

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 1313–1321 (2020)
DOI 10.33048/semi.2020.17.097УДК 517.5, 517.987
MSC 37A30, 42A16ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ФОН НЕЙМАНА
И СУММЫ ФЕЙЕРА ЗАРЯДОВ НА ОКРУЖНОСТИ

А.Г. КАЧУРОВСКИЙ, М.Н. ЛАПШТАЕВ, А.Ж. ХАКИМБАЕВ

ABSTRACT. The Fejer sums for measures on the circle and the norms of the deviations from the limit in von Neumann's ergodic theorem are calculated, in fact, using the same formulas (by integrating the Fejer kernels) — and so, this ergodic theorem is a statement about the asymptotics of the Fejer sums at zero for the spectral measure of the corresponding dynamical system. It made it possible, having considered the integral Holder condition for signed measures, to prove a theorem that unifies both following well-known results: classical S.N. Bernstein's theorem on polynomial deviations of the Fejer sums for Holder functions — and theorem about polynomial rates of convergence in von Neumann's ergodic theorem.

Keywords: deviations of Fejer sums, rates of convergence in von Neumann's ergodic theorem, integral Holder condition.

1. СТЕПЕННЫЕ УКЛОНЕНИЯ СУММ ФЕЙЕРА ГЕЛЬДЕРОВСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\mathfrak{L}_{2\pi}$ — множество всех 2π -периодических интегрируемых по Лебегу на $(-\pi, \pi]$ функций $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Для каждой функции $\rho \in \mathfrak{L}_{2\pi}$ рассмотрим ее частичные суммы Фурье $S_k(x)$ и суммы Фейера $\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$. Как хорошо известно (Л. Фейер, 1904 г.), в случае непрерывности ρ ее суммы Фейера $\sigma_n(x)$ поточечно всюду сходятся к $\rho(x)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по x ; величины

KACHUROVSKIY, A.G., LAPSHTEV, M.N., KHAKIMBAEV, A.J., VON NEUMANN'S ERGODIC THEOREM AND FEJER SUMS FOR SIGNED MEASURES ON THE CIRCLE.

© 2020 Качуровский А.Г., Лапштаев М.Н., Хакимбаев А.Ж.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0005).

Поступила 12 мая 2020 г., опубликована 11 сентября 2020 г.

$|\sigma_n(x) - \rho(x)|$ называют уклонениями сумм Фейера. Рассмотрим ядра Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}}, \quad 0 < |t| \leq \pi; \quad \Phi_n(0) = n.$$

Хорошо известно (см., например, [1, глава I, §47]) интегральное представление сумм Фейера функции $\rho \in \mathfrak{L}_{2\pi}$ для всех $x \in (-\pi, \pi)$:

$$(1) \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) \rho(x+t) dt.$$

Если для $h \in \mathfrak{L}_{2\pi}$ для некоторых констант $\alpha \in (0, 1)$ и $M \geq 0$ при всех x, y верно неравенство $|h(x) - h(y)| \leq M|x - y|^\alpha$, то говорим, что эта функция принадлежит классу Гёльдера с показателем α и коэффициентом M , и пишем $h \in H_{\mathcal{M}}^\alpha$. Если коэффициент M несущественен, то пишем просто $h \in H^\alpha$.

Доказательство следующей теоремы можно найти, например, в [2, глава VIII, §2].

Теорема 1 (С.Н. Бернштейн, 1912 г.). *Для любой функции $\rho \in H_{\mathcal{M}}^\alpha$, где $\alpha \in (0, 1)$, при всех x для всех натуральных n*

$$|\sigma_n(x) - \rho(x)| < C_\alpha M n^{-\alpha},$$

где C_α — константа, зависящая только от α ; можно положить $C_\alpha = \frac{\pi 2^\alpha}{1 - \alpha^2}$.

Точное значение наименьшей константы C_α (также равномерное по $H_{\mathcal{M}}^\alpha$) было найдено С.М. Никольским в [3].

