S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1270–1279 (2020) УДК 519.17

DOI 10.33048/semi.2020.17.093 MSC 05C25

НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ НЕБОЛЬШИХ Q-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГРАФОВ ТИПА (III)

А.А. МАХНЕВ, М.М. ИСАКОВА, А.А. ТОКБАЕВА

Abstract. I.N. Belousov, A.A. Makhnev and M.S. Nirova found the description of Q-polynomial distance-regular graphs Γ of diameter 3 such that Γ_2 and Γ_3 are strongly regular. Such graph has intersection array $\{t(c_2+1)+a_3, tc_2, a_3+1; 1, c_2, t(c_2+1)\}$ and $(c_2+1) = a_3(a_3+1)/(t^2-a_3-1)$. Q-polynomial graph Γ is the graph of type (I), if a_3 is devided by c_2+1, graph of type (II), if a_3+1 is devided by c_2+1, graph of type (III), if a_3 and a_3+1 does not devided by c_2+1.

In this paper it is proved that graph of type (III) with $t \leq 6$ has intersection array $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$, $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$, $\{87, 66, 16; 1, 11, 72\}$, $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ or $\{188, 162, 21; 1, 27, 168\}$.

Further it is proved that graphs of type (III) with intersection array $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$, $\{87, 66, 16; 1, 11, 72\}$ and $\{188, 162, 21; 1, 27, 168\}$ do not exist.

Keywords: distance-regular graph, Q-polynomial graph, triple intersection numbers.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{2, 3, ..., d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Makhnev, A.A., Isakova, M.M., Tokbaeva, A.A., The nonexistence small Q-polynomial graphs of type (III).

Работа выполнена по программе государственной поддержки ведущих университетов РФ, соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013.

Поступила 19 июля 2020 г., опубликована 7 сентября 2020 г.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$, $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ [1].

Дистанционно регулярный граф Γ диаметра d называется *импримитивным*, если для некоторого $i \in \{2, 3, ..., d\}$ граф Γ_i несвязен, *примитивным* в противном случае.

Регулярный граф Γ степени k на v вершинах называется *сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если число $|[u] \cap [w]|$ равно λ для любых смежных вершин u, w, равно μ для любых двух несмежных вершин u, w.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$).

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1) + (\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры для некоторых натуральных чисел α, s, t, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$.

Алгеброй Боуза-Меснера M дистанционно регулярного графа Γ называется матричная алгебра, порожденная матрицей смежности A графа Γ с базисом $\{A_i \mid i = 0, \ldots, d\}$, где A_i — матрица смежности графа Γ_i. Алгебра M имеет другой базис, состоящий из примитивных идемпотентов $\{E_0 = \frac{1}{v}J, E_1, \ldots, E_D\}$, где $v = |V(\Gamma)|$, J — матрица, все элементы которой равны 1, и E_i — ортогональная проекция на собственное подпространство отвечающее собственному значению θ_i. Относительно покомпонентного умножения $\circ$ выполняются равенства $E_i \circ E_j = \frac{1}{v}\sum_{i=0}^{D} q^k_{ij} E_k$. Граф Γ называется *Q-полиномиальным*, если существует упорядочение примитивных идемпотентов $E_0 = \frac{1}{v}J, E_1, \ldots, E_D$, такое, что $q^k_{ij} = 0$ при $|j-k| > 1$. Будем говорить, что Γ является *Q-полиномиальным относительно* θ, если E_1 — ортогональная проекция на собственное подпространство, отвечающее собственному значению θ.

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e-кодом, если минимальное расстояниййе между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le k_d / \sum_{i=0}^{e} p^d_{id} + 1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности (см. [2]).

Пусть для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Такие графы изучались в [3].

