S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 933–953 (2020) УДК 512.554.33

DOI 10.33048/semi.2020.17.069 MSC 17B01

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР ЛИ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ГРАФАМИ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И КВАДРАТОВ И БЕЗ ИЗОЛИРОВАННЫХ ВЕРШИН

Е.Н. ПОРОШЕНКО

Abstract. In this paper, a criterion of universal equivalence for partially commutative Lie algebras defined by graphs without triangles and squares and with no isolated vertices is found.

Keywords: partially commutative Lie algebra, universal theory.

1. Введение

В данной статье под графом будем понимать конечный неориентированный граф без петель.

Пусть A — множество и $G = \langle A, E\rangle$ — граф, множеством вершин которого является множество A, а множеством ребер — некоторое симметричное отношение на множестве A, то есть подмножество множества $A \times A$. Таким образом, элементами множества E являются неупорядоченные пары, которые будут обозначаться $\{a, b\}$, где $a, b \in A$.

Частично коммутативной алгеброй Ли над областью R называется R-алгебра с множеством порождающих A и множеством определяющих соотношений

$$(1) \qquad [a_i, a_j] = 0, \text{ где } \{a_i, a_j\} \in E.$$

Poroshenko, E.N., On universal equivalence of partially commutative Lie algebras defined by graphs without triangles and squares and with no isolated vertices.

© 2020 Порошенко Е.Н.

Работа поддержана РФФИ (грант 18–01–00100).

Поступила 16 августа 2019 г., опубликована 10 июля 2020 г.

(Здесь и далее $[g,h]$ обозначает лиево произведение элементов g и h). Будем обозначать эту алгебру $\mathcal{L}_R(A;G)$, а если не возникает неоднозначности — $\mathcal{L}(A;G)$. Граф G называется ***определяющим графом*** соответствующей алгебры.

Изучение частично коммутативных структур началось в конце 60-х годов прошлого века с работы [1], в которой было введено понятие частично коммутативного моноида. В дальнейшем из всех частично коммутативных структур активнее всего исследовались частично коммутативные группы (см., например, [2]–[8]). Несколько работ (например, [6]–[8]) посвящено исследованию свойств теорий частично коммутативных метабелевых групп.

Частично коммутативные алгебры (как ассоциативные, так и алгебры Ли) изучались в значительно меньшей степени, однако для них также получен ряд результатов (см. например [9]–[17]. В частности, автором настоящей статьи в работах [14]–[17] (работа [14] в соавторстве с Е. И. Тимошенко) были найдены критерии универсальной эквивалентности частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли на классе алгебр, определенных циклами и на классе алгебр, определенных деревьями, в том числе деревьями со счетным количеством вершин (впрочем данный результат очевидным образом обобщается до случая алгебр Ли, определенных деревьями с произвольным количеством вершин).

В настоящей статье исследуется универсальная эквивалентность частично коммутативных алгебр Ли на более широком классе: классе алгебр, графы которых не содержат циклов из трех и четырех вершин, а также не содержат изолированных вершин. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 5.4. *Пусть $G = \langle A;E\rangle$ и $H = \langle B;F\rangle$ — конечные графы без треугольников и квадратов и без изолированных вершин. Частично коммутативные алгебры Ли $\mathcal{L}(A;G)$ и $\mathcal{L}(B;H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда графы G^* и H^* изоморфны, а количество двухвершинных компонент связности в графах G и H одинаково.*

Под графом G^* (соответственно H^*) понимается граф, полученный из G (соответсвенно H) удалением всех висячих вершин.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим произвольный конечный неориентированный граф $G = \langle A;E\rangle$ без петель, для которого A с множество вершин и E — множество ребер. Если $\{a,b\} \in E$, то будем писать $a \overset{G}{\leftrightarrow} b$. Аналогично, если $A_1 \subseteq A$ и a — вершина графа G, смежная со всеми вершинами множества A_1 в нем, то будем использовать обозначение $a \overset{G}{\leftrightarrow} A_1$. Наконец, для $A_1, A_2 \subseteq A$ будем писать $A_1 \overset{G}{\leftrightarrow} A_2$, если $a_1 \overset{G}{\leftrightarrow} a_2$ для любых элементов $a_1 \in A_1$ и $a_2 \in A_2$. В частности, так как рассматриваются только графы без петель, из $a \overset{G}{\leftrightarrow} A_1$ для произвольного графа G следует, что $a \notin A_1$, а из $A_1 \overset{G}{\leftrightarrow} A_2$ — что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Пусть G — произвольный неориентированный граф. Через $A(G)$ и $E(G)$ будем обозначать соответственно множество вершин и множество ребер этого графа. Далее, пусть $B \subseteq A(G)$. Через $G(B)$ обозначим подграф графа G, построенный на множестве вершин B. Напомним, что через $\overline{G}$ обозначается граф $\langle A(G), (A(G))^2 \backslash (E(G) \cup \mathrm{id}_{A(G)})\rangle$, где для произвольного множества S через id_S