Как хорошо известно ([4, глава III, §13] — и [5], например), в классе непрерывных функций верно и обратное к теореме 1 утверждение: если для непрерывной $\rho \in \mathfrak{L}_{2\pi}$ при всех x будет $|\sigma_n(x) - \rho(x)| = O(n^{-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по x , то $\rho \in H^\alpha$.

2. СТЕПЕННЫЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ФОН НЕЙМАНА

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ — пространство с вероятностной мерой, T — его эндоморфизм, т. е. такое отображение $T: \Omega \rightarrow \Omega$, что для всех $A \in \mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит \mathfrak{F} , и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$. Через U_T обозначим изометрический оператор, действующий в (комплексном) гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U_T f = f \circ T$; положим $A_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f$. Тогда статистическая эргодическая теорема фон Неймана утверждает существование в $L_2(\Omega)$ предела $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n f = f^*$, причем f^* оказывается ортогональной проекцией f на подпространство неподвижных векторов оператора U_T , и выполняется равенство $\int_\Omega f^* d\lambda = \int_\Omega f d\lambda$.

Рассмотрим корреляционные коэффициенты $b_k f$ вектора f : $b_k f = (U_T^k f, f)$ при $k \geq 0$, и $b_k f = \bar{b}_{-k} f$ при $k < 0$, и его спектральную меру μ_f , т. е. такую (единственную) σ -аддитивную конечную борелевскую меру на единичной окружности, для которой $b_k f$ являются ее коэффициентами Фурье (см., например, [6, глава 1, §7]).

Пусть $L_2^0(\Omega)$ — подпространство функций с нулевым средним в $L_2(\Omega)$. Так как $f - f^* \in L_2^0(\Omega)$, то и $A_n(f - f^*) \in L_2^0(\Omega)$ для всех натуральных n . Как

хорошо известно (теорема 18.2.1 в [7]), для каждой $g \in L_2^0(\Omega)$

$$\|A_n g\|_2^2 = \frac{1}{n} \int_{(-\pi, \pi]} \Phi_n(t) d\mu_g(t);$$

поэтому для всех натуральных n получаем интегральное представление

$$(2) \quad \|A_n f - f^*\|_2^2 = \|A_n(f - f^*)\|_2^2 = \frac{1}{n} \int_{(-\pi, \pi]} \Phi_n(t) d\mu_{f-f^*}(t).$$

Заметим, что переход от μ_f к μ_{f-f^*} осуществляется простым отбрасыванием сосредоточенной в точке 0 меры $\mu_f\{0\} = \|f^*\|_2^2$ (поскольку f^* и есть ортогональная проекция f на подпространство собственных векторов оператора U_T , отвечающих собственному значению 1).

Скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана измеряют скоростью сходимости величин $\|A_n f - f^*\|_2^2$ к нулю при $n \rightarrow \infty$. В [8, теорема 3] был получен следующий критерий степенной скорости сходимости в этой теореме (по поводу конкретных значений возникающих здесь констант см. [9], например).

Теорема 2. *Для любых (f, T) и $\beta \in [0, 2)$ равносильны следующие соотношения:*

- 1) $\|A_n f - f^*\|_2^2 = O(n^{-\beta})$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\mu_{f-f^*}(-\delta, \delta] = O(\delta^\beta)$ при $\delta \rightarrow 0$.

Утверждение теоремы верно также при замене обеих "O" на "o".

3. УНИФИЦИРУЮЩИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сопоставление равенств (1) и (2) немедленно приводит к обнаруженной в [5] любопытной формуле, связывающей нормы отклонений эргодических средних $A_n f$ от их предела f^* в эргодической теореме фон Неймана — и значения $\sigma_n(0)$ сумм Фейера в точке 0 для спектральной меры μ_{f-f^*} :

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = \frac{2\pi}{n} \sigma_n(0).$$

Эта формула показывает, что утверждение эргодической теоремы фон Неймана является утверждением об асимптотике сумм Фейера в точке 0 для спектральной меры соответствующей динамической системы: $\sigma_n(0) = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$. И что задача оценки скоростей сходимости в этой эргодической теореме фактически совпадает с задачей гармонического анализа оценки сумм Фейера в точке для конечных мер на окружности (подробнее см. в [5]).

Возникает естественная задача унификации теорем 1 и 2 (в части $\beta \in (1, 2)$) — поскольку нельзя говорить об уклонениях сумм Фейера спектральной меры в случае когда они ни к чему не сходятся: со степенной скоростью растут, например; см. теорему 5 ниже). Так как в теореме 1 исследуемые функции были, вообще говоря, знакопеременными, то и унифицирующая теорема 3 ниже формулируется для знакопеременных мер, т.е. для зарядов.

4. СТЕПЕННЫЕ УКЛОНЕНИЯ СУММ ФЕЙЕРА ЗАРЯДОВ НА ОКРУЖНОСТИ

Пусть $\mathfrak{M}_{2\pi}$ — множество всех 2π -периодических σ -аддитивных конечных на $(-\pi, \pi]$ зарядов (т.е. знакопеременных мер) на σ -алгебре измеримых по Лебегу подмножеств вещественной прямой \mathbb{R} . Для каждого заряда μ из $\mathfrak{M}_{2\pi}$ через $|\mu|$

обозначим его полную вариацию (являющуюся неотрицательным зарядом из $\mathfrak{M}_{2\pi}$, т.е. обычной мерой) — см., например, [11, глава VI, §5].

Для каждого заряда $\mu \in \mathfrak{M}_{2\pi}$ рассмотрим его коэффициенты Фурье

$$c_k(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi]} e^{-ikt} d\mu(t), \quad k \in \mathbb{Z},$$

частичные суммы Фурье $S_n(\mu, x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$, и суммы Фейера $\sigma_n(\mu, x) =$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(\mu, x).$$

Для $\mu \in \mathfrak{M}_{2\pi}$ определим для каждого $x_0 \in (-\pi, \pi]$ заряды на σ -алгебре измеримых по Лебегу множеств A :

$$\mu_{x_0}(A) = \mu(x_0 + A), \quad \mu_{x_0}^*(A) = \mu(x_0 - A).$$

Обозначим через λ обычную меру Лебега на прямой. Будем говорить, что для заряда $\mu \in \mathfrak{M}_{2\pi}$ в точке $x_0 \in (-\pi, \pi]$ выполняется:

а) *сильное интегральное условие Гельдера* с показателем $\alpha \in (0, 1)$, если для некоторого $s \in \mathbb{R}$ существует такая константа $M > 0$, что

$$|\mu_{x_0} - s\lambda|(-\delta, \delta] \leq M\delta^{\alpha+1} \text{ для любого } \delta \in (0, \pi];$$

б) *интегральное условие Гельдера* с показателем $\alpha \in (0, 1)$, если для некоторого $s \in \mathbb{R}$ существует такая константа $M > 0$, что

$$|\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda|(0, \delta] \leq M\delta^{\alpha+1} \text{ для любого } \delta \in (0, \pi];$$

в) *слабое интегральное условие Гельдера* с показателем $\alpha \in (0, 1)$, если для некоторого $s \in \mathbb{R}$ существует такая константа $M > 0$, что

$$|(\mu_{x_0} - s\lambda)(-\delta, \delta]| \leq M\delta^{\alpha+1} \text{ для любого } \delta \in (0, \pi].$$

