S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1137–1154 (2020) УДК 510.67, 512.54, 519.179.1
DOI 10.33048/semi.2020.17.086 MSC 03C50, 20K25, 05C65

О ГИПЕРГРАФАХ МИНИМАЛЬНЫХ И ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

С.В. СУДОПЛАТОВ

Abstract. We systematize known results about minimal and prime models of theories of abelian groups. Based on these results we describe properties and provide structural ones on hypergraphs of models for theories of abelian groups. In particular, we characterize non-emptiness and infiniteness of hypergraphs of minimal and prime models. We give necessary and sufficient conditions for almost disjointness of the respective hypergraphs. We also characterize conditions of preservation for non-emptiness and disjointness of hypergraphs of minimal and prime models at transformations to direct sums of groups.

Keywords: hypergraph of models, minimal model, prime model, abelian group, elementary theory.

При изучении моделей элементарных полных теорий T как в общем виде, так и применительно к естественным классам, важную роль играет разложение моделей на сравнительно несложно устроенные подмодели, а также описание подмоделей и их взаимосвязей. В качестве таких подмоделей естественно рассматривать простые и минимальные модели. Напомним, что модель $\mathcal{M}$ теории T называется *простой*, если $\mathcal{M}$ элементарно вкладывается в любую модель теории T. Модель $\mathcal{M}$ теории T называется *минимальной*, если $\mathcal{M}$ не содержит собственных подсистем, являющихся моделями теории T.

Структурное описание моделей теории предполагает описание взаимосвязей подмоделей и, в частности, описание таких важных составляющих, как

Sudoplatov, S.V., On hypergraphs of minimal and prime models of theories of abelian groups.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1, проект № 0314-2019-0002, и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05132546).

Поступила 24 июля 2020 г., опубликована 21 августа 2020 г.

гиперграфы минимальных и простых моделей, включающих гиперграфы минимальных простых моделей, т.е. моделей, которые являются одновременно простыми и минимальными.

Напомним, что *гиперграфом* называется любая пара множеств (X, Y), где Y — некоторое подмножество булеана $\mathcal{P}(X)$ множества X.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая модель полной теории T. Следуя [1, 2], обозначим через $H(\mathcal{M})$ совокупность всех подмножеств M_0 носителя M системы $\mathcal{M}$, которые являются носителями минимальных простых подмоделей $\mathcal{M}_0$ модели $\mathcal{M}$: $H(\mathcal{M}) = \{M_0 \mid \mathcal{M}_0 — \text{минимальная простая подмодель модели } \mathcal{M}\}$. Пара $(M, H(\mathcal{M}))$ называется *гиперграфом минимальных простых подмоделей* модели $\mathcal{M}$. Заменяя в приведенном определении минимальные простые модели на минимальные или простые, получаем понятия гиперграфа минимальных моделей и гиперграфа простых моделей. При рассмотрении всех элементарных подмоделей данной модели также получается гиперграф, называемый гиперграфом элементарных подмоделей.

В работах [1, 2] показано, что существует три вида ациклических гиперграфов минимальных простых моделей: дизъюнктные (т.е. с попарно непересекающимися носителями), почти дизъюнктные (с конечными попарными пересечениями) диаметра 2, почти дизъюнктные бесконечного диаметра. Некоторые иные виды гиперграфов моделей рассмотрены в ряде других работ: гиперграфы моделей с бинарными надстройками, учитывающими симметричные и несимметричные связи между элементами моделей [3, 4, 6], гиперграфы моделей некоторых естественных классов теорий [5]. В работах [7, 8] изучена топологическая отделимость элементов и множеств в гиперграфах элементарных подмоделей.

Гиперграфы минимальных и простых моделей для теорий абелевых групп неявно изучались ранее. В работе [9] описаны теории абелевых групп, имеющие минимальные модели, т.е. имеющие непустой гиперграф минимальных моделей. В этой же работе описаны теории абелевых групп без кручения, имеющие простые модели, т.е. имеющие непустой гиперграф простых моделей. В книге Ю.Л. Ершова [10] доказано, что теории абелевых p-групп имеют простые модели, т.е. также имеют непустой гиперграф простых моделей. В работе [11] охарактеризовано существование простой модели для произвольной теории абелевой группы.

В настоящей работе приводится характеризация непустоты гиперграфов минимальных и простых моделей, а также дается явное описание ряда гиперграфов моделей теорий абелевых групп: рассматриваются одноэлементные и почти дизъюнктные гиперграфы минимальных и простых моделей теорий абелевых групп и даются характеризации наличия таких гиперграфов в терминах шмелевских инвариантов. Эти гиперграфы во многом раскрывают структуру моделей теорий абелевых групп.

Работа состоит из четырех разделов. В первом разделе систематизируются алгебраические и теоретико-модельные свойства абелевых групп, приводятся необходимые и достаточные условия существования простых и минимальных моделей. Во втором разделе определяются гиперграфы моделей теории, а также диаметры этих гиперграфов, приводится теорема о трихотомии для гиперграфов минимальных простых моделей. В третьем разделе охарактеризованы условия непустоты и бесконечности гиперграфов минимальных и простых моделей, а также условия почти дизъюнктности этих гиперграфов. В четвертом разделе рассмотрена операция прямого сложения абелевых групп и относительно этой операции охарактеризованы условия непустоты и почти дизъюнктности гиперграфов минимальных и простых моделей.

1. Теории абелевых групп, их минимальные и простые модели

Мы будем пользоваться стандартными понятиями и обозначениями из теории групп [12, 13, 14]. Напомним основные понятия, относящиеся к шмелевским инвариантам.

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева группа, тогда через $k\mathcal{A}$ обозначается ее подгруппа $\{ka \mid a \in A\}$, через $\mathcal{A}[k]$ — подгруппа $\{a \in A \mid ka = 0\}$. Если p — простое число и $pA = \{0\}$, то через $\dim\mathcal{A}$ обозначается размерность группы $\mathcal{A}$, рассматриваемой как векторное пространство над полем из p элементов. Следующие числа для произвольных p и n (p — простое, n — натуральное) называются инвариантами Шмелевой [15] для группы $\mathcal{A}$ [16]:

$$\alpha_{p,n}(\mathcal{A}) = \min\{\dim((p^n\mathcal{A})[p]/(p^{n+1}\mathcal{A})[p]), \omega\},$$

$$\beta_p(\mathcal{A}) = \min\{\inf\{\dim((p^n\mathcal{A})[p] \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\gamma_p(\mathcal{A}) = \min\{\inf\{\dim((\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])/p(\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])) \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\varepsilon(\mathcal{A}) \in \{0,1\}, \text{ и } \varepsilon(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow (n\mathcal{A} = \{0\} \text{ для некоторого } n \in \omega, n \neq 0).$$

Известно [16, теорема 8.4.10], что две абелевы группы элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их соответствующие инварианты Шмелевой совпадают. Кроме того, справедливо следующее

Предложение 1. [16, предложение 8.4.12] *Пусть для каждого p и n даны кардиналы $\alpha_{p,n}$, β_p, $\gamma_p \leq \omega$ и $\varepsilon \in \{0,1\}$. Для того чтобы существовала абелева группа $\mathcal{A}$, для которой инварианты Шмелевой $\alpha_{p,n}(\mathcal{A})$, $\beta_p(\mathcal{A})$,$\gamma_p(\mathcal{A})$ и $\varepsilon(\mathcal{A})$ совпадали соответственно с $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p и ε, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *если для простого p множество $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ бесконечно, то $\beta_p = \gamma_p = \omega$;*

2) *если $\varepsilon = 0$, то для любого простого p выполнены равенства $\beta_p = \gamma_p = 0$ и множество $\{\langle p,n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ конечно.*

Через $\mathbf{Q}$ будем обозначать аддитивную группу рациональных чисел, $\mathbf{Z}_{p^n}$ — циклическую группу порядка p^n, $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ — квазициклическую группу всех комплексных корней из 1 степени p^n для всех $n \geq 1$, R_p — группу несократимых дробей со взаимно простым с p знаменателем. Группы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_{p^n}$, R_p, $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ называются *базисными.* В дальнейшем обозначения для указанных групп будут также отождествляться с их носителями.