Предложение 1. *Пусть Γ является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра 3. Если графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны, то Γ имеет массив пересечений $\{t(c_2+1)+a_3, tc_2, a_3+1; 1, c_2, t(c_2+1)\}$, $a_2=(t-1)(c_2+1)$, $a_1=a_3+t-1$, $k_2=kt$, $k_3=k(a_3+1)/(c_2+1)$, $p^1_{33}=a_3(a_3+1)/(c_2+1)$ и граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{t(c_2+1)}(t(c_2+1)+a_3,t)$.*

Положим $a=a_3$. Скажем, что Γ — граф типа (I), если c_2+1 делит a, — граф типа (II), если c_2+1 делит $a+1$, — граф типа (III), если c_2+1 не делит a и не делит $a+1$. Приведем список графов из [1].

Для Q-полиномиальных графов в [4] получен следующий результат.

Предложение 2. *Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{t(c_2+1)+a, tc_2, a+1; 1, c_2, t(c_2+1)\}$ является Q-полиномиальным тогда и только тогда, когда $(t^2-a-1)c_2=(a^2-t^2+2a+1)$ и либо $a=0, t=1$ и Γ – граф Тэйлора без треугольников (дополнение $2\times(c_2+2)$-решётки), либо $(c_2+1)=a(a+1)/(t^2-a-1)$.*

Для графов типов (I) и (II) в [4, теорема 1] найдены удобные параметризации:

если Γ – граф типа (I), $a=w(c_2+1)$ и $t^2=wc_2(w+1)+(w+1)^2$, то либо

(*i*) $w+1=s^2$, $t^2=s^2((s^2-1)c_2+s^2)$, $(s^2-1)c_2+s^2$ является квадратом некоторого целого числа u, $c_2=(u^2-s^2)/(s^2-1)$, $t=su$, $a=u^2-1$ и Γ имеет массив пересечений

$$\{\frac{(s^2+su-1)(u^2-1)}{s^2-1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2-1}, u^2; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2-1}, \frac{su^3-su}{s^2-1}\},$$

либо

(*ii*) $c_2=s(w+1)$, $t^2=(w+1)^2(ws+1)$, $ws+1$ является квадратом некоторого целого числа u, $c_2=(w+1)(u^2-1)/w$, $t=(w+1)u$, $a=u^2w+u^2-1$ и Γ имеет массив пересечений

$$\left\{\frac{(u^2w+u^2-1)(uw+u+w)}{w}, \frac{(u^2-1)u(w+1)^2}{w}, u^2(w+1);\right.$$
$$\left. 1, \frac{(w+1)(u^2-1)}{w}, \frac{(u^2w+u^2-1)u(w+1)}{w}\right\};$$

если Γ – граф типа (II), $a+1=w(c_2+1)$ и $t^2=w(w(c_2+1)+c_2)$, то либо

(*i*) $w=s^2$, $t^2=s^2(s^2(c_2+1)+c_2)$, $(s^2(c_2+1)+c_2$ является квадратом некоторого целого числа u, $c_2=(u^2-s^2)/(s^2+1)$, $t=su$, $a=(u^2s^2-1)/(s^2+1)$ и Γ имеет массив пересечений

$$\{\frac{u^3s+u^2s^2+us-1}{s^2+1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2+1}, \frac{(u^2+1)s^2}{s^2+1}; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2+1}, \frac{(u^2+1)su}{s^2+1}\},$$

либо

(*ii*) $c_2=sw$, $t^2=w^2(sw+1+s)$, $sw+1+s$ является квадратом некоторого целого числа u, $c_2=(u^2-1)w/(w+1)$, $t=uw$, $a=(u^2w^2-1)/(w+1)$ и Γ имеет массив пересечений

$$\{\frac{u^3w^2+u^2w^2+uw-1}{w+1}, \frac{(u^2-1)uw^2}{w+1}, \frac{(u^2w+1)w}{w+1}; 1, \frac{(u^2-1)w}{w+1}, \frac{(u^2w+1)uw}{w+1)}\}.$$

Заметим, что в случае (Iii) при $w = 1$ получим массив пересечений $\{(2u+1)(2u^2-1), 4u(u^2-1), 2u^2; 1, 2(u^2-1), 2u(2u^2-1)$. Граф с таким массивом пересечений не существует по [2].