обозначается тождественное бинарное отношение: $\mathrm{id}_S = \{(a,a) \mid a \in S\}$; этот граф называется дополнением графа G.

Также напомним, что *степенью* вершины a графа G называется количество вершин, смежных с a в G.

Определение 2.1. *Объединением* графов $G_1 = \langle A_1; E_1\rangle$ и $G_2 = \langle A_2; E_2\rangle$ называется граф, обозначаемый $G_1 \cup G_2$, с множеством вершин $A_1 \cup A_2$ и множеством ребер $E_1 \cup E_2$.

Определение 2.2. Назовем *звездой* граф, в котором одна вершина, соединена ребрами со всеми остальными и других ребер нет. Эту вершину будем называть *центром* звезды. В случае, если в звезде всего две вершины, центром можно считать любую из них.

Определение 2.3. Пусть $G = \langle A; E\rangle$ — произвольный неориентированный граф без петель. *Путем* в графе G называется последовательность вершин $b_1, b_2, \ldots, b_s \in A$, такая что $\{b_i, b_{i+1}\} \in E$ для любого $i = 1, 2, \ldots, s-1$.

Определение 2.4. Пусть G — связный граф без петель. *Гамильтоновым путем* в графе G называется путь, проходящий через все вершины графа ровно по одному разу.

Отметим, что гамильтонов путь существует не во всяком связном графе. Например, гамильтонова пути нет в звезде, имеющей четыре и более вершин.

Пусть $A^\star$ — множество всех ассоциативных слов алфавита A (включая пустое слово, которое мы будем обозначать 1). Произвольным образом упорядочим множество A и распространим линейный порядок до лексикографического порядка на множестве $A^\star$.

Определение 2.5. Моном $u \in A^\star$ называется *ассоциативным словом Линдона — Ширшова*, если для любых непустых $v, w \in A^\star$, таких что $u = vw$, выполнено $wv < u$.

Также рассмотрим множество всех неассоциативных слов алфавита A (здесь мы исключаем пустое слово из рассмотрения), то есть множество всех слов со всеми возможными способами расставления на них скобок (обозначим его A^+). В следующем определении если $[u]$ — произвольное неассоциативное слово, то будем обозначать через u ассоциативное слово, полученное из $[u]$ стиранием скобок.

Определение 2.6. Определим *неассоциативные слова Линдона — Ширшова* по индукции следующим образом.

(1) Все элементы множества A являются неассоциативными словами Линдона — Ширшова.

(2) Пусть уже определены неассоциативные слова Линдона — Ширшова длины меньшей n, тогда лиев моном $[u] \in A^+$ длины n, называется *неассоциативным словом Линдона — Ширшова*, если

 (i) Ассоциативное слово u является ассоциативным словом Линдона — Ширшова;

 (ii) Если $[u] = [[u_1], [u_2]]$, то $[u_1]$ и $[u_2]$ — неассоциативные слова Линдона — Ширшова и $u_1 > u_2$.

 (iii) Если $[u_1] = [[u_{11}], [u_{12}]]$, то $u_2 \geqslant u_{12}$.

Слова данного вида рассматривались в [18]–[20]. Множество всех неассоциативных слов Линдона — Ширшова в алфавите A будем обозначать $LS(A)$.

Отметим, что, согласно [20], множество $LS(A)$ является линейным базисом свободной R-алгебры Ли с множеством порождающих A.

Определение 2.7. Пусть $\mathcal{L}(A;G)$ — частично коммутативная алгебра Ли с множеством порождающих A и определяющим графом G. *Частично коммутативные слова Линдона — Ширшова* (*PCLS-слова*) определяются по индукции:

(1) Элементы множества A являются PCLS-словами.
(2) LS-слово $[u]$ длины большей 1 является PCLS-словом, если $[u] = [[v],[w]]$, где $[v]$ и $[w]$ — PCLS-слова, причем в графе G первая буква слова $[w]$ не соединена ребром хотя бы с одной буквой слова $[v]$.