Из совпадения теорий абелевых групп, имеющих одинаковые инварианты Шмелевой, вытекает, что любая абелева группа $\mathcal{A}$ элементарно эквивалентна группе

$$\oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \oplus_p\mathbf{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathbf{Q}^{(\varepsilon)}, \qquad (1)$$

где $\mathcal{B}^{(k)}$ означает прямую сумму k подгрупп, изоморфных группе $\mathcal{B}$. Таким образом, теория любой абелевой группы имеет в качестве своей модели некоторую прямую сумму базисных групп. В дальнейшем группы вида (1) будем называть *стандартными*.

Замечание 1. Из определения инвариантов Шмелевой следует, что, наряду с выполнением пункта 1) предложения 1, абелева группа $\mathcal{A}$ элементарно эквивалентна некоторой стандартной группе вида (1), где значения β_p и γ_p заменены на 0 при $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$, а наряду с выполнением пункта 2) предложения 1, абелева группа $\mathcal{A}$ элементарно эквивалентна некоторой стандартной группе вида (1), где значение ε заменено на 0 при наличии некоторого $\beta_p \neq 0$, или $\gamma_p \neq 0$, или бесконечного множества $\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$.

Теорема 1. [10] *Если $\mathcal{A}$ — абелева группа и $\mathcal{A} = \oplus_{i\in\omega}\mathcal{A}_i$, то $\alpha_{p,n}(\mathcal{A}) = \sum\limits_{i\in\omega} \alpha_{p,n}(\mathcal{A}_i)$, $\beta_p(\mathcal{A}) = \sum\limits_{i\in\omega} \beta_p(\mathcal{A}_i)$, $\gamma_p(\mathcal{A}) = \sum\limits_{i\in\omega} \gamma_p(\mathcal{A}_i)$.*

Напомним, что группа $\mathcal{A}$ называется *полной* или *делимой*, если для всякого натурального числа $n > 0$ и любого элемента $a \in A$ уравнение $nx = a$ имеет в группе $\mathcal{A}$ хотя бы одно решение.

Теорема 2. [12, 13] *Полная подгруппа $\mathcal{A}$ абелевой группы $\mathcal{B}$ выделяется в $\mathcal{B}$ прямым слагаемым.*

Теорема 3. [12] *Ненулевая полная абелева группа $\mathcal{A}$ разлагается в прямую сумму групп, изоморфных базисным группам $\mathbf{Q}$ или $\mathbf{Z}_{p^\infty}$, для некоторых p.*

Напомним, что группа $\mathcal{A}$ называется *редуцированной*, если в ней нет ненулевых делимых подгрупп.

Непосредственно из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие 1. [13] *Любая абелева группа $\mathcal{A}$ представляется в виде прямой суммы $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, где группа $\mathcal{A}_1$ редуцирована, а группа $\mathcal{A}_2$ является прямой суммой групп, изоморфных базисным группам $\mathbf{Q}$ или $\mathbf{Z}_{p^\infty}$, для некоторых p.*

Замечание 2. Согласно следствию 1, для теории абелевой группы $\mathcal{A}$ все инварианты $\alpha_{p,n}$ и γ_p совпадают с соответствующими инвариантами теории $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_1)$.

Напомним, что подгруппа $\mathcal{A}$ группы $\mathcal{B}$ называется *сервантной*, если для всякого натурального числа $n > 0$ и любого элемента $a \in A$ если уравнение $nx = a$ имеет решение в группе $\mathcal{B}$, то это уравнение имеет решение и в группе $\mathcal{A}$.

Теорема 4. [17, 10] *Для любой подгруппы $\mathcal{A}$ абелевой группы $\mathcal{B}$ имеет место $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ — сервантная подгруппа $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.*

Определение 1. [13] Подгруппа $\mathcal{A}$ группы $\mathcal{B}$ называется *базисной* (не путать с базисными группами, каждая из которых рассматривается самостоятельно!), если выполняются следующие условия:

1) $\mathcal{A}$ есть прямая сумма циклических групп, т. е. групп, изоморфных группам $\mathbf{Z}_{p^n}$ и $\mathbf{Z}$;

2) $\mathcal{A}$ — сервантная подгруппа группы $\mathcal{B}$;

3) $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ — делимая группа.

Теорема 5. [13] *Всякая абелева группа обладает базисной подгруппой.*

Напомним, что *примарной группой*, или *p-группой*, называется группа, порядки элементов которой являются степенями фиксированного простого числа p.

По определению, для любой p-группы $\mathcal{A}$ все значения $\alpha_{q,n}$, β_q, γ_q равны нулю при $q \neq p$.

Теорема 6. [10] *Если $\mathcal{A}$ — базисная подгруппа абелевой p-группы $\mathcal{B}$ и $\varepsilon(\mathcal{A}) = 1$, то $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.*

Напомним [13], что группа $\mathcal{A}$ называется *ограниченной*, если существует такое положительное число n, что $n\mathcal{A} = \{0\}$. В противном случае группа $\mathcal{A}$ называется *неограниченной*.

Теорема 7. [18] *Для любой абелевой группы $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathcal{A}$ неограниченна;*
2) *$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A} \oplus \mathbf{Q}$;*
3) *$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A} \oplus \mathbf{Q}^{(\omega)}$.*

Теорема 8. [13] *Ограниченная сервантная подгруппа $\mathcal{A}$ абелевой группы $\mathcal{B}$ выделяется в $\mathcal{B}$ прямым слагаемым.*

Теорема 9. [10] *Если $\mathcal{A}$ — сервантная подгруппа абелевой группы $\mathcal{B}$, то $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}/\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.*

Напомним, что модель $\mathcal{M}$ теории T называется *простой*, если она элементарно вкладывается в любую модель теории T. Модель $\mathcal{M}$ теории T называется *минимальной*, если $\mathcal{M}$ не содержит собственных подсистем, являющихся моделями теории T.

Теорема 10. [10] *Если $\mathcal{A}$ — абелева p-группа, то $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ имеет простую модель, представимую в виде стандартной группы* (1) *с $\alpha_{q,n} = \beta_q = \gamma_q = \gamma_p = 0$ при $q \neq p$.*

Напомним, что группа $\mathcal{A}$ называется *периодической*, если каждый элемент из A имеет конечный порядок.

Следующая теорема является непосредственным обобщением теоремы 10.

Теорема 11. [11] *Если $\mathcal{A}$ — периодическая абелева группа, то $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ имеет простую модель, представимую периодической стандартной группой вида* (1).

Замечание 3. Простая модель в теореме 11 является минимальной тогда и только тогда, когда конечны все шмелевские инварианты для группы $\mathcal{A}$, участвующие в построении этой модели согласно (1).

Для любой группы $\mathcal{A}$ через $T(A)$ обозначается ее *периодическая часть*, т. е. множество всех элементов из A, имеющих конечный порядок. Очевидно, что если $\mathcal{A}$ — абелева группа, то $T(A)$ образует подгруппу. Эту подгруппу будем обозначать через $T(\mathcal{A})$.

Напомним, что группа $\mathcal{A}$ называется *группой без кручения*, если все ее неединичные элементы имеют бесконечный порядок.

Теорема 12. [9] *Если $\mathcal{A}$ — абелева группа без кручения, то $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ имеет простую модель тогда и только тогда, когда существует конечное множество*

P_0 *простых чисел и* $\lambda \in \omega+1$ *такие, что* $\gamma_p(\mathcal{A}) = \lambda$ *при* $p \in P_0$ *и* $\gamma_p(\mathcal{A}) = 0$ *при* $p \notin P_0$. *Эта простая модель является минимальной тогда и только тогда, когда значение* λ *конечно.*

Замечание 4. Простая модель в теореме 12 представляется виде прямой суммы $R^{(\lambda)}_{P_0}$, состоящей из λ копий группы R_{P_0}, задаваемой множеством рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на простые числа из P_0 [9, 14], если $P_0 \neq \emptyset$. Если же $P_0 = \emptyset$, то простая модель теории ненулевой группы без кручения изоморфна группе $\mathbf{Q}$.