Так как полная вариация суммы зарядов не больше суммы их полных вариаций, то для любого $\delta \in (0, \pi]$, очевидно,

$$\begin{aligned} |\mu_{x_0} - s\lambda|(-\delta, \delta] &= |\mu_{x_0} - s\lambda|(-\delta, 0] + |\mu_{x_0} - s\lambda|(0, \delta] = \\ &= |\mu_{x_0}^* - s\lambda|(0, \delta] + |\mu_{x_0} - s\lambda|(0, \delta] \geq |\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda|(0, \delta] \geq \\ &\geq |(\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda)(0, \delta]| = |(\mu_{x_0} - s\lambda)(-\delta, \delta]|, \end{aligned}$$

и из сильной интегральной гильдеровости следует условие интегральной гильдеровости, которое, в свою очередь, влечет слабую интегральную гильдеровость (с тем же показателем α и параметрами s и M). Очевидно, в условиях теоремы 2 при $\beta \in (1, 2)$ спектральная мера $\mu_{f-f^*} \in \mathfrak{M}_{2\pi}$ — сильно интегральная гильдеровская в точке $x_0 = 0$ с показателем $\alpha = \beta - 1$ и параметром $s = 0$.

Доказательство теоремы 3 идет по той же схеме, что и доказательство теоремы 1 в [9] (можно было сделать это и несколько иначе: см. доказательство теоремы 1 в [10]), и опирается на следующую числовую лемму. Отметим, что в [9] была допущена неточность в формулировке этой леммы: было указано излишнее условие невозрастания последовательности $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$; доказательство леммы это условие не использовало.

Лемма [9]. Если $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных вещественных чисел, $\beta \in [0, 2)$ и C — некоторая положительная константа, то из того, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sigma_k \leq Cn^{-\beta} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N},$$

следует, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sigma_k < C \frac{2}{2-\beta} n^{2-\beta} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. Если для $\mu \in \mathfrak{M}_{2\pi}$ в точке $x_0 \in (-\pi, \pi]$ выполняется интегральное условие Гельдера (или, более того, сильное интегральное условие Гельдера) с показателем $\alpha \in (0, 1)$ и параметрами $s \in \mathbb{R}$, $M > 0$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ будет

$$|\sigma_n(\mu, x_0) - s| < D_\alpha M n^{-\alpha},$$

где можно положить $D_\alpha = \pi^\alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{1-\alpha} \right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся аналогом интегрального представления (1) для мер и зарядов (см., например, [5])

$$\sigma_n(\mu, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi]} \Phi_n(t) d\mu_{x_0}(t),$$

и хорошо известными свойствами ядер Фейера (см., например, [1, глава I, §47]):

равенствами $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = 2\pi$, и стандартными неравенствами

$$(3) \quad \Phi_n(t) \leq n \quad (\text{для } |t| \leq \pi);$$

$$(4) \quad \Phi_n(t) \leq \frac{\pi^2}{nt^2} \quad (\text{для } \frac{\pi}{n} \leq |t| \leq \pi).$$

Получаем:

$$\begin{aligned} |\sigma_n(\mu, x_0) - s| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi]} \Phi_n(t) d\mu_{x_0}(t) - s \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi]} \Phi_n(t) d\mu_{x_0}(t) - \frac{s}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, 0]} \Phi_n(t) d\mu_{x_0}(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{(0, \pi]} \Phi_n(t) d\mu_{x_0}(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{(0, \pi]} \Phi_n(t) 2s dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{(0, \pi]} \Phi_n(t) d\mu_{x_0}^*(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{(0, \pi]} \Phi_n(t) d\mu_{x_0}(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{(0, \pi]} \Phi_n(t) 2s d\lambda(t) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{(0, \pi]} \Phi_n(t) d(\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda)(t) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{(0, \pi]} \Phi_n(t) d|\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda|(t) = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{(0, \frac{\pi}{n}]} \Phi_n(t) d|\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda|(t), \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(\frac{\pi}{n}, \pi]} \Phi_n(t) d|\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda|(t).$$