В [12] было доказано, что при любом линейном упорядочении множества A множество всех $PCLS$-слов является линейным базисом частично коммутативной алгебры $\mathcal{L}(A;G)$. В этой статье мономы, являющиеся $PCLS$-словами, будем называть *базисными*. При этом при каком упорядочении множества A будут рассматриваться базисные элементы, будет ясно из контекста, либо это упорядочение будет явно задано.

В данной работе базисные лиевы мономы будем обозначать при помощи строчных букв латинского алфавита, взятых в квадратные скобки, например, $[u]$. Если в лиевом мономе использована левонормированная расстановка скобок, то будем опускать все скобки кроме внешних, то есть вместо $[\ldots[a_{i_1}, a_{i_2}], \ldots, a_{i_r}]$ будем писать $[a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}]$.

Определение 2.8. Пусть $[u]$ — базисный лиев моном на множестве порождающих $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Мультистепенью* монома $[u]$ назовем вектор $\overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, где δ_i — это число вхождений порождающего a_i в моном $[u]$.

Мультистепень базисного монома $[u]$ будем обозначать $\mathrm{mdeg}([u])$, а число вхождений порождающего x_i в лиев моном $[u]$ — через $\mathrm{mdeg}_i([u])$.

Пусть $[u]$ — лиев моном и $\mathrm{mdeg}[u] = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$. Введем обозначение $\mathrm{supp}([u]) = \{a_i \mid \delta_i \neq 0\}$ и распространим это обозначение на множество лиевских многочленов: пусть $g = \sum_j \alpha_j [u_j]$, тогда $\mathrm{supp}(g) = \bigcup_j \mathrm{supp}([u_j])$.

Определение 2.9. Ненулевой элемент g алгебры $\mathcal{L}(A;G)$ называется *мультиоднородным*, если g представим в виде линейной комбинации базисных лиевских мономов одной и той же мультистепени $\overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$.

Распространим понятие мультистепени на множество мультиоднородных элементов алгебры $\mathcal{L}(A;G)$, полагая $\mathrm{mdeg}(g) = \mathrm{mdeg}([u])$, где $[u]$ — произвольный базисный лиев моном, входящий с ненулевым коэффициентом в разложение g в виде линейной комбинации базисных (при некотором упорядочении порождающих) лиевых мономов.

Отметим, что в силу мультиоднородности тождеств алгебры Ли и определяющих соотношений частично коммутативной алгебры справедливо следующее утверждение. Если $0 = \sum_i g_i$ в алгебре $\mathcal{L}(A;G)$, где каждое слагаемое g_i является мультиоднородным лиевым многочленом, причем все g_i имеют различные мультистепени, то в этой алгебре $g_i = 0$ для всех i. Также из мультиоднородности тождеств алгебры Ли и определяющих соотношений частично коммутативной алгебры следует, что если элемент g мультиоднородный (при некотором упорядочении), то он остается таковым и при любом другом упорядочении множества A. Более того, мультистепень мультиоднородного многочлена не зависит от упорядочения множества A.

Пусть $f, g \in \mathcal{L}(A; G)$. Будем писать $f \backsim g$, если $\alpha f = \beta g$ для некоторых $\alpha, \beta \in R \backslash \{0\}$. Очевидно, что если $f \backsim g$, то $[f, g] = 0$ в $\mathcal{L}(A; G)$ (это верно даже в свободной алгебре Ли с множеством порождающих L). Также очевидно, что отношение “$\backsim$” является эквивалентностью.

Нам потребуется описание централизаторов элементов алгебры $\mathcal{L}(A; G)$, полученное в [13].

Теорема 2.10. *Пусть $g \in \mathcal{L}(A; G)$, $H = \overline{G}(\mathrm{supp}(g))$ и $H_1, \ldots, H_p$ — компоненты связности графа H. Тогда*

(1) *имеет место представление $g = \sum_{i=1}^{p} g_i$, где $\mathrm{supp}(g_i)$ состоит из вершин графа H_i для всех $i = 1, 2, \ldots, p$;*
(2) *$C(g)$ состоит из элементов вида $h = \sum_{i=1}^{p} h_i + h'$, где если $g_i \backsim h_i$ для всех $h_i \neq 0$, где $i = 1, 2, \ldots, p$, и если $h' \neq 0$, то $\mathrm{supp}(g) \leftrightarrow \mathrm{supp}(h')$.*

Мы также приведем один технический результат из [17], который мы будем использовать в данной работе.