Теорема 13. [11] *Если* $\mathcal{A}$ — *абелева группа, то* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *имеет простую модель тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) $\mathcal{A} \equiv T(\mathcal{A})$;

б) *редуцированная часть* $T(\mathcal{A})$ *ограничена и теория* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}/T(\mathcal{A}))$ *имеет простую модель.*

Замечание 5. При наличии простой модели, эта модель представляется в виде прямой суммы некоторых циклических групп $\mathbb{Z}_{p^n}$ с некоторой группой $R^{(\lambda)}_{P_0}$, а также возможно с некоторыми делимыми группами, включая не более одной группы, изоморфной $\mathbb{Q}$. Наличие последней группы равносильно значению $\varepsilon = 1$ при отсутствии групп $R^{(\lambda)}_{P_0}$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, а также при выполнении $|\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| < \omega$.

Напомним [13], что *рангом* $r(\mathcal{A})$ абелевой группы $\mathcal{A}$ называется мощность ее максимальной независимой системы, содержащей только элементы бесконечного порядка или порядка, равного степени простого числа. При рассмотрении множества элементов из $\mathcal{A}$, имеющих бесконечный порядок, мощность максимальной независимой системы называется *рангом без кручения* $r_0(\mathcal{A})$ группы $\mathcal{A}$. Аналогично, при рассмотрении множества элементов из $\mathcal{A}$, порядки которых являются степенями фиксированного простого числа p, мощность максимальной независимой системы называется *p-рангом* $r_p(\mathcal{A})$ группы $\mathcal{A}$.

В силу [13, теорема 16.3] ранги $r(\mathcal{A})$, $r_0(\mathcal{A})$, $r_p(\mathcal{A})$ являются инвариантами группы $\mathcal{A}$ и при этом выполняется формула:

$$r(\mathcal{A}) = r_0(\mathcal{A}) + \sum_p r_p(\mathcal{A}).$$

Для ненулевой абелевой группы $\mathcal{A}$ без кручения значения $\min\{r_p(\mathcal{A}), \omega\}$ совпадают с $\gamma_p(\mathcal{A})$. Тем самым, в силу отсутствия положительных $\alpha_{p,n}(\mathcal{A})$ и $\beta_p(\mathcal{A})$, функция $\gamma\colon P \to \omega+1$, где P — множество всех простых чисел $\gamma(p) = \gamma_p(\mathcal{A})$, полностью задает набор шмелевских инвариантов группы $\mathcal{A}$, а, значит, и теорию $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$. Поэтому естественно эту теорию обозначать через T_γ.

Теорема 14. [9] *Пусть* $\mathcal{A}$ — *абелева группа без кручения,* $T_\gamma = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$. *Тогда имеют место следующие утверждения.*

i) *Не существует минимальной модели теории* T_γ, *имеющей бесконечный ранг.*

ii) *Любая модель, имеющая конечный ранг, содержит элементарную минимальную подмодель.*

iii) *Следующие условия эквивалентны:*

1) *теория* T_γ *имеет минимальную модель;*

2) *теория* T_γ *имеет модель конечного ранга;*

3) $\sup\gamma \rightleftharpoons \sup\{\gamma(p) \mid p \in P\} < \omega$.

iv) *Если* $\sup\gamma < \omega$ *и* ρ_γ *конечно, то любая модель* $\mathcal{A}'$ *теории* T_γ *содержит минимальную элементарную подмодель* $\mathcal{A}''$ *ранга* $\sup\gamma$ *и при этом минимальность элементарной подмодели* $\mathcal{A}''$ *равносильна равенству* $r(\mathcal{A}'') = \sup\gamma$.

v) *Если теория* T_γ *не имеет простую модель, то либо* T_γ *не имеет минимальных моделей, либо существует* 2^ω *попарно неизоморфных минимальных моделей теории* T_γ*, имеющих ранг, не превосходящий* $\sup\gamma$.

Из замечаний 1, 3, 4, 5 и теорем 13, 14 вытекают следующие теоремы.

Теорема 15. *Если* $\mathcal{A}$ — *абелева группа, то* $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *имеет минимальную модель тогда и только тогда, когда конечны все шмелевские инварианты для группы* $\mathcal{A}$*, кроме значений* β_p *и* γ_p *при* $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$*, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) $\mathcal{A} \equiv T(\mathcal{A})$;

б) *для стандартной модели* $\mathcal{A}' \models T$ *вида* (1) *с нулевыми значениями* β_p *и* γ_p *при* $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$ *теория* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}'/T(\mathcal{A}'))$ *имеет минимальную модель* (*конечного ранга* $\sup\gamma$).

Теорема 16. *Если* $\mathcal{A}$ — *абелева группа, то* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *имеет минимальную простую модель тогда и только тогда, когда конечны все шмелевские инварианты для группы* $\mathcal{A}$*, кроме значений* β_p *и* γ_p *при* $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$*, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) $\mathcal{A} \equiv T(\mathcal{A})$;

б) *редуцированная часть* $T(\mathcal{A})$ *ограничена и теория* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}/T(\mathcal{A}))$ *имеет минимальную простую модель.*

Замечание 6. При наличии минимальной модели теории $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, некоторая модель представляется в виде прямой суммы некоторых циклических групп $\mathbb{Z}_{p^n}$ с некоторой минимальной моделью $\mathcal{M}$ теории группы без кручения, а также возможно с некоторыми делимыми группами, включая не более одной группы, изоморфной $\mathbb{Q}$. Наличие последней группы равносильно значению $\varepsilon = 1$ при отсутствии групп $\mathcal{M}$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, а также при выполнении $|\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| < \omega$.

Замечание 7. При наличии минимальной простой модели теории $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, эта модель представляется в виде прямой суммы некоторых циклических групп $\mathbf{Z}_{p^n}$ с некоторой группой $R_{P_0}^{(\lambda)}$, $\lambda < \omega$, а также возможно с некоторыми делимыми группами, включая не более одной группы, изоморфной $\mathbf{Q}$. Наличие последней группы равносильно значению $\varepsilon = 1$ при отсутствии групп $R_{P_0}^{(\lambda)}$, $\mathbf{Z}_{p^\infty}$, а также при выполнении $|\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| < \omega$, т. е. при выполнении заключения условия 2) предложения 1.

На основании замечаний 5, 6, 7 справедлива следующая теорема.

Теорема 17. *Если* $\mathcal{A}$ — *простая или минимальная модель теории абелевых групп, то* $\mathcal{A}$ *содержит* (*единственную*) *подгруппу* $\mathbf{Q}$ (*в качестве прямого слагаемого*) *тогда и только тогда, когда* $\varepsilon = 1$*, для любого простого p выполнены равенства* $\beta_p = \gamma_p = 0$ *и множество* $\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ *конечно.*

Замечание 8. Группа $\mathbf{Q}$, будучи делимой группой ранга 1, не содержит собственных элементарных подгрупп, а уже группа $\mathbf{Q}^{(2)}$ имеет бесконечно много подгрупп, изоморфных $\mathbf{Q}$. Действительно, произвольный элемент $q \oplus q' \in \mathbf{Q}^{(2)}$ задает такую подгруппу, состоящую из элементов $\frac{m}{n} \cdot (q \oplus q')$, и таких подгрупп бесконечно много, поскольку имеется бесконечно много *независимых* элементов $q \oplus q'$, задающих разные тангенсы $\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{q'}{q}$ углов наклона на декартовой плоскости. Таким образом, при наличии двух подгрупп, изоморфных $\mathbf{Q}$, имеется бесконечно много таких подгрупп. В силу ранга 1, число таких подгрупп в данной абелевой группе $\mathcal{A}$ совпадает с мощностью наибольшей делимой группы без кручения, выделяемой в группе $\mathcal{A}$ в качестве прямого слагаемого. При этом указанные подгруппы пересекаются лишь по нулевому элементу.

Из замечания 8 вытекает следующая

Теорема 18. *Любая абелева группа $\mathcal{A}$ либо не содержит подгрупп, изоморфных $\mathbf{Q}$, либо содержит единственную такую подгруппу, либо содержит бесконечно много таких подгрупп, причем пересекающихся лишь по нулевому элементу. В последнем случае число таких подгрупп совпадает с мощностью наибольшей делимой группы без кручения, выделяемой в группе $\mathcal{A}$ в качестве прямого слагаемого.*

Замечание 9. Как показано в [14, Глава XIII], наряду с эффектом, представленном в замечании 8, разработка структурной теории абелевых групп без кручения встречает объективные трудности, поскольку схемы разложения групп в прямые суммы существенно различаются для периодических групп и для групп без кручения: в то время как неразложимая периодическая группа имеет ранг 1, количество неразложимых групп без кручения ранга λ совпадает с общим количеством групп без кручения этого ранга. Даже для групп конечного ранга имеется достаточно много разнообразных разложений в прямую сумму неразложимых групп.