В данной работе изучаются небольшие Q-полиномиальные графы типа (III).

Теорема 1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{t(c_2+1)+a, tc_2, a+1; 1, c_2, t(c_2+1)\}$, $(c_2+1) = a(a+1)/(t^2-a-1)$ *не делит* a *и не делит* $a+1$. *Если* $t \le 6$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$, $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$, $\{87, 66, 16; 1, 11, 72\}$, $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ *или* $\{188, 162, 21; 1, 27, 168\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений

$$\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}.$$

Тогда Γ_2 — сильно регулярный граф с параметрами $(50, 28, 18, 12)$, для которого нарушается абсолютная граница (предложение 4.1.5 из [1]). Поэтому граф с массивом пересечений $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$ не существует.

В [5] доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$ и $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ не существуют.

Теорема 2. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений* $\{87, 66, 16; 1, 11, 72\}$ *и* $\{188, 162, 21; 1, 27, 168\}$ *не существуют.*

1. Доказательство теоремы 1

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t(c_2+1)+a, tc_2, a+1; 1, c_2, t(c_2+1)\}$ и $(c_2+1) = a(a+1)/(t^2-a-1)$ не делит a_3 и не делит a_3+1.

Лемма 1. *Положим* $s = (a_3, c_2+1)$, $e = (a_3+1, c_2+1)$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $c_2+1 = se$, $a_3^2 + a_3(c_2+2) - t^2(c_2+1) = 0$ *и число* $D = c_2^2 + 4t^2(c_2+1)$ *является квадратом;*

(2) *если* $c_2+1 = a_3(a_3+1)$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$.

Доказательство. Так как c_2+1 делит $a_3(a_3+1)$ и числа a_3, a_3+1 взаимно просты, то $c_2+1 = se$.

Из равенства $(c_2+1) = a_3(a_3+1)/(t^2-a_3-1)$ получим квадратное уравнение $a_3^2 + a_3(c_2+2) - t^2(c_2+1) = 0$. Отсюда число $D = c_2^2 + 4t^2(c_2+1)$ является квадратом.

Заметим, что Γ_3 является сильно регулярным графом с $mu(\Gamma_3) = a_3(a_3+1)/(c_2+1)$. В случае $c_2+1 = a_3(a_3+1)$ имеем $t^2 = a+2$ и $mu(\Gamma_3) = 1$. Далее, Γ_3 имеет неглавные собственные значения $t, -(a+1)$, $k(\Gamma_3) = t(a+1)+1$ и $\lambda(\Gamma_3) = t-a$. Отсюда $t = a = 2$ и Γ имеет массив пересечений $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$. □

Лемма 2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $t = 2$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$;

(2) *число* t *не равно* 3.

Доказательство. Если $t = 2$, то $(c_2+1)(3-a_3) = a_3(a_3+1)$ и $a_3 = 2$. В этом случае Γ имеет массив пересечений $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$.

Если $t = 3$, то $(c_2 + 1)(8 - a_3) = a_3(a_3 + 1)$ и $8 - a_3$ делит 72. В случае $a_3 = 4$ имеем $c_2 + 1 = 5$, $k = 19$ и $a_1 = 3$, противоречие с тем, что число ka_1 четно ($ka_1/2$ — число ребер в окрестности вершины). В случае $a_3 = 5$ имеем $c_2 + 1 = 10$, противоречие с тем, что число $D = c_2^2 + 4t^2(c_2 + 1)$ должно быть квадратом. В случае $a_3 = 6$ имеем $c_2 + 1 = 21$ и Γ имеет массив пересечений $\{69, 60, 7; 1, 20, 63\}$. Граф с таким массивом пересечений не существует, так как $p^3_{33} = -2$. □

Лемма 3. *Если* $t = 4$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$.