По неравенству (3):

$$I_1 \leq \frac{n}{2\pi} |\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda|(0, \frac{\pi}{n}] \leq \frac{n}{2\pi} M \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha+1} = \frac{\pi^\alpha}{2} M n^{-\alpha}.$$

Оценим теперь интеграл I_2 , воспользовавшись неравенством (4):

$$I_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{(\frac{\pi}{n}, \pi]} \frac{\pi^2}{nt^2} d|\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda| = \frac{\pi}{2n} \int_{(\frac{\pi}{n}, \pi]} \frac{1}{t^2} d|\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda|.$$

Заметим следующее:

$$|\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda| \left(0, \frac{\pi}{n}\right] = \sum_{k=n}^{\infty} \sigma_k, \quad \text{где } \sigma_k = |\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda| \left(\frac{\pi}{k+1}, \frac{\pi}{k}\right].$$

По условию теоремы для всех натуральных n будет

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sigma_k \leq M \left(\frac{\pi}{n}\right)^{1+\alpha};$$

отсюда по числовой лемме для $\beta = 1 + \alpha \in (1, 2)$ получаем:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sigma_k < M \pi^{\alpha+1} \frac{2}{1-\alpha} n^{1-\alpha}.$$

Воспользовавшись этим неравенством, продолжим оценку интеграла I_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2n} \int_{(\frac{\pi}{n}, \pi]} \frac{1}{t^2} d|\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda| &= \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{(\frac{\pi}{k+1}, \frac{\pi}{k}]} \frac{1}{t^2} d|\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^* - 2s\lambda| \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{\pi^2} \sigma_k = \frac{1}{2n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 \sigma_k \leq \frac{2}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sigma_k < M \frac{4\pi^\alpha}{1-\alpha} n^{-\alpha}. \end{aligned}$$

В итоге получаем требуемую оценку:

$$|\sigma_n(\mu, x_0) - s| < M \frac{\pi^\alpha}{2} n^{-\alpha} + M \frac{4\pi^\alpha}{1-\alpha} n^{-\alpha}.$$

5. СТЕПЕННЫЕ УКЛОНЕНИЯ СУММ ФЕЙДЕРА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ.

Будем говорить, что для функции $f(x) \in \mathfrak{L}_{2\pi}$ в точке $x_0 \in (-\pi, \pi]$ выполняется:

а) *сильное интегральное условие Гельдера* с показателем $\alpha \in (0, 1)$, если для некоторого $s \in \mathbb{R}$ существует такая константа $M > 0$, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x_0 + t) - s| dt \leq M \delta^{\alpha+1} \quad \text{для любого } \delta \in (0, \pi];$$

б) *интегральное условие Гельдера* с показателем $\alpha \in (0, 1)$, если для некоторого $s \in \mathbb{R}$ существует такая константа $M > 0$, что

$$\int_0^\delta |f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s| dt \leq M\delta^{\alpha+1} \text{ для любого } \delta \in (0, \pi];$$

в) *слабое интегральное условие Гельдера* с показателем $\alpha \in (0, 1)$, если для некоторого $s \in \mathbb{R}$ существует такая константа $M > 0$, что

$$\left| \int_{-\delta}^\delta (f(x_0 + t) - s) dt \right| \leq M\delta^{\alpha+1} \text{ для любого } \delta \in (0, \pi].$$

Так как для любого $\delta \in (0, \pi]$, очевидно,

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^\delta |f(x_0 + t) - s| dt &= \int_0^\delta (|f(x_0 + t) - s| + |f(x_0 - t) - s|) dt \geq \\ &\geq \int_0^\delta |f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s| dt \geq \\ &\geq \left| \int_0^\delta (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s) dt \right| = \left| \int_{-\delta}^\delta (f(x_0 + t) - s) dt \right|, \end{aligned}$$

то из сильной интегральной гильдеровости следует условие интегральной гильдеровости, которое, в свою очередь, влечет слабую интегральную гильдеровость (с тем же показателем α и параметрами s и M). Очевидно, каждая гильдеровская функция $f \in H_{\mathcal{M}}^\alpha$ — сильно интегрально гильдеровская в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, с показателем α и параметрами $s = f(x_0)$ и $M = \frac{2}{\alpha+1} \mathcal{M}$.