2. Гиперграфы минимальных и простых моделей, их диаметры

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая модель полной теории T, $\langle M, H(\mathcal{M})\rangle$ — гиперграф минимальных простых моделей, состоящий из носителя M модели $\mathcal{M}$, а также из множества $H(\mathcal{M}) = \{M_0 \mid \mathcal{M}_0$ — минимальная простая подмодель модели $\mathcal{M}\}$.

Для элементов $a, b \in M$ минимальные простые подмодели модели $\mathcal{M}$, содержащие эти элементы, обозначаются через $\mathcal{M}(a, b)$, а носители этих моделей — через $M(a, b)$.

Напомним [1, 2], что *маршрутом* в гиперграфе $\langle M, H(\mathcal{M})\rangle$ называется любая последовательность элементов $a_0, a_1, \ldots, a_n \in M$ такая, что существуют модели $\mathcal{M}(a_i, a_{i+1})$, $i = 0, \ldots, n-1$, и $M(a_i, a_{i+1}) \neq M(a_{i+1}, a_{i+2})$, $i = 0, \ldots, n-2$. При этом число $n-1$ называется *длиной* маршрута $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. *Расстоянием* $\rho_{\mathcal{M}}(a, b)$ между элементами a и b из M называется длина кратчайшего маршрута $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ (где $a_0 = a$, $a_n = b$), если такой маршрут существует, и $\rho_{\mathcal{M}}(a, b) \rightleftharpoons \infty$, если элементы a и b не связаны маршрутами.

Связной компонентой гиперграфа $\langle M, H(\mathcal{M})\rangle$ называется любое максимальное подмножество множества M, в котором любые два элемента связаны некоторым маршрутом. *Связной компонентой* модели $\mathcal{M}$ называется любая подсистема $\mathcal{N}$ модели $\mathcal{M}$, носитель которой является связной компонентой гиперграфа $\langle M, H(\mathcal{M})\rangle$.

Диаметром $d_H(\mathcal{M})$ гиперграфа $\langle M, H(\mathcal{M})\rangle$ называется наибольшее из расстояний между элементами, лежащими в одной связной компоненте, если такое расстояние определено, и $d_H(\mathcal{M}) \rightleftharpoons \infty$ в противном случае. *Диаметром* $d(T)$ теории T называется $\sup\{d_H(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \models T\}$.

Элемент a модели $\mathcal{M}$ называется *точкой сочленения*, если он принадлежит по крайней мере двум минимальным простым подмоделям и для любых минимальных простых подмоделей $\mathcal{M}_0^1$ и $\mathcal{M}_0^2$ таких, что $M_0^1 \cap M_0^2 = \{a\}$, любой маршрут, соединяющий элементы из M_0^1 и M_0^2, содержит элемент a.

Расстоянием $\rho_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_0^1, \mathcal{M}_0^2)$ между минимальными простыми моделями $\mathcal{M}_0^1$ и $\mathcal{M}_0^2$ с носителями из $H(\mathcal{M})$ называется наименьшее значение $\rho_{\mathcal{M}}(a, b)$, где $a \in M_0^1$ и $b \in M_0^2$.

Обозначим через $\mathcal{T}_H$ класс элементарных полных теорий T с бесконечными моделями таких, что любая модель $\mathcal{M} \models T$ удовлетворяет следующим условиям:

(а) каждая минимальная простая подмодель модели $\mathcal{M}$ является элементарной подмоделью;

(б) система $H(\mathcal{M})$ покрывает множество M;

(в) любые два различных множества M_0 и M_0' из $H(\mathcal{M})$ имеют не более одного общего элемента.

Обозначим через $\mathcal{T}_H^a$ подкласс класса $\mathcal{T}_H$, состоящий из теорий T, у которых любая модель $\mathcal{M} \models T$ удовлетворяет следующим условиям:

(г) гиперграф $\langle M, H(\mathcal{M})\rangle$ *ацикличен*, т.е. не существует попарно различных множеств $M^0, \ldots, M^n \in H(\mathcal{M})$, $n \geq 1$, таких, что $M^i \cap M^{i+1} \neq \emptyset$, $i = 0, \ldots, n-1$, $M^n \cap M^0 \neq \emptyset$;

(д) для любых двух семейств $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\}$ и $\{\mathcal{M}_i' \mid i \in I\}$ минимальных простых подмоделей модели $\mathcal{M}$ из условий $\rho_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j) = \rho_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_i', \mathcal{M}_j')$ для любых $i, j \in I$ и существования изоморфизмов $f_i : \mathcal{M}_i \widetilde{\to} \mathcal{M}_i'$ таких, что точки сочленения, через которые проходят все маршруты, связывающие $\mathcal{M}_i$ с $\mathcal{M}_j$, переходят в точки сочленения, через которые проходят все маршруты, связывающие $\mathcal{M}_i'$ с $\mathcal{M}_j'$, следует существование изоморфизма $f : \bigcup\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\} \widetilde{\to} \bigcup\{\mathcal{M}_i' \mid i \in I\}$, расширяющего изоморфизмы f_i и расширяющегося до автоморфизма некоторой элементарной надмодели $\mathcal{N}$ модели $\mathcal{M}$.

Далее через $I(T, \lambda)$ будем обозначать число попарно неизоморфных моделей теории T, имеющих мощность λ.

Теорема 19. [1, 2] *Любая теория T из класса $\mathcal{T}_H^a$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $1 \leq d(T) \leq 2$, $I(T, |T|) = |\alpha + \omega|$, где $|T| = \omega_\alpha$, и $I(T, \lambda) = 1$, если $\lambda > |T|$;

2) $d(T) = \infty$, T — тотально трансцендентная теория бесконечного ранга Морли и $I(T, \omega_\alpha) = (\max(\lambda_0, |\alpha|))^\omega$, где λ_0 — число точек сочленения минимальной простой модели, лежащей в $|T|^+$-насыщенной модели теории T, $\omega_\alpha \geq |T|$.

Таким образом, согласно теореме 19 для теорий из класса $\mathcal{T}_H^a$ существует три вида ациклических гиперграфов минимальных простых моделей: *дизъюнктные* (т.е. с попарно непересекающимися носителями), *почти дизъюнктные* (с конечными попарными пересечениями) диаметра 2, почти дизъюнктные бесконечного диаметра.

Аналогично понятию эквациональной теории [19] будем называть гиперграф $(M, H(\mathcal{M}))$ *эквациональным*, если любое пересечение элементов из $H(\mathcal{M})$ совпадает с их некоторым конечным пересечением.

Очевидно, что как дизъюнктные, так и почти дизъюнктные гиперграфы являются эквациональными.

В следующем разделе помимо гиперграфов $(M, H(\mathcal{M}))$ минимальных простых моделей мы будем рассматривать гиперграфы простых моделей и гиперграфы минимальных моделей. Чтобы различать эти гиперграфы, последние будем обозначать через $(M, \mathrm{Hp}(\mathcal{M}))$ и $(M, \mathrm{Hm}(\mathcal{M}))$ соответственно. При этом *диаметр* гиперграфа $(M, \mathrm{Hp}(\mathcal{M}))$ $((M, \mathrm{Hm}(\mathcal{M})))$, определяемый заменой пары $(M, H(\mathcal{M}))$ на $(M, \mathrm{Hp}(\mathcal{M}))$ $((M, \mathrm{Hm}(\mathcal{M})))$, будет обозначаться через $d_{\mathrm{Hp}}(\mathcal{M})$ $(d_{\mathrm{Hm}}(\mathcal{M}))$.

Отметим, что по определению имеет место $H(\mathcal{M}) = \mathrm{Hp}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Hm}(\mathcal{M})$.

3. Гиперграфы минимальных и простых моделей теорий абелевых групп

Следующая теорема являются переформулировкой теоремы 13 с применением теоремы 12.