Итак, пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Через $(*)$ обозначим лексикографический порядок на множестве $A^\star$, индуцированный следующим упорядочением множества A: $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

Для произвольных $v \in A^\star$ и $r \in \mathbb{N}$ обозначим через $v_{(r)}$ ассоциативный моном, получающийся из v заменой в нем каждого вхождения a_{p-1} на $a_p a_1^r$.

Лемма 2.11. *Пусть v и w — два ассоциативных монома. Если $v > w$ относительно порядка $(*)$, то существует такое r_0, что $v_{(r)} > w_{(r)}$ для любого натурального $r \geqslant r_0$.*

В заключение напомним некоторые понятия, связанные с универсальными теориями алгебраических систем. Пусть Φ — формула без свободных переменных, в записи которой содержатся элементы некоторой алгебры A. Если эта формула истинна, будем писать $A \models \Phi$.

Определение 2.12. $\exists$-*предложением* называется формула без свободных переменных, имеющая вид

$$\exists w_1, \ldots, w_m \Phi(w_1, \ldots, w_m),$$

где $\Phi(w_1, \ldots, w_m)$ — это формула исчисления предикатов соответствующей алгебраической системы, не содержащая кванторов.

Определение 2.13. Множество всех $\exists$-предложений, истинных в алгебре Ли L, называется ее *экзистенциальной теорией* или $\exists$-*теорией* алгебры Ли.

Определение 2.14. Две алгебры Ли называются *экзистенциально эквивалентными*, если их экзистенциальные теории совпадают.

Аналогично определяется $\forall$-*предложение*, *универсальная теория* (или $\forall$-*теория*) алгебры Ли и *универсально эквивалентные* алгебры Ли.

Легко видеть, что алгебры Ли L_1 и L_2 экзистенциально эквивалентны тогда и только тогда, когда эти алгебры универсально эквивалентны.

В теории моделей хорошо известна процедура замены функциональных символов на предикатные. Любое множество вместе со всеми предикатами, индуцированными на нем, является подмоделью.

Приведем хорошо известный результат из теории моделей.

Теорема 2.15. *Произвольные алгебраические системы (в том числе и алгебры Ли) L_1 и L_2 универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда для каждой конечной подмодели одной алгебраической системы существует изоморфная ей подмодель в другой алгебраической системе.*

3. Вспомогательные свойства графов

В этом разделе мы докажем некоторые вспомогательные свойства графов и их дополнений. В [16] были приведены доказательства аналогичных свойств в частном случае, когда G является деревом или лесом. В нашем (более общем) случае доказательства аналогичны, однако, мы приведем их здесь для полноты изложения.

Лемма 3.1. *Пусть $G = \langle A; E\rangle$ — конечный неориентированный граф без петель. Если в G есть хотя бы две компоненты связности, то граф $\overline{G}$ связен.*

Доказательство. Докажем, что любые две вершины графа G лежат в одной компоненте связности графа $\overline{G}$. Пусть b, c — две произвольные вершины графа G.

Если $b \overset{G}{\not\leftrightarrow} c$, то вершины b и c смежны в графе $\overline{G}$ и доказывать нечего.

Пусть $b \overset{G}{\leftrightarrow} c$, тогда, в частности, вершины b и c лежат в одной компоненте связности графа G, обозначим эту компоненту связности через G_1. По условию леммы существуют компоненты связности графа G, отличные от G_1. Пусть G_2 — одна из таких компонент. Рассмотрим произвольную вершину $d \in A(G_2)$. По условию леммы $b \overset{G}{\not\leftrightarrow} d$ и $c \overset{G}{\not\leftrightarrow} d$, а значит вершины b и c смежны с вершиной d в графе $\overline{G}$, то есть лежат в одной компоненте связности этого графа. □

Лемма 3.2. *Пусть $G = \langle A; E\rangle$ — конечный неориентированный граф без петель, без треугольников и квадратов. Тогда граф $\overline{G}$ имеет не более двух компонент связности, причем если граф $\overline{G}$ не связен, то G является звездой.*

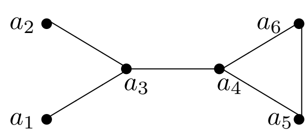
Доказательство. Пусть граф G таков, что граф $\overline{G}$ имеет хотя бы три компоненты связности. Выберем по одной вершине из каждой компоненты связности графа $\overline{G}$, обозначим выбранные вершины b, c, d. Так как эти вершины принадлежат различным компонентам связности, никакие две из них не соединены ребрами в графе $\overline{G}$. Следовательно, в графе G эти вершины попарно смежны, то есть образуют цикл длины три, что противоречит условию леммы.