Следующая теорема является частным случаем (для абсолютно непрерывных по отношению к мере Лебега зарядов) теоремы 3.

Теорема 4. *Если для $f \in \mathfrak{L}_{2\pi}$ в точке $x_0 \in (-\pi, \pi]$ выполняется интегральное условие Гельдера (или, более того, сильное интегральное условие Гельдера) с показателем $\alpha \in (0, 1)$ и параметрами $s \in \mathbb{R}$ и $M > 0$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ будет*

$$|\sigma_n(f, x_0) - s| < D_\alpha M n^{-\alpha},$$

где можно положить $D_\alpha = \pi^\alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{1-\alpha} \right)$.

Верны ли аналоги утверждений теорем 3 и 4 для случая слабой интегральной гильдеровости — авторам неизвестно.

6. СТЕПЕННОЙ РОСТ СУММ ФЕЙЕРА ЗАРЯДОВ НА ОКРУЖНОСТИ

Будем говорить, что заряд $\mu \in \mathfrak{M}_{2\pi}$ в точке $x_0 \in (-\pi, \pi]$ имеет:

а) *сильную степенную особенность* с показателем $\alpha \in [0, 1]$, если существует такая константа $M > 0$, что

$$|\mu_{x_0}|(-\delta, \delta] \leq M\delta^\alpha \text{ для любого } \delta \in (0, \pi];$$

б) *степенную особенность* с показателем $\alpha \in [0, 1]$, если существует такая константа $M > 0$, что

$$|\mu_{x_0} + \mu_{x_0}^*|(0, \delta] \leq M\delta^\alpha \text{ для любого } \delta \in (0, \pi];$$

в) *слабую степенную особенность* с показателем $\alpha \in [0, 1]$, если существует такая константа $M > 0$, что

$$|\mu_{x_0}(-\delta, \delta]| \leq M\delta^\alpha \text{ для любого } \delta \in (0, \pi].$$

Те же выкладки, что и в п. 4, показывают, что из сильной степенной особенности следует степенная особенность, которая в свою очередь влечет слабую степенную особенность (с тем же показателем α и параметром M). Очевидно, в условиях теоремы 2 при $\beta \in [0, 1]$ спектральная мера $\mu_{f-f^*} \in \mathfrak{M}_{2\pi}$ — имеет сильную степенную особенность в точке $x_0 = 0$ с показателем $\alpha = \beta$.

Теорема 5. *Если $\mu \in \mathfrak{M}_{2\pi}$ в точке $x_0 \in (-\pi, \pi]$ имеет степенную особенность (или, более того, сильную степенную особенность) с показателем $\alpha \in [0, 1]$ и параметром $M > 0$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ будет*

$$|\sigma_n(\mu, x_0)| < D_\alpha M n^{1-\alpha},$$

где можно положить $D_\alpha = \pi^{\alpha-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2-\alpha} \right)$.

Доказательство теоремы 5 почти дословно совпадает с доказательством теоремы 3 (случай $s = 0$). Любопытное отличие состоит в том, что при применении числовой леммы мы используем здесь значения $\beta = \alpha \in [0, 1]$ — в доказательстве теоремы 3 нам нужны были $\beta \in (1, 2)$.