Теорема 20. *Для любой абелевой группы $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{Hp}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$*;*

2) *выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) $\mathcal{A} \equiv T(\mathcal{A})$*;*

б) *редуцированная часть $T(\mathcal{A})$ ограничена и при этом $\mathrm{Hp}(\mathcal{A}/T(\mathcal{A})) \neq \emptyset$, т. е. существует конечное множество P_0 простых чисел и $\lambda \in \omega + 1$ такие, что $\gamma_p(\mathcal{A}/T(\mathcal{A})) = \lambda$ при $p \in P_0$ и $\gamma_p(\mathcal{A}/T(\mathcal{A})) = 0$ при $p \notin P_0$.*

Заметим, что сохраняется элементарная эквивалентность при переходе к подгруппам в классе стандартных групп вида (1), по модулю соотношений из предложения 1, тогда и только тогда, когда сохраняется индекс k каждого слагаемого $B^{(k)}$. Это означает, что сохраняются, и тем самым определяются однозначно, группы $B^{(k)}$ для конечных k и имеется 2^ω вариантов таких подгрупп для $k = \omega$. Более общо, при $k = \lambda \geq \omega$, имеется 2^λ таких подгрупп. С учетом теорем 12, 18, 20 и замечания 9 получаем следующее утверждение.

Теорема 21. *Для любой абелевой группы $\mathcal{A}$ выполняется ровно одно из следующих условий:*

1) $\mathrm{Hp}(\mathcal{A}) = \emptyset$ *(при нарушении условия* 2) *теоремы* 20)*;*

2) $|\mathrm{Hp}(\mathcal{A})| = 1$ *(при условии конечности всех $\alpha_{p,n}$, всех β_p и γ_p кроме тех, для которых $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$, а также при выполнении условия $|\mathrm{Hp}(\mathcal{A}/T(\mathcal{A}))| = 1$ (т. е. при наличии конечных P_0 и λ для $\mathcal{A}/T(\mathcal{A})$) и единственности или отсутствии группы $\mathbf{Q}$, выделяемой из $\mathcal{A}$ прямым слагаемым для формирования простой модели $\mathcal{A}' \preceq \mathcal{A}$);*

3) $|\mathrm{Hp}(\mathcal{A})| \geq \omega$ *(при нарушении условий, описанных в пунктах* 1) *и* 2)*); при этом наличие бесконечного инварианта $\alpha_{p,n}$, бесконечного β_p или γ_p кроме тех, для которых $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$, или группы $\mathbf{Q}^{(\omega)}$, выделяемой в $\mathcal{A}$ прямым слагаемым, с наличием группы $\mathbf{Q}$ в простой модели $\mathcal{A}' \preceq \mathcal{A}$, влечет $|\mathrm{Hp}(\mathcal{A})| \geq 2^\omega$; если в $\mathcal{A}$ имеется $\lambda \geq \omega$ копий группы $\mathbf{Q}$, составляющих прямую сумму, то $|\mathrm{Hp}(\mathcal{A})| = 2^\lambda$.*

На основании теорем 14 и 15 справедлива

Теорема 22. *Для любой стандартной группы $\mathcal{A}$ вида* (1) *следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{Hm}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$;

2) *конечны все шмелевские инварианты для группы $\mathcal{A}$, кроме значений β_p и γ_p при $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) $\mathcal{A} \equiv T(\mathcal{A})$;

б) *для стандартной группы $\mathcal{A}' \preceq \mathcal{A}$ вида* (1), *с нулевыми значениями β_p и γ_p при $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$, имеет место $\mathrm{Hm}(\mathcal{A}'/T(\mathcal{A}')) \neq \emptyset$, т. е. для $\mathcal{A}'/T(\mathcal{A}')$ выполняется $\sup \gamma \rightleftharpoons \sup\{\gamma(p) \mid p \in P\} < \omega$.*

В силу теоремы 22 рассуждение, позволяющее сформулировать теорему 21, обосновывает следующую переформулировку этой теоремы.

Теорема 23. *Для любой стандартной группы $\mathcal{A}$ вида* (1) *выполняется ровно одно из следующих условий:*

1) $\mathrm{Hm}(\mathcal{A}) = \emptyset$ (*при нарушении условия* 2) *теоремы* 22);

2) $|\mathrm{Hm}(\mathcal{A})| = 1$ (*при условии конечности всех $\alpha_{p,n}$, всех β_p и γ_p кроме тех, для которых $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$, а также при выполнении условия* $|\mathrm{Hm}(\mathcal{A}/T(\mathcal{A}))| = 1$).

Если в стандартной группе $\mathcal{A}$ вида (1) *позволить варьировать ε с сохранением элементарной эквивалентности, то выполняется $|\mathrm{Hm}(\mathcal{A})| \geq \omega$ при $\varepsilon \geq 2$, $\beta_p = \gamma_p = 0$ для любого простого p и $|\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| < \omega$ конечно. Если при этих условиях дополнительно выполняется $\varepsilon \geq \omega$, то $|\mathrm{Hm}(\mathcal{A})| \geq 2^{\omega}$.*

Следующая теорема является переформулировкой теоремы 16 с применением теорем 12 и 14.

Теорема 24. *Для любой абелевой группы $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:*

1) $H(\mathcal{A}) \neq \emptyset$;

2) *конечны все шмелевские инварианты для группы $\mathcal{A}$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) $\mathcal{A} \equiv T(\mathcal{A})$;

б) *редуцированная часть $T(\mathcal{A})$ ограничена и при этом $H(\mathcal{A}/T(\mathcal{A})) \neq \emptyset$, т. е. существует конечное множество P_0 простых чисел и $\lambda \in \omega$ такие, что $\gamma_p\,(\mathcal{A}/T(\mathcal{A})) = \lambda$ при $p \in P_0$ и $\gamma_p\,(\mathcal{A}/T(\mathcal{A})) = 0$ при $p \notin P_0$.*

Как показано в замечании 5, для стандартных групп $\mathcal{A}$ вида (1) могут существовать минимальные и простые элементарные подгруппы, содержащие $R_{P_0}^{(\lambda)}$ в качестве прямых слагаемых и, следовательно, способные иметь стандартный вид (1) лишь при $|P_0| \leq 1$. Поэтому естественно, наряду с гиперграфами $(A, \mathrm{Hp}(\mathcal{A}))$, $(A, \mathrm{Hm}(\mathcal{A}))$ и $(A, H(\mathcal{A}))$, рассматривать гиперграфы $(A, \mathrm{Hp}'(\mathcal{A}))$, $(A, \mathrm{Hm}'(\mathcal{A}))$ и $(A, H'(\mathcal{A}))$, в которых $\mathrm{Hp}'(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Hp}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hm}'(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Hm}(\mathcal{A})$ и $H'(\mathcal{A}) \subseteq H(\mathcal{A})$ состоят из носителей стандартных подгрупп, т.е. имеющих только вид (1).

На основании теоремы 11 и замечания 5 справедлива следующая

Теорема 25. *Для любой абелевой группы $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{Hp}(\mathcal{A}) = \mathrm{Hp}'(\mathcal{A})$*;*

2) $\mathrm{Hp}(\mathcal{A}) = \emptyset$ *или выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) $\mathcal{A} \equiv T(\mathcal{A})$*;*

б) *редуцированная часть* $T(\mathcal{A})$ *ограничена,* $\mathrm{Hp}(\mathcal{A}/T(\mathcal{A})) \neq \emptyset$ *и имеется не более одного ненулевого значения* $\gamma_p(\mathcal{A})$.

В силу теоремы 24 и замечания 5 справедлива следующая теорема.

Теорема 26. *Для любой стандартной группы* $\mathcal{A}$ *вида* (1) *следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{Hm}(\mathcal{A}) = \mathrm{Hm}'(\mathcal{A})$*;*

2) $\mathrm{Hm}(\mathcal{A}) = \emptyset$ *или конечны все шмелевские инварианты для группы* $\mathcal{A}$*, кроме значений* β_p *и* γ_p *при* $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$*, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) $\mathcal{A} \equiv T(\mathcal{A})$*;*

б) *для стандартной группы* $\mathcal{A}' \preceq \mathcal{A}$ *вида* (1)*, с нулевыми значениями* β_p *и* γ_p *при* $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$*, имеет место* $\mathrm{Hm}'(\mathcal{A}'/T(\mathcal{A}')) \neq \emptyset$*, т. е. для группы* $\mathcal{A}'/T(\mathcal{A}')$ *имеется не более одного ненулевого значения* γ_p.