Докажем теперь, что если в графе $\overline{G}$ две компоненты связности, то хотя бы одна из них состоит из одной вершины. Действительно, предположим в графе $\overline{G}$ две компоненты связности, число вершин в каждой из которых не менее двух. Пусть b_1, b_2 — различные вершины из одной из компонент связности графа $\overline{G}$, а и c_1, c_2 — различные вершины другой его компоненты связности. Тогда, очевидно, $b_i \overset{G}{\leftrightarrow} c_j$, для любых $i, j \in \{1, 2\}$. Следовательно, (b_1, c_1, b_2, c_2) — цикл длины 4 в графе G, снова получили противоречие с условием леммы.

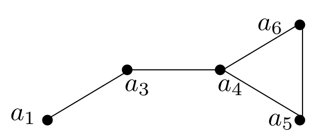
Итак, если в графе $\overline{G}$ две компоненты связности, то одна из них состоит из одной вершины. Обозначим эту вершину через a. Из $a \overset{\overline{G}}{\not\leftrightarrow} A\backslash\{a\}$ следует $a \overset{G}{\leftrightarrow} A\backslash\{a\}$. Если $b \overset{G}{\leftrightarrow} c$ для некоторых вершин $b, c \in A\backslash\{a\}$, то (a, b, c) — цикл длины 3 в графе G. Полученное противоречие показывает, что нет других ребер кроме соединяющих вершину a с остальными вершинами, а значит G является звездой. $\square$

Напомним определение графа G^*. Пусть $G = \langle A; E\rangle$ — произвольный граф. Обозначим через A^* множество вершин, степень которых в графе G не менее 2. Граф $G(A^*)$ назовем *внутренностью* графа G и обозначим его через G^*. Множество ребер этого графа обозначим через E^*.

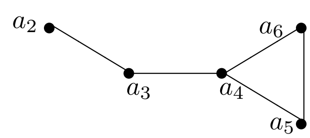
Пусть G — произвольный граф с непустой внутренностью. Обозначим через G' минимальный подграф G, такой что степень любой вершины из множества A^* в графе G' не меньше двух. Иными словами, граф G' получается следующим образом. Пусть C — подмножество множества A^*, состоящее из всех вершин, смежных с вершинами множества $A\backslash A^*$. Для каждой вершины множества C, если степень этой вершины в графе G^* равна 1, то добавим к графу G^* одну из вершин множества $A\backslash A^*$, смежных с вместе с ребром, соединяющим эти вершины. Нетрудно видеть, что в общем случае граф G' определяется неоднозначно. Например, для графа G



в качестве G' можно рассмотреть любой из графов



или



.

Однако нетрудно видеть, что для графа G все возможные графы G', поэтому выберем один из них и через G' будем обозначать именно его, а множества $A(G')$ и $E(G')$ обозначим через A' и E' соответственно. Через A_0 обозначим множество всех вершин графа G, не входящих в одно- и двухвершинные компоненты связности, а через G_0 — граф $G(A_0)$.

Лемма 3.3. *Пусть $G = \langle A; E\rangle$ — конечный неориентированный граф без петель и пусть $H_1, H_2, \ldots, H_k$ — все его компоненты связности, такие что в каждой из них не менее трех вершин. Тогда графы $H_1^*, H_2^*, \ldots, H_k^*$ связны, не пусты и $G^* = \bigcup_{i=1}^{k} H_i^*$.*

Доказательство. Пусть $H = \langle B; D\rangle$ — произвольная компонента связности графа G.

Если $|B| \leqslant 2$, то все вершины из B имеют степень не выше одного, а значит граф H^* пустой.

Пусть $|B| = m \geqslant 3$. В этом случае $|D| \geqslant m - 1$ в силу связности графа H. По лемме о рукопожатиях при $m \geqslant 3$ имеем $2|D| \geqslant 2m - 2 > m = |B|$. Это значит, что в H есть вершины степени не меньше двух, значит граф H^* не пуст.