Доказательство. Если $t = 4$, то $(c_2 + 1)(15 - a_3) = a_3(a_3 + 1)$ и $15 - a_3$ делит $15 \cdot 16$. В случае $a_3 = 5$ имеем $c_2 + 1 = 3$, противоречие с тем, что $c_2 + 1$ не должно делить $a_3 + 1$.

В случае $a_3 = 7$ имеем $c_2 + 1 = 7$, противоречие с тем, что $c_2 + 1$ не должно делить a_3.

В случае $a_3 = 9$ имеем $c_2+1 = 15$ и Γ имеет массив пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$ (в этом случае Γ_3 — сильно регулярный граф с параметрами $(392, 46, 0, 6)$).

Для графов с $a_3 > 9$ получим $p^3_{33} < 0$, поэтому грфы не существуют. □

Лемма 4. *Если* $t = 5$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$.

Доказательство. Если $t = 5$, то $(c_2 + 1)(24 - a_3) = a_3(a_3 + 1)$. В случае $a_3 = 9$ имеем $c_2+1 = 6$ и $\{39, 25, 10; 1, 5, 30\}$. Противоречие с тем, что число $ka_1 = 39 \cdot 13$ нечетно.

В случае $a_3 = 12$ имеем $c_2+1 = 13$, противоречие с тем, что c_2+1 не должно делить $a_3 + 1$.

В случае $a_3 = 14$ имеем $c_2+1 = 21$ и Γ имеет массив пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ (в этом случае Γ_3 — сильно регулярный граф с параметрами $(800, 85, 0, 10)$).

Для графов с $a_3 > 14$ получим $p^3_{33} < 0$. □

Лемма 5. *Если* $t = 6$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$, $\{87, 66, 16; 1, 11, 72\}$ *или* $\{188, 162, 21; 1, 27, 168\}$.

Доказательство. Если $t = 6$, то $(c_2+1)(35-a_3) = a_3(a_3+1)$. В случае $a_3 = 14$ имеем $c_2 + 1 = 10$ и $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$.

В случае $a_3 = 15$ имеем $c_2+1 = 12$ и Γ имеет массив пересечений $\{87, 66, 16; 1, 11, 72\}$.

В случае $a_3 = 17$ имеем $c_2+1 = 17$, противоречие с тем, что c_2+1 не должно делить a_3.

В случае $a_3 = 20$ имеем $c_2+1 = 28$ и Γ имеет массив пересечений $\{188, 162, 21; 1, 27, 168\}$ (в этом случае Γ_3 — сильно регулярный граф с параметрами $(1458, 141, 0, 15)$).

Для графов с $a_3 > 20$ получим $p^3_{33} < 0$. □

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 опирается на вычисление тройных чисел пересечений [6].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ — число вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$. Числа $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$

называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1r_2r_3]$ нет общих формул. Однако, в [6] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v), U = d(v,w), V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей:

$\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p_{jh}^{U} - [0jh]$, $\sum_{l=1}^{d}[ilh] = p_{ih}^{V} - [i0h]$, $\sum_{l=1}^{d}[ijl] = p_{ij}^{W} - [ij0]$.

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p_{ij}^{W} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим $S_{ijh}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$. Если параметр Крейна $q_{ij}^{h} = 0$, то по теореме 3 из [6] имеем $S_{ijh}(u,v,w) = 0$.

Дальнейшие компьютерные вычисления проведены с помощью указанных формул. Их можно проверить с помощью [7].