При этом, если $\mathrm{Hm}'(\mathcal{A}) \neq \emptyset$*, то* $\mathrm{Hm}'(\mathcal{A})$ *одноэлементно, совпадает с* $\mathrm{Hm}(\mathcal{A})$ *и состоит из носителя стандартной группы* $\mathcal{A}'$*, имеющей вид:*

$$\oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \oplus_p \mathbf{Z}_{p^\infty}^{(\beta'_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma'_p)} \oplus \mathbf{Q}^{(\varepsilon')}, \tag{2}$$

где

i) $\beta'_p = \gamma'_p = 0$ *при* $\beta_p = \omega$ *или* $\gamma_p = \omega$*,* $\beta'_p = \beta_p$ *и* $\gamma'_p = \gamma_p$ *при* $\beta_p < \omega$ *и* $\gamma_p < \omega$*;*

ii) $\varepsilon' = 0$*, если прямая сумма* $\oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \oplus_p \mathbf{Z}_{p^\infty}^{(\beta'_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma'_p)}$ *является бесконечной группой, и* $\varepsilon' = \varepsilon$*, если эта группа конечна.*

Доказательство теоремы 25, основанное на построении стандартной группы (2), являющейся наименьшей элементарной подгруппой группы $\mathcal{A}$, позволяет охарактеризовать условие $\mathrm{Hm}'(\mathcal{A}) = \{A\}$ и вывести

Следствие 2. *Для стандартной группы* $\mathcal{A}$ *вида* (2) *и ее теории* $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{Hm}'(\mathcal{A}) = \{A\}$*;*

2) *для теории* T *все инварианты* $\alpha_{p,n}$ *конечны и выполняются условия* i) *и* ii).

Комбинируя теоремы 23, 25 и 26, получаем следующую теорему.

Теорема 27. *Для любой абелевой группы* $\mathcal{A}$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $H(\mathcal{A}) = H'(\mathcal{A})$*;*

2) $H(\mathcal{A}) = \emptyset$ *или конечны все шмелевские инварианты для группы* $\mathcal{A}$*, кроме значений* β_p *и* γ_p *при* $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$*, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) $\mathcal{A} \equiv T(\mathcal{A})$*;*

б) *редуцированная часть* $T(\mathcal{A})$ *ограничена,* $H(\mathcal{A}/T(\mathcal{A})) \neq \emptyset$ *и имеется не более одного ненулевого значения* $\gamma_p(\mathcal{A})$.

При этом минимальные простые модели для $H(\mathcal{A})$ представляются в стандартном виде (2) *и их число* (0, 1, ω *или* $\geq 2^{\omega}$) *совпадает с числом подгрупп, изоморфных* $\mathbf{Q}$ *и выделяемых из* $\mathcal{A}$ *в качестве прямых слагаемых. Если в* $\mathcal{A}$ *имеется* $\lambda \geq \omega$ *копий группы* $\mathbf{Q}$, *составляющих прямую сумму, то* $|H(\mathcal{A})| = 2^{\lambda}$.

Замечание 10. Поскольку для групп $\mathcal{A} \equiv T(\mathcal{A})$ имеет место $\mathrm{Hp}'(\mathcal{A}) = \mathrm{Hp}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hm}'(\mathcal{A}) = \mathrm{Hm}(\mathcal{A})$ и $H'(\mathcal{A}) = H(\mathcal{A})$, эти соотношения выполняются как для периодических групп, так и для групп, получаемых из периодических добавлением копий группы $\mathbf{Q}$ в качестве прямых слагаемых.

Замечание 11. Для любой конечной системы $\mathcal{M}$ имеет место $H(\mathcal{M}) = \mathrm{Hm}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hp}(\mathcal{M}) = \{M\}$.

Замечание 12. Очевидно, для любой стандартной группы $\mathcal{A}$ вида (1) ее бесконечность равносильна выполнению хотя бы одного из следующих условий:

1) некоторый инвариант $\alpha_{p,n}$ бесконечен;
2) среди инвариантов $\alpha_{p,n}$ имеется бесконечно много ненулевых;
3) хотя бы один из инвариантов β_p, γ_p, ε является положительным.

Наличие указанной характеризации бесконечности абелевой группы, а также характеризации условия $\mathrm{Hm}'(\mathcal{A}) = \{A\}$ согласно следствию 2 влечет характеризацию условия $\mathrm{Hm}'(\mathcal{A}) = \{A\}$ для бесконечных стандартных групп вида (1) в терминах значений шмелевских инвариантов.

Замечание 13. В общем случае для абелевых групп $\mathcal{A}$ и их гиперграфов $(A, \mathrm{Hm}(\mathcal{A}))$ условие $\mathrm{Hm}(\mathcal{A}) = \{A\}$ не исчерпывается стандартной формулой (2), а также результатом замены в этой формуле прямой суммы групп R_p на группы $R^{(\lambda)}_{P_0}$. Действительно, согласно [12, теорема 8.1.2] любая конечно порожденная абелева группа $\mathcal{A}$ представляется в виде прямой суммы групп, изоморфных группам $\mathbf{Z}_{p^n}$ и $\mathbf{Z}$. Для теории такой группы $\mathcal{A}$ все шмелевские инварианты конечны и имеет место $\mathrm{Hm}(\mathcal{A}) = \{A\}$, поскольку взятие собственной подгруппы уменьшает хотя бы один шмелевский инвариант. При этом наличие хотя бы одного прямого слагаемого $\mathbf{Z}$ нарушает как стандартную запись (2), так и $R^{(\lambda)}_{P_0}$. Кроме того, поскольку теория $\mathrm{Th}(\mathbf{Z})$ не имеет простых моделей [20], наличие в конечно порожденной группе $\mathcal{M}$ прямого слагаемого $\mathbf{Z}$ влечет $H(\mathcal{A}) = \emptyset$.

На основании замечаний 11 и 13 справедлива следующая

Теорема 28. *Для любой конечно порожденной абелевой группы* $\mathcal{A}$ *выполняются следующие условия:*

1) *если* $\mathcal{A}$ *не содержит прямых слагаемых, изоморфных* $\mathbf{Z}$, *то* (*будучи конечной группой*) $\mathcal{A}$ *имеет* $H(\mathcal{A}) = \mathrm{Hp}(\mathcal{A}) = \mathrm{Hm}(\mathcal{A}) = \{A\}$;

2) *если* $\mathcal{A}$ *содержит прямые слагаемые, изоморфные* $\mathbf{Z}$, *то* $H(\mathcal{A}) = \mathrm{Hp}(\mathcal{A}) = \emptyset$ *и* $\mathrm{Hm}(\mathcal{A}) = \{A\}$.

На основании замечания 11 и теоремы 28 общее изучение гиперграфов $(A, H(\mathcal{A}))$, $(A, \mathrm{Hp}(\mathcal{A}))$ и $(A, \mathrm{Hm}(\mathcal{A}))$ уместно проводить для бесконечных абелевых групп $\mathcal{A}$ и их теорий.

Замечание 14. В силу наличия константы в сигнатуре абелевых групп, для теории T абелевых групп, при наличии хотя бы двух простых (соответственно минимальных, минимальных простых) элементарных подмоделей модели

$\mathcal{A} \models T$, гиперграфы $(A, \mathrm{Hp}(\mathcal{A}))$ $((A, \mathrm{Hm}(\mathcal{A}))$, $(A, H(\mathcal{A})))$ не являются дизъюнктными. Более того, диаметры $d_{\mathrm{Hp}}(\mathcal{A})$ $d_{\mathrm{Hm}}(\mathcal{A})$, $d_H(\mathcal{A})$ могут принимать лишь значения, не превосходящие 2.

Наряду с описанием дизъюнктных (т. е. одноэлементных) гиперграфов минимальных простых моделей теорий абелевых групп, вытекающим из теоремы 27, в следующей теореме описываются характеристики для почти дизъюнктных гиперграфов.