7. СТЕПЕННОЙ РОСТ СУММ ФЕЙЕРА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Будем говорить, что функция $f(x) \in \mathfrak{L}_{2\pi}$ в точке $x_0 \in (-\pi, \pi]$ имеет:

а) *сильную степенную особенность* с показателем $\alpha \in [0, 1]$, если существует такая константа $M > 0$, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x_0 + t)| dt \leq M\delta^\alpha \text{ для любого } \delta \in (0, \pi];$$

б) *степенную особенность* с показателем $\alpha \in [0, 1]$, если существует такая константа $M > 0$, что

$$\int_0^{\delta} |f(x_0 + t) + f(x_0 - t)| dt \leq M\delta^\alpha \text{ для любого } \delta \in (0, \pi];$$

в) *слабую степенную особенность* с показателем $\alpha \in [0, 1]$, если существует такая константа $M > 0$, что

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0 + t) dt \right| \leq M\delta^\alpha \text{ для любого } \delta \in (0, \pi].$$

Те же выкладки, что и в п. 5, показывают, что из сильной степенной особенности следует степенная особенность, которая в свою очередь влечет слабую степенную особенность (с тем же показателем α и параметром M).

Следующая теорема является частным случаем (для абсолютно непрерывных по отношению к мере Лебега зарядов) теоремы 5.

Теорема 6. Если $f(x) \in \mathfrak{L}_{2\pi}$ в точке $x_0 \in (-\pi, \pi]$ имеет степенную особенность (или, более того, сильную степенную особенность) с показателем $\alpha \in [0, 1]$ и параметром $M > 0$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ будет

$$|\sigma_n(f, x_0)| < D_\alpha M n^{1-\alpha},$$

где можно положить $D_\alpha = \pi^{\alpha-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2-\alpha} \right)$.

Верны ли аналоги утверждений теорем 5 и 6 для случая слабой степенной особенности — авторам неизвестно.

REFERENCES

- [1] N.K. Bari, *Trigonometrical series*, Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian). MR 0126115
- [2] I.P. Natanson, *Constructive theory of functions*, GITTL, Moscow-Leningrad, 1949 (in Russian). MR 0034464
- [3] S. Nikol'ski, *Sur l'allure asymptotique du reste dans l'approximation au moyen des sommes de Fejer des fonctions verifiant la condition de Lipschitz*, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **4:6** (1940), 501–508. MR 0003836
- [4] A. Zygmund, *Trigonometric Series*. 2nd ed. Vol. I. New York, Cambridge University Press, 1959. MR 0107776
- [5] A.G. Kachurovskii, I.V. Podvigin, *Fejer sums for periodic measures and the von Neumann ergodic theorem*, *Dokl. Math*, **98:1** (2018), 344–347.
- [6] I.P. Kornfeld, Ya.G. Sinai, S.V. Fomin, *Ergodic theory*, Nauka, Moscow, 1980 (in Russian). MR 0610981
- [7] I.A. Ibragimov, Yu.V. Linnik, *Independent and stationary sequences of random variables*, Nauka, Moscow, 1965 (in Russian). MR 0202176
- [8] A.G. Kachurovskii, *Rates of convergence in ergodic theorems*, *Russian Math. Surveys*, **51:4** (1996), 653–703. MR 1422228
- [9] A.G. Kachurovskii, V.V. Sedalishchev, *On the constants in the estimates for the rate of convergence in von Neumann's ergodic theorem*, *Math. Notes*, **87:5–6** (2010), 720–727. MR 2766588
- [10] A.G. Kachurovskii, V.V. Sedalishchev, *Constants of estimates for the rate of convergence in the von Neumann and Birkhoff ergodic theorems*, *Sb. Math.*, **202:8** (2011), 1105–1125. MR 2866197
- [11] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, Nauka, Moscow, 1976 (in Russian). MR 0435771

KACHUROVSKII ALEXANDER GRIGORIEVICH
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, ACADEMICIAN KOPTYUG AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: agk@math.nsc.ru

LAPSHTAEV MAXIM NIKOLAYEVICH
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 1, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: gustavmax37@yandex.ru

KHAKIMBAEV AZIZ JAMALATDIN ULI
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 1, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: azizkimbayev1212@gmail.com