2. Граф с массивом пересечений $\{87, 66, 16; 1, 11, 72\}$

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{87, 66, 16; 1, 11, 72\}$. Тогда Γ имеет $1 + 87 + 522 + 116 = 726$ вершин, спектр $87^1, 21^{87}, -1^{522}, -12^{116}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 87 & 522 & 116 \\ 1 & 21 & -6 & -16 \\ 1 & -1 & -6 & 6 \\ 1 & -12 & 27 & -16 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Для чисел пересечений графа* Γ *верны равенства*

(1) $p_{11}^1 = 20$, $p_{21}^1 = 66$, $p_{32}^1 = 96$, $p_{22}^1 = 360$, $p_{33}^1 = 20$;

(2) $p_{11}^2 = 11$, $p_{12}^2 = 60$, $p_{13}^2 = 16$, $p_{22}^2 = 381$, $p_{23}^2 = 80$, $p_{33}^2 = 20$;

(3) $p_{12}^3 = 72$, $p_{13}^3 = 15$, $p_{22}^3 = 360$, $p_{23}^3 = 90$, $p_{33}^3 = 10$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$, $\Delta = \Gamma_3(u)$ и $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени 90 на 116 вершинах.

Лемма 2. *Если* $d(u,v) = d(u,w) = 3, d(v,w) = 1$, *то верны равенства:*

(1) $[122] = -2r_1 + 64$, $[123] = [132] = 2r_1 + 8$, $[133] = -2r_1 + 7$;

(2) $[211] = -r_1 + 20$, $[221] = [212] = r_1 + 52$, $[222] = 3r_1 + 228$, $[223] = [232] = -4r_1 + 80$, $[233] = 4r_1 + 10$;

(3) $[311] = r_1$, $[312] = [321] = -r_1 + 14$, $[322] = -r_1 + 68$, $[323] = [332] = 2r_1 + 8$, $[333] = -2r_1 + 2$,

где $r_1 \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Компьютерные вычисления. □

По лемме 2.2 имеем $67 \le [322] = -r_1 + 68 \le 68$.

Лемма 3. *Если $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 3$, то верны равенства:*

(1) $[122] = -r_2/4 + 117/2$, $[123] = [132] = r_2/4 + 27/2$, $[133] = -r_2/4 + 3/2$;

(2) $[212] = [221] = -r_2/4 + 117/2$, $[213] = r_2/4 + 27/2$, $[222] = 3r_2/2 + 225$, $[223] = [232] = -5r_2/4 + 153/2$, $[233] = r_2$;

(3) $[312] = [321] = r_2/4 + 27/2$, $[313] = -r_2/4 + 3/2$, $[322] = -5r_2/4 + 153/2$, $[323] = [332] = r_2$, $[331] = -r_2/4 + 3/2$, $[333] = -r_2/4 + 15/2$,

где $r_2 \in \{2, 6\}$.

Доказательство. Компьютерные вычисления. □

По лемме 2.3 имеем $69 \le [322] = -5r_2/4 + 153/2 \le 74$. В случае $r_2 = 2$ имеем $[313] = [331] = -r_2/4 + 3/2 = 1$ и $[333] = -r_2/4 + 15/2 = 7$. Противоречие с тем, что $\Lambda - \{v, w\}$ содержит 3 вершины вне $\Lambda(v) \cup \Lambda(w)$. Значит, $r_1 = 0$

Пусть $v, w \in \Delta$. Тогда число ребер e между $\Lambda(w)$ и $\Lambda - (\{w\} \cup \Lambda(w))$ удовлетворяет неравенствам $1695 = 15 \cdot 67 + 10 \cdot 69 \le e \le 15 \cdot 68 + 10 \cdot 74 = 1760$. Отсюда $18.83 \le 89 - \lambda \le 19.56$ и $69.44 \le \lambda \le 70.17$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 4. *Если $d(u,v) = d(u,w) = 3, d(v,w) = 2$, то верны равенства:*

(1) $[122] = -2r_3/3 - 3r_4 + 232$, $[123] = [132] = 2r_3/3 + 3r_4 - 160$, $[133] = -2r_3/3 - 3r_4 + 175$;

(2) $[211] = -r_3/3 - 2r_4 + 96$, $[221] = [212] = r_3/3 + 3r_4 - 40$, $[222] = r_3$, $[223] = [232] = -4r_3/3 - 3r_4 + 400$, $[233] = 4r_3/3 + 4r_4 - 326$;

(3) $[311] = r_3/3 + 2r_4 - 85$, $[312] = [321] = -r_3/3 - 3r_4 + 100$, $[313] = r_4$, $[322] = -r_3/3 + 3r_4 + 149$, $[323] = [332] = 2r_3/3 - 160$, $[333] = -2r_3/3 - r_4 + 170$,

где $r_3 \in \{240, 243, ..., 255\}$, $r_4 \in \{0, 1, ..., 5\}$.