Теорема 29. [21] *Теория* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *бесконечной абелевой группы* $\mathcal{A}$ *имеет почти дизъюнктный гиперграф минимальных простых моделей, для* ω*-насыщенной модели, тогда и только тогда, когда имеется лишь конечное число ненулевых инвариантов* $\alpha_{p,n}$*, а все инварианты* β_p*,* γ_p *являются нулевыми.*

Доказательство. Предположим, что теория $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ абелевой группы $\mathcal{A}$ имеет почти дизъюнктный гиперграф минимальных простых моделей. Тогда $\mathcal{A}$ не может иметь бесконечно много ненулевых инвариантов $\alpha_{p,n}$, поскольку их наличие влечет бесконечность числа прямых слагаемых вида $\mathbf{Z}_{p^n}$, попадающих в пересечение минимальных простых моделей, нарушая почти дизъюнктность гиперграфа. Если при этом некоторые инварианты β_p, γ_p являются ненулевыми, то теория $\mathrm{Th}(A)$ имеет простые модели с бесконечными прямыми слагаемыми $\mathbf{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)}$ или $R_{P_0}^{(\lambda)}$, что также нарушает почти дизъюнктность гиперграфа.

Предположим теперь, что имеется лишь конечное число ненулевых инвариантов $\alpha_{p,n}$, а все инварианты β_p, γ_p являются нулевыми. Тогда в силу бесконечности группы $\mathcal{A}$ имеем $\varepsilon = 1$ и в ω-насыщенной модели $\mathcal{M}$ теории T присутствует бесконечно много прямых слагаемых, изоморфных группе $\mathbf{Q}$. В силу теоремы 27 гиперграф $(M, H(\mathcal{M}))$ состоит из носителей моделей вида $\oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \mathbf{Q}$, пересекающихся по конечному множеству $\oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$. Таким образом, гиперграф $(M, H(\mathcal{M}))$ является почти дизъюнктным.

Замечание 15. Почти дизъюнктный гиперграф $(M, H(\mathcal{M}))$ из теоремы 29 состоит из множеств, у которых совпадают их пересечения, по конечной прямой сумме $\oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$. Тем самым, мощность m этого пересечения является основной характеристикой для $(M, H(\mathcal{M}))$.

Так как для любого простого числа p прямая сумма $\mathcal{B}$ для $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$ групп $\mathbf{Z}_p$ равномощна группе $\mathbf{Z}_{p^n}$, но при этом $\mathcal{B} \not\simeq \mathbf{Z}_{p^n}$, для почти дизъюнктного гиперграфа из теоремы 29 пересечение элементов этого гиперграфа позволяет распознать шмелевские инварианты $\alpha_{p,n}$ тогда и только тогда, когда мощность пересечения m свободна от квадратов простых чисел, т. е. m может делиться лишь на первые степени простых чисел p.

Так как для абелевых групп гиперграфы минимальных простых моделей, не являющиеся почти дизъюнктными, не более чем одноэлементны, а почти дизъюнктные гиперграфы эквациональны, справедлива следующая

Теорема 30. *Для любой абелевой группы* $\mathcal{A}$ *гиперграф* $(A, H(\mathcal{A}))$ *эквационален.*

Замечание 16. Так как при наличии хотя бы одного бесконечного шмелевского инварианта стандартная группа вида (1) имеет собственную подгруппу, элементарно эквивалентную данной и полученную удалением конечного числа прямых слагаемых с выбранным бесконечным инвариантом, то по теореме 13 существуют неэквациональные гиперграфы $(A, \mathrm{Hp}(\mathcal{A}))$. Наличие таких бесконечных инвариантов является единственной причиной неэквациональности, поскольку конечные инварианты не допускают собственных элементарных расширений в классах простых и минимальных абелевых групп. При этом, по каждому бесконечному инварианту $\alpha_{p,n}$, β_p, а также по бесконечному λ группы $R_{P_0}^{(\lambda)}$ для элементов гиперграфа $(A, \mathrm{Hp}(\mathcal{A}))$ допускается взятие любого бесконечного числа соответствующих прямых слагаемых. Тем самым, этот гиперграф включает семейства множеств, задаваемые системами всех бесконечных подмножеств данных бесконечных (точнее, счетных) множеств.

Остается открытой проблема описания возможных конфигураций гиперграфов $(A, \mathrm{Hp}(\mathcal{A}))$ и $(A, \mathrm{Hm}(\mathcal{A}))$ в общем случае.

4. Минимальные и простые модели для прямых сумм абелевых групп: существование и их гиперграфы

В этом разделе дается характеризация существования минимальных и простых моделей для прямых сумм $\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ абелевых групп $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$, а также описывается связь гиперграфов для абелевых групп с гиперграфами для их прямых сумм.

На основании теорем 1, 12 и 13 справедлива следующая теорема.

Теорема 31. *Для любых абелевых групп $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ теория $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1)$ имеет простую модель (т. е. $\mathrm{Hp}(\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1) \neq \emptyset$) тогда и только тогда, когда для групп $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) *$\mathcal{A}_0 \equiv T(\mathcal{A}_0)$ и $\mathcal{A}_1 \equiv T(\mathcal{A}_1)$;*

б) *$\mathcal{A}_i \equiv T(\mathcal{A}_i)$, $\mathcal{A}_{1-i} \not\equiv T(\mathcal{A}_{1-i})$, редуцированные части групп $T(\mathcal{A}_0)$ и $T(\mathcal{A}_1)$ ограничены и теория $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_{1-i}/T(\mathcal{A}_{1-i}))$ имеет простую модель, $i \in \{0, 1\}$;*

в) *$\mathcal{A}_0 \not\equiv T(\mathcal{A}_0)$ и $\mathcal{A}_1 \not\equiv T(\mathcal{A}_1)$, редуцированные части групп $T(\mathcal{A}_0)$ и $T(\mathcal{A}_1)$ ограничены и теории $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_0/T(\mathcal{A}_0))$, $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_1/T(\mathcal{A}_1))$ имеют простые модели с одной и той же характеристикой λ.*

В случаях а) *и* б) *простая модель теории T представляется в виде прямой суммы простых моделей теорий $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$, $i \in \{0, 1\}$. В случае* в) *такая представимость в виде прямой суммы равносильна совпадению множеств P_0 для теорий $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$, если эти множества непусты, и при этом теория T имеет характеристику 2λ с прямым слагаемым $R_{P_0}^{(2\lambda)}$. Если же хотя бы одно из множеств P_0 для теорий $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$ пусто, то простая модель имеет прямое слагаемое $R_{P_0}^{(\lambda)}$, при непустоте одного из множеств P_0, и имеет или не имеет прямое слагаемое $\mathbf{Q}$ при пустоте обоих множеств P_0 и в зависимости от (не)ограниченности групп $T(\mathcal{A}_0)$ и $T(\mathcal{A}_1)$.*

В силу теорем 1, 14 и 15 имеет место следующая теорема.

Теорема 32. *Для любых абелевых групп $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ теория $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1)$ имеет минимальную модель (т. е. $\mathrm{Hm}(\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1) \neq \emptyset$) тогда и только тогда, когда для групп $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ конечны все шмелевские инварианты, кроме значений β_p и γ_p при $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) *$\mathcal{A}_0 \equiv T(\mathcal{A}_0)$ и $\mathcal{A}_1 \equiv T(\mathcal{A}_1)$;*

б) *$\mathcal{A}_0 \not\equiv T(\mathcal{A}_0)$ или $\mathcal{A}_1 \not\equiv T(\mathcal{A}_1)$, и для стандартных групп $\mathcal{A}'_i \models T_i$, $T_i = \mathrm{Th}(\mathcal{A}'_i)$, вида (1) с нулевыми значениями β_p и γ_p при $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$*

теории $\mathrm{Th}(\mathcal{A}'_i/T(\mathcal{A}'_i))$ *имеют минимальные модели (конечного ранга* $\sup\gamma_i$*),* $i\in\{0,1\}$.

При выполнении пункта б) *имеется минимальная модель теории* T*, представимая в виде прямой суммы минимальных моделей теорий* T_i*,* $i\in\{0,1\}$*, непериодическая часть которой удовлетворяет следующим условиям:*

i) *имеет ранг* $\sup\gamma_0+\sup\gamma_1$*, если обе теории* T_0 *и* T_1 *имеют ненулевые значения* γ_p*;*

ii) *имеет ранг* $\sup\gamma_i$*, если* T_i *имеет ненулевые значения* γ_p*, а у* T_{1-i} *все значения* γ_p *нулевые,* $i\in\{0,1\}$*;*

iii) *имеет ранг* 1 *и представляется группой* $\mathbf{Q}$*, если у* T_0 *и* T_1 *все значения* γ_p *нулевые.*

На основании теорем 1, 16, 31 и 32 справедлива следующая теорема.

