'(\theta_i)$ – ноль в полигоне Y, тогда $t(b \otimes g_i'(\theta_i))$ – ноль в полигоне D; следовательно, $h_n' \circ t(b \otimes g_i'(\theta_i)) = \theta_n^{\bar{n}(b,i)}$ – ноль в полигоне D_n, где $\bar{n}(b,i) \in J_n$, $b \in B$, $i, n \in I$. Так как $h_i' \circ t(b \otimes g_i'(\theta_i)) = r_i(f_i'(b) \otimes \theta_i) = \theta_i^{\gamma(f_i'(b))}$, то $\bar{i}(b,i) = \gamma(f_i'(b))$.

Поскольку $\coprod\limits_{n\in I} \Theta_n$ – копроизведение полигонов Θ_n ($n \in I$), то существует единственный гомоморфизм $\psi : \coprod\limits_{i\in I} \Theta_i \longrightarrow Y$ такой, что $\psi \circ g_i = g_i'$, а именно, $\psi(\theta_i) = g_i'(\theta_i)$ для любого $i \in I$. Поскольку $\prod\limits_{n\in I} D_n$ – произведение полигонов D_n ($n \in I$), то существует единственный гомоморфизм $\chi : D \longrightarrow \prod\limits_{n\in I} D_n$ такой, что $h_i \circ \chi = h_i'$, а именно, $\chi(d) = (h_n'(d))_{n\in I}$ для любого $d \in D$. Построим гомоморфизм $\varphi : B \longrightarrow \coprod\limits_{l\in L}\prod\limits_{n\in I} A_n^l$ следующим образом: $\varphi(b) = ((f_n'(b))^{l_b})_{n\in I}$, где $b \in B$ и $l_b \in L$ определяется соотношениями:

$$((l_b(i))(i))(\gamma(a_i)) = \gamma(a_i),$$
$$((l_b(i))(n))(\gamma(a_n)) = \bar{n}(b,i)$$

для любых $i, n \in I$, $n \neq i$, $a_i \in A_i$, $a_n \in A_n$. Так как

$$f_i(\varphi(b)) = f_i(((f_n'(b))^{l_b})_{n\in I}) = f_i'(b)$$

для любого $b \in B$, то $f_i \circ \varphi = f_i'$.

Покажем, что $(\varphi, \psi, \chi) : t \longrightarrow r$ – преобразование Чу. Пусть $b \in B$ и $i \in I$. Из определения гомоморфизмов χ и ψ следует

$$\chi \circ t(b \otimes \psi(\theta_i)) = (h_n' \circ t(b \otimes g_i'(\theta_i)))_{n\in I} = (\theta_n^{\bar{n}(b,i)})_{n\in I}.$$

По определению $\varphi(b)$ имеем $\varphi(b) = ((f_n'(b))^{l_b})_{n\in I}$. Тогда

$$r(\varphi(b) \otimes \theta_i) = r(((f_n'(b))^{l_b})_{n\in I} \otimes \theta_i) = (\theta_n^{n(\overline{f'(b)},i,l_b)})_{n\in I},$$

где $\overline{f'(b)} = ((f_n'(b))^{l_b})_{n\in I}$. Покажем, что $n(\overline{f'(b)}, i, l_b) = \bar{n}(b,i)$ для любого $n \in I$. Действительно, $i(\overline{f'(b)}, i, l_b) = \gamma(f_i'(b)) = \bar{i}(b,i)$ и

$$n(\overline{f'(b)}, i, l_b) = ((l_{b,i}(i))(n))(\gamma(f_n'(b))) = \bar{n}(b,i)$$

для любого $n \in I$, $n \neq i$. Следовательно, $\chi \circ t(b \otimes \psi(\theta_i)) = r(\varphi(b) \otimes \theta_i)$.