Так как внутренность любого графа получается из исходного графа удалением вершин степени не больше чем 1, а степень каждой вершины множества B в графах G и H одна и та же, получаем, что для любой вершины $b \in B$ выполнено $b \in B^*$ тогда и только тогда, когда $b \in A^*$. В силу произвольности выбора компоненты связности графа G, содержащей не менее трех вершин, получаем, что $A^* = \bigcup_{i=1}^k B_i^*$, где $B_i = A(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, любое ребро из любого из графов H_i^* является ребром графа G^*.

Докажем, что никаких других ребер в графе G^* нет. Действительно, в противном случае найдется ребро $\{b_1, b_2\} \in E^*$, не лежащее ни в одном из графов H_i^*, то есть если $b_1 \in B_s^*$ и $b_2 \in B_t^*$, то $s \neq t$. Но в этом случае $b_1 \in B_s$, $b_2 \in B_t$, а значит ребро $\{b_1, b_2\}$ соединяет компоненты связности H_s и H_t в графе G, противоречие.

Осталось доказать, что графы $H_1^*, H_2^*, \ldots, H_k^*$ связны. Пусть это не так. Рассмотрим произвольный подграф H_i^*. Если он не связен, то найдутся две вершины $b, c \in A(H_i^*)$, такие что в графе H_i^* не существует маршрута из b в c, однако, так как граф H_i связен, в нем такой маршрут есть. Следовательно, этот маршрут содержит некоторое ребро e, лежащее в множестве $E(H_i) \backslash E(H_i^*)$, а значит хотя бы один из концов ребра e лежит в множестве $A(H_i) \backslash A(H_i^*)$. Обозначим такой конец ребра через d. В частности степень d в графе G равна 1. Однако, так как $d \neq b$ и $d \neq c$, эта вершина не является концом маршрута, а значит ее степень в графе G не меньше двух, противоречие. □

Из леммы 3.3 следует, что подграфы $H_1^*, H_2^*, \ldots, H_k^*$ и только они являются компонентами связности графа G^*.

Лемма 3.4. *Пусть G — произвольный конечный неориентированный граф без петель, тогда $(G')^* = G^*$.*

Доказательство. Очевидно, что в графе G' нет изолированных вершин. В нем также нет компонент связности с двумя вершинами. Действительно, пусть компонента связности графа G' состоит из вершин b_1 и b_2, соединенных ребром. Тогда обе эти вершины имеют степень 1, а значит $b_1, b_2 \in A' \backslash A^*$. Однако это невозможно, так как это ребро не влияет на степени вершин множества A^*, и поэтому может быть удалено вместе со своими концами, при этом в полученном графе все вершины из множества A^* будут иметь степень не менее двух, что противоречит минимальности графа G'.

Осталось отметить, что в графе G' степень, равную 1, имеют только вершины из $A' \backslash A^*$, каждая из которых, в силу только что доказанного, соединена с вершиной из множества A^*, следовательно $(G')^* = G^*$. □

Лемма 3.5. *Пусть G — произвольный конечный неориентированный граф без петель, тогда $G' \simeq \bigcup_{i=1}^k H_i'$.*

Доказательство. Из лемм 3.3 и 3.4 следует, что $G^* = (G')^* = \bigcup_{i=1}^k H_i^*$. По определению, граф H_i' — это минимальный граф, получаемый из графа H_i^* добавлением некоторого множества вершин, степень которых равна 1 в графе H_i, а также ребер, соединяющих каждую добавленную вершину с вершиной множества $A(H_i^*)$, таким образом, что все вершины из множества $A(H_i^*)$ имеют степень не меньше 2 в графе H_i'. Как следует из леммы 3.3, все множества

$A(H_i^*) \cap A(H_j^*)$ пусты при $i \neq j$, а из построения графов H_i' следует, что множества $A(H_i') \backslash A(H_i^*)$ и $A(H_j') \backslash A(H_j^*)$ не пересекаются при любых $i \neq j$. Следовательно, в графе $\bigcup_{i=1}^k H_i'$ степень, равную 1 в этом графе, имеют все вершины из множества $A' \backslash A^* = \bigcup_{i=1}^k A(H_i') \backslash A(H_i^*)$ и только они.