Теорема 33. *Для любых абелевых групп* $\mathcal{A}_0$ *и* $\mathcal{A}_1$ *теория* $T=\mathrm{Th}(\mathcal{A}_0\oplus\mathcal{A}_1)$ *имеет минимальную простую модель (т. е.* $H(\mathcal{A}_0\oplus\mathcal{A}_1)\neq\emptyset$*) тогда и только тогда, когда для групп* $\mathcal{A}_0$ *и* $\mathcal{A}_1$ *конечны все шмелевские инварианты, кроме значений* β_p *и* γ_p *при* $|\{n\mid\alpha_{p,n}\neq 0\}|=\omega$*, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) $\mathcal{A}_0\equiv T(\mathcal{A}_0)$ *и* $\mathcal{A}_1\equiv T(\mathcal{A}_1)$*;*

б) $\mathcal{A}_i\equiv T(\mathcal{A}_i)$*,* $\mathcal{A}_{1-i}\not\equiv T(\mathcal{A}_{1-i})$*, редуцированные части групп* $T(\mathcal{A}_0)$ *и* $T(\mathcal{A}_1)$ *ограничены и теория* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_{1-i}/T(\mathcal{A}_{1-i}))$ *имеет минимальную простую модель,* $i\in\{0,1\}$*;*

в) $\mathcal{A}_0\not\equiv T(\mathcal{A}_0)$ *и* $\mathcal{A}_1\not\equiv T(\mathcal{A}_1)$*, редуцированные части групп* $T(\mathcal{A}_0)$ *и* $T(\mathcal{A}_1)$ *ограничены и теории* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_0/T(\mathcal{A}_0))$, $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_1/T(\mathcal{A}_1))$ *имеют минимальные простые модели с одной и той же конечной характеристикой* λ.

В случаях а) *и* б) *простая модель теории* T *представляется в виде прямой суммы простых моделей теорий* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$*,* $i\in\{0,1\}$*. В случае* в) *такая представимость в виде прямой суммы равносильна совпадению множеств* P_0 *для теорий* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$*, если эти множества непусты, и при этом теория* T *имеет характеристику* 2λ *с прямым слагаемым* $R^{(2\lambda)}_{P_0}$*. Если же хотя бы одно из множеств* P_0 *для теорий* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$ *пусто, то простая модель имеет прямое слагаемое* $R^{(\lambda)}_{P_0}$*, при непустоте одного из множеств* P_0*, и имеет или не имеет прямое слагаемое* $\mathbf{Q}$ *при пустоте обоих множеств* P_0 *и в зависимости от (не)ограниченности групп* $T(\mathcal{A}_0)$ *и* $T(\mathcal{A}_1)$.

В силу теорем 1, 29 и 33 имеет место следующая теорема.

Теорема 34. *Теория* $T=\mathrm{Th}(\mathcal{A}_0\oplus\mathcal{A}_1)$ *бесконечной абелевой группы* $\mathcal{A}_0\oplus\mathcal{A}_1$ *имеет почти дизъюнктный гиперграф минимальных простых моделей, для* ω*-насыщенной модели, тогда и только тогда, когда выполняется какое-либо из следующих условий:*

а) *одна из групп —* $\mathcal{A}_i$*, конечна, а другая —* $\mathcal{A}_{1-i}$*, имеет теорию с почти дизъюнктным гиперграфом минимальных простых моделей,* $i\in\{0,1\}$*;*

б) *теории обеих групп* $\mathcal{A}_0$ *и* $\mathcal{A}_1$ *имеют почти дизъюнктные гиперграфы минимальных простых моделей.*

Замечание 17. При построении гиперграфов $\mathrm{Hp}(\mathcal{A}_0\oplus\mathcal{A}_1)$, $\mathrm{Hm}(\mathcal{A}_0\oplus\mathcal{A}_1)$ и $H(\mathcal{A}_0\oplus\mathcal{A}_1)$ возникает объединение носителей соответствующих элементарных подгрупп групп $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$, если хотя бы одна из этих групп конечна. Помимо объединения, для построения гиперграфа простых моделей, помимо указанного объединения может использоваться только одна из этих групп, если, например, каждому ненулевому инварианту $\alpha_{p,n}$ конечной группы $\mathcal{A}_0$ соответствует бесконечный инвариант группы $\mathcal{A}_1$. Это же относится к инвариантам β_p и γ_p. При этом, бесконечность хотя бы одного из гиперграфов для $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ влечет бесконечность соответствующего гиперграфа для $\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, если последний непуст. При наличии групп $\mathbf{Q}$ в минимальных или простых моделях для гиперграфов групп $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$, для гиперграфа группы $\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ в качестве прямого слагаемого используется лишь одна из таких групп.

References

[1] S.V. Sudoplatov, *On acyclic hypergraphs of minimal prime models*, Sib. Math. J., **42**:6 (2001), 1170–1172. Zbl 1018.03029

[2] S.V. Sudoplatov, *Group polygonometries*, NSTU, Novosibirsk, 2011, 2013.

[3] S.V. Sudoplatov, *Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories*, J. Math. Sci., **169**:5 (2010), 680–695. Zbl 1229.03032

[4] S.V. Sudoplatov, *The Lachlan problem*, NSTU, Novosibirsk, 2009.

[5] K.A. Baikalova, *On some hypergraphs of prime models and their generated limit models*, Algebra and Model Theory 7. Collection of papers, Edited by A.G. Pinus, K.N. Ponomaryov and S.V. Sudoplatov, NSTU, Novosibirsk, 2009, 6–17.

[6] S.V. Sudoplatov, *Classification of countable models of complete theories, Part* 1, NSTU, Novosibirsk, 2018.

[7] S.V. Sudoplatov, *On the separability of elements and sets in hypergraphs of models of a theory*, Bulletin of Karaganda University. Series "Mathematics", **82**:2 (2016), 113–120.

[8] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *On relative separability in hypergraphs of models of theories*, Eurasian Math. J., **9**:4 (2018), 68–78.

[9] R. Deissler, *Minimal and prime models of complete theories of torsion free abelian groups*, Algebra Univers., **9** (1979), 250–265. Zbl 0428.03026

[10] Yu.L. Ershov, *Decidability problems and constructive models*, Nauka, Moscow, 1980. Zbl 0495.03009

[11] A.V. Molokov, *Prime models of theories of Abelian groups*, Some problems and tasks of analysis and algebra: Interuniv. Collect. sci. Works, NSU, Novosibirsk, 1985, 113–119. Zbl 0608.20042

[12] M.I. Kargapolov, Yu.I. Merzlyakov, *Fundamentals of Group Theory*, Moscow, Nauka, 1982. Zbl 0508.20001

[13] L. Fuchs, *Infinite abelian groups. Volume* I, Academic Press, New York-London, 1970. Zbl 0209.05503

[14] L. Fuchs, *Infinite abelian groups. Volume* II, Academic Press, New York, London, 1973. Zbl 0257.20035

[15] W. Szmielew, *Elementary properties of abelian groups*, Fundam. Math. **41** (1955), 203–271. Zbl 0064.00803

[16] Yu.L. Ershov, E.A. Palyutin, *Mathematical logic*, FIZMATLIT, Moscow, 2011. Zbl 0632.03001

[17] P.C. Eklof, E.R. Fischer, *The elementary theory of abelian groups*, Ann. Math. Logic., **4**:2 (1972), 115–171. Zbl 0248.02049

[18] W. Hodges, *Model theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. Zbl 0789.03031

[19] A. Pillay, *Closed sets and chain conditions in stable theories*, J. Symb. Log., **49**:4 (1984), 1350–1362. Zbl 0597.03018

[20] J.T. Baldwin, A. Blass, A.M.W. Glass, D. W. Kueker, *A 'natural' theory without a prime model*, Algebra Univers., **3** (1973), 152–155. Zbl 0273.02033

[21] K.A. Baikalova, S.V. Sudoplatov, *On almost disjoint hypergraphs of models of theories of abelian groups*, International conference "Mal'tsev meeting", November 21–25, 2016, Collection of abstracts, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2016, 173.

Sergey Vladimirovich Sudoplatov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Academician Koptyug ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia.
Novosibirsk State Technical University,
20 K. Marx ave.,
Novosibirsk, 630073, Russia.
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia.
Email address: sudoplat@math.nsc.ru