Покажем единственность преобразования Чу $(\varphi, \psi, \chi) : t \longrightarrow r$ такого, что $f_i \circ \varphi = f'_i$, $\psi \circ g_i = g'_i$ и $h_i \circ \chi = h'_i$ для любого $i \in I$. Пусть $(\varphi', \psi', \chi') : t \longrightarrow r$ – преобразование Чу, $f_i \circ \varphi' = f'_i$, $\psi' \circ g_i = g'_i$ и $h_i \circ \chi' = h'_i$ для любого $i \in I$. В силу единственности гомоморфизмов ψ и χ имеем $\psi' = \psi$ и $\chi' = \chi$. Необходимо доказать, что $\varphi = \varphi'$. Пусть $b \in B$ и $i \in I$. Из равенства $f_i \circ \varphi' = f'_i$ следует $\varphi'(b) = ((f'_n(b))^l)_{n\in I}$ для некоторого $l \in L$. Осталось показать, что $l = l_b$. Так как $l, l_b \in L$, то $((l(i))(i))(\gamma(a_i)) = \gamma(a_i) = ((l_b(i))(i))(\gamma(a_i))$ для любого $a_i \in A_i$. Пусть $n \neq i$. По определению пространства Чу r имеем $r(\varphi'(b) \otimes \theta_i) = (\theta_n^{n(\overline{f'(b)},i,l)})_{n\in I}$, где $\overline{f'(b)} = ((f'_n(b))^l)_{n\in I}$. Поскольку

$$r(\varphi'(b) \otimes \theta_i) = \chi \circ t(b \otimes \psi(\theta_i)) = (\theta_n^{\bar{n}(b,i)})_{n\in I},$$

то $\bar{n}(b,i) = n(\overline{f'(b)}, i, l)$, т.е.

$$((l_{b,i}(i))(n))(\gamma(a_n)) = \bar{n}(b,i) = n(\overline{f'(b)}, i, l) = ((l(i))(n))(\gamma(f'_n(b))).$$

Из определения множества L следует, что $((l(i))(n))(\gamma(a_n)) = ((l(i))(n))(\gamma(f'_n(b)))$ для любого $a_n \in A_n$. Таким образом, $l = l_b$ и $\varphi(b) = \varphi'(b)$.

□

References

[1] M. Barr, **-Autonomous Categories*, Lecture Notes in Math., **752**, Springer-Verlag, Berlin, 1979. Zbl 0415.18008

[2] M. Barr, C. Wells, *Category Theory for Computing Science*. Prentice Hall, London, 1995. Zbl 0841.18001

[3] V. Gould, A.V. Mikhalev, E.A. Palyutin, A.A. Stepanova, *Model-theoretic properties of free, projective, and flat S-acts*, J. Math. Sci. New York, **164**:2 (2010), 195–227. Zbl 1288.03026

[4] M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev, *Monoids, acts and categories. With applications to wreath products and graphs*, Walter De Gruyter, Berlin, 2000. Zbl 0945.20036

[5] S. MacLane, *Categories for the Working mathematician. 4th corrected printing*, Springer-Verlag, New York etc., 1988. Zbl 0705.18001

[6] V.R. Pratt, *Chu Spaces*, School on category theory and applications. Lecture notes of courses, Coimbra, Portugal, July 13-17, 1999. Coimbra: Universidade de Coimbra, Departamento de Matematica. Textos Mat., Ser. B., **21**, Universidade de Coimbra, Coimbra. 1999, (39–100). Zbl 0954.18002

[7] A.A. Stepanova, E.E. Skurihin, A.G. Sukhonos, *Category of Chu spaces over S-Act category*, Sib. Electron. Math. Izv., **14** (2017), 1220–1237. Zbl 1391.18010

[8] A.A. Stepanova, E.E. Skurihin, A.G. Sukhonos, *Category of Chu spaces over S-Act category*, Sib. Electron. Math. Izv., **16** (2019), 709–717. Zbl 1420.18021

A. A. Stepanova
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
Vladivostok, 690920, Russia
Email address: stepltd@mail.ru

E.E. Skurihin
Institute of Applied Mathematics,
7, Radio str.,
Vladivostok, 690041, Russia
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
Vladivostok, 690920, Russia
Email address: eeskur@gmail.com

A.G. Sukhonos
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
Vladivostok, 690920, Russia
Email address: agsukh@mail.ru