Доказательство. Компьютерные вычисления. □

По лемме 2.4 имеем $64 \le [322] = -r_3/3 + 3r_4 + 149 \le 84$.

Заметим, что $|\left\{ {uv \atop 33} \right\}| = p^3_{33} = 10$ и $|\left\{ {uv \atop 32} \right\}| = p^3_{32} = 90$. Пусть f – число пар вершин (y, z), находящихся на расстоянии 3, где $y \in \left\{ {uv \atop 33} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 32} \right\}$. По лемме 2.3 имеем $300 \le f = p^3_{33} \cdot \left[{uvw \atop 323} \right] = 15r_2 \le 900$. С другой стороны, по лемме 2.4 число f удовлетворяет неравенствам $300 \le f = \sum_i (-2r^i_3/3 - r^i_4) + 90 \cdot 170 \le 900$. Отсюда $14400 \le \sum_i (2r^i_3/3 + r^i_4) \le 15000$ и $160 \le \sum_i (2r^i_3/3 + r^i_4)/90 \le 166.67$

Противоречие с тем, что $65 + 3r_4 \le r_3/3$ и $\sum_i (2r^i_3/3)/90 \le 166.67 - \sum_i r^i_4/90$.

3. Граф с массивом пересечений $\{188, 162, 21; 1, 27, 168\}$

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{188, 162, 21; 1, 27, 168\}$. Тогда Γ имеет $1 + 188 + 1128 + 141 = 1458$ вершин, спектр: $188^1, 26^{188}, -1^{1128}, -28^{141}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 188 & 1128 & 141 \\ 1 & 26 & -6 & -21 \\ 1 & -1 & -6 & 6 \\ 1 & -28 & 48 & -21 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Для чисел пересечений графа Γ верны равенства*

(1) $p^1_{11} = 25$, $p^1_{21} = 162$, $p^1_{32} = 126$, $p^1_{22} = 840$, $p^1_{33} = 15$;

(2) $p^2_{11} = 27$, $p^2_{12} = 140$, $p^2_{13} = 21$, $p^2_{22} = 882$, $p^2_{23} = 105$, $p^2_{33} = 15$;

(3) $p^3_{12} = 168$, $p^3_{13} = 20$, $p^3_{22} = 840$, $p^3_{23} = 120$, $p^3_{33} = 0$.

Доказательство. Прямые вычисления. $\square$

Зафиксируем вершины u, v, w графа Γ и положим $\{ijh\} = \left\{ {uvw \atop ijh} \right\}$, $[ijh] = \left[{uvw \atop ijh} \right]$.

Лемма 2. *Положим $\Sigma = \Gamma_2$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *Σ является псевдогеометрическим графом для $pG_{140}(188,5)$, $\Sigma(u)$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{111}(147,5)$ и $\Sigma_2(u)$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{42}(48,5)$ ($\bar{\Sigma}_2(u)$ имеет параметры $(329,40,3,5)$);*

(2) *Σ не содержит 7-коклик и Γ не содержит 6-клик.*

Доказательство. Ввиду леммы 3.1 граф Σ является сильно регулярным с параметрами (1458,1128,882,840). Поэтому Σ является псевдогеометрическим графом для $pG_{140}(188,5)$. Так как параметр Крейна q^1_{11} в графе Σ равен 0, то графы $\Sigma(u)$ и $\Sigma_2(u)$ являются сильно регулярными.

Отсюда следуют оставшиеся утверждения из (1).

Так как $\bar{\Sigma}_2(u)$ имеет параметры (329,40,3,5), то порядок коклики в Σ не больше 6. Допустим, что Γ содержит 6-клику S. Тогда $\Gamma - S$ содержит $15 \cdot (25-4) = 315$ вершин, смежных с парами вершин из S, $15 \cdot 15 = 225$ вершин, находящихся на расстоянии 3 от пар вершин из S, $6(188-5-5\cdot 21) = 468$ вершин, смежных с единственной вершиной из S, $6(141 - 5\cdot 15) = 396$ вершин, находящихся на расстоянии 3 от единственной вершины из S, и 48 вершин, находящихся на расстоянии 2 от любой вершины из S. противоречие. $\square$

Лемма 3. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 1$. Тогда $[323] = t_1$ и остальные тройные числа пересечений равны:*

(1) *$[111] = t_1 - 12$, $[121] = [211] = -t_1 + 36$, $[122] = t_1 + 126$;*

(2) *$[211] = -t_1 + 36$, $[212] = [221] = t_1 + 126$, $[222] = 588$, $[223] = [232] = [322] = -t_1 + 126$ и $[233] = [332] = t_1$;*

(3) *$[333] = -t_1 + 15$,*

где $t_1 \in \{12, 13, 14, 15\}$.

Доказательство. Компьютерные вычисления с учетом равенств $S_{113}(u,v,w) = S_{131}(u,v,w) = S_{311}(u,v,w) = 0$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = 1, d(v,w) = 2$. Тогда $[233] = t_2$ и остальные тройные числа пересечений равны:*

(1) *$[111] = t_2 - 10$, $[112] = [121] = -t_2 + 35$, $[121] = [211] = -t_2 + 36$, $[122] = t_2 + 126$;*

(2) *$[211] = -t_2 + 36$, $[212] = [221] = t_2 + 105$, $[213] = 21$, $[222] = 630$, $[223] = [232] = -t_2 + 105$;*

(3) *$[322] = -t_2 + 126$, $[323] = [332] = t_2$, $[333] = -t_2 + 15$,*

где $t_2 \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Доказательство. Компьютерные вычисления с учетом равенств $S_{113}(u,v,w) = S_{131}(u,v,w) = S_{311}(u,v,w) = 0$. $\square$

Для тройки вершин u, v, w_i из леммы 3.3 положим $-t^i_1 + 36 = \left[{uvw_i \atop 121} \right]$. Для тройки вершин u, v, w'_i из леммы 3.4 положим $t^i_2 - 10 = \left[{uvw' \atop 111} \right]$. Заметим, что $|\left\{ {uv \atop 11} \right\}| = p^1_{11} = 25$, $|\left\{ {uv \atop 12} \right\}| = p^1_{22} = 840$.

Пусть e – число пар смежных вершин (y,z), где $y \in \left\{ {uv \atop 11} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 12} \right\}$. По лемме 3.3 имеем $[123] = -t_1^i + 36$ и верны неравенства $21 \cdot 25 \leq e = -\sum_i t_1^i + 36 \cdot 25 \leq 24 \cdot 25$. С другой стороны, по лемме 3.4 имеем $[111] = t_2^i - 10$ и число e удовлетворяет неравенствам $0 \leq e = \sum_i t_2^i - 10 \cdot 162 \leq 5 \cdot 162$. Отсюда $2145 \leq e = \sum_i t_2^i \leq 2200$ и $13.240 \leq \sum_i t_2^i/162 \leq 13.581$.

Лемма 5. *Пусть* $d(u,v) = 1, d(u,w) = 2, d(v,w) = 2$. *Тогда* $[012] = [102] = [220] = 1$, $[232] = t_3$, $[111] = t_0$ *и остальные тройные числа пересечений равны:*

(1) $[112] = t_3 - 77$, $[113] = -t_3 - t_0 + 102$,$[121] = -t_0 + 27$, $[122] = -t_3 + 216$, $[123] = t_3 + t_0 - 81$;

(2) $[211] = -t_0 + 27$, $[212] = -t_3 + 216$, $[221] = t_3 + 2t_0 - 4$, $[222] = 666$, $[223] = -t_3 - 2t_0 + 177$, $[231] = -t_3 - t_0 + 117$, $[233] = t_0 + 9$;

(3) $[321] = -t_3 - t_0 + 117$, $[322] = t_3$, $[323] = t_0 + 9$, $[331] = t_3 + t_0 - 96$, $[332] = -t_3 + 105$, $[333] = -t_0 + 6$,

где $t_3 \in \{90, 91, ..., 102\}$, $t_0 \in \{0, 1, ..., 6\}$.

Доказательство. Компьютерные вычисления с учетом равенств $S_{113}(u,v,w) = S_{131}(u,v,w) = S_{311}(u,v,w) = 0$. □

Для тройки вершин u, v, w_i из леммы 3.5 положим $-t_0 + 27 = \left[{uvw_i \atop 121} \right]$. $t_3 + t_0 - 81 = \left[{uvw_i \atop 123} \right]$. Заметим, что $|\left\{ {uv \atop 12} \right\}| = p_{12}^1 = 162$, $|\left\{ {uv \atop 22} \right\}| = p_{22}^1 = 840$. Пусть e – число пар смежных вершин (y,z), где $y \in \left\{ {uv \atop 12} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. По лемме 3.5 имеем $[221] = t_3 + 2t_0 - 4$ и верны неравенства $13932 = 86 \cdot 162 \leq e = \sum_i t_3^i + 2\sum_i t_0^i - 4 \cdot 162 \leq 110 \cdot 162 = 17820$.

С другой стороны, по лемме 3.4 имеем $[121] = -t_2^i + 36$ и число e удовлетворяет неравенствам $13932 \leq e = -\sum_i t_2^i + 36 \cdot 840 \leq 21 \cdot 840 = 17640$. Отсюда $15 \cdot 840 \leq \sum_i t_2^i \leq 36 \cdot 30240 - 13932 = 16308$ и $15 \leq \sum_i t_2^i/840 \leq 19.4$.

Таким образом, $t_2 = 15$, противоречие с тем, что $13.240 \leq \sum_i t_2^i/162 \leq 13.581$.

Теорема 2 доказана.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag. Berlin etc., 1989. Zbl 0747.05073

[2] A. Jurishich, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr., **65**:1-2 (2012), 29–47. Zbl 1245.05036

[3] M.S. Nirova, *On distance-regular graphs* Γ *with strongly regular graphs* Γ_2 *and* Γ_3, Sib. Electron. Math. Izv., **15** (2018), 175–185. Zbl 1430.05029

[4] *I.N. Belousov, A.A. Makhnev, M.S. Nirova. On Q-polynomial distance-regular graphs* Γ *with strongly regular graphs* Γ_2 *and* Γ_3, Sib. Electron. Math. Izv., **16** (2019), 1385–1392. Zbl 1426.05061

[5] A.A. Makhnev, M.M. Isakova, M.S. Nirova. *Distance-regular graphs with intersection arrays* $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$ *and* $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ *do not exist*, Sib. Electron. Math. Izv., **16** (2019), 1254–1259. Zbl 1425.05072

[6] K. Coolsaet, A. Jurishich, *Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs*, J. Comb. Theory, Ser. A, **115**:6 (2008), 1086–1095. Zbl 1182.05132

[7] J. Vidali. jaanos/sage-drg: sage-drg Sage package v0.8, 2018. https://github.com/jaanos/sage-drg/, doi:10.5281/zenodo.1418410.

Aleksandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16, S.Kovalevskaya str.,
Yekaterinburg, 620990, Russia
Email address: makhnev@imm.uran.ru

Mariana Malilovna Isakova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
175, Chernyshevsky str.,
Nalchik, 360004, Russia
Email address: isakova2206@mail.ru

Albina Aniuarovna Tokbaeva
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
175, Chernyshevsky str.,
Nalchik, 360004, Russia
Email address: tok2506@mail.ru