Нетрудно видеть, что граф $\bigcup_{i=1}^k H_i'$ и будет минимальным подграфом графа G, таким что любая вершина из множества A^* имеет в этом подграфе степень не меньше 2. Действительно, если граф $\bigcup_{i=1}^k H_i'$ не является минимальным, удовлетворяющим указанному свойству, то из него можно удалить некоторое ребро e, не лежащее в E^*. Пусть это ребро лежит в множестве $E(H_i') \backslash E(H_i^*)$, тогда, удалив это ребро и инцидентную ему вершину из множества $A(H_i') \backslash A(H_i^*)$, получим граф, в котором степень некоторой вершины множества $A(H_i^*) \subseteq A^*$ равна 1, а значит степень этой же вершины равна 1 и в G'. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Лемма 3.6. *Для любого конечного неориентированного графа без петель G количество компонент связности у графов G^* и G' одинаково и равно количеству компонент связности графа G, имеющих не менее трех вершин.*

Доказательство. Пусть $H_1 = \langle B_1; D_1 \rangle, H_2 = \langle B_2; D_2 \rangle, \ldots, H_k = \langle B_k; D_k \rangle$ — все компоненты связности графа G, такие что в каждой из них не менее трех вершин. Из леммы 3.3 следует, что $G^* = \bigcup_{i=1}^k H_i^*$, где $H_1^*, H_2^*, \ldots, H_k^*$ — компоненты связности графа G^*.

Для графа G' из лемм 3.3 и 3.4 следует, что количество компонент связности графа $(G')^* = G^*$ равно количеству компонент связности графа G', таких что в каждой из них не менее трех вершин. Однако, как было доказано выше, в графе G' все компоненты связности имеют не менее трех вершин, отсюда и получаем требуемое. □

Лемма 3.7. *Пусть $G_1 = \langle A_1; E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle A_2; E_2 \rangle$ — два конечных неориентированных графов без петель. Тогда $G_1^* \simeq G_2^*$ тогда и только тогда когда $G_1' \simeq G_2'$.*

Доказательство. Для начала докажем утверждение леммы для случая, когда графы G_1^* и G_2^* связны. Рассмотрим два случая.

1. Пусть G_1^* и G_2^* состоят из одной изолированной вершины. Это означает, что в каждом из графов G_1 и G_2 есть ровно одна вершина степени больше 1 то есть G_1 и G_2 — звезды. Тогда, очевидно, что G_1' и G_2' — линейные графы с тремя вершинами, то есть графы с двумя ребрами, соединяющими одну из вершин с двумя другими.

2. Предположим, что в графах G_1^* и G_2^* более одной вершины. В силу леммы 3.3 эти графы связны, а значит степень каждой вершины этих графов не менее 1. Тогда граф G_1' получается соответственно из графа G_1^* добавлением к каждой висячей вершине этого графа одного из ребер графа G_1, соединяющего эту вершину с некоторой вершиной множества $A \backslash A_1^*$. Аналогичным образом получается граф G_2' из графа G_2^*.

Пусть $\varphi : A_1^* \to A_2^*$ — отображение вершин, задающее изоморфизм графов G_1^* и G_2^*. Построим отображение $\psi : A_1' \to A_2'$ следующим образом. Если $b \in A_1^*$, то положим $\psi(b) = \varphi(b)$. Пусть теперь $b \in A_1' \backslash A_1^*$. Тогда в графе G_1' вершина b смежна с некоторой вершиной $c \in A_1^*$, степень которой в графе G_1^* равна

1. Тогда степень вершины $\varphi(c)$ в графе G_2^* также равна единице, а значит в графе G_2' есть единственная вершина $d \in A_2' \backslash A_2^*$, соединенная с $\varphi(c)$ ребром. Положим $\psi(b) = d$. Осталось показать, что отображение ψ задает изоморфизм графов G_1' и G_2'.

Рассмотрим произвольные вершины b и c графа G_1'. Если $b, c \in A_1^*$, то $\psi(b)$ и $\psi(c)$ соединены ребром в графе G_2' тогда и только тогда, когда b и c соединены ребром в графе G_1', так как ψ действует на множестве A_1^* так же, как и φ, а φ определяет изоморфизм графов G_1^* и G_2^*.

Пусть $b, c \in A_1' \backslash A_1^*$. Как было показано в доказательстве леммы 3.4, b и c не соединены ребром. Из построения отображения ψ следует, что $\psi(b), \psi(c) \in A_2' \backslash A_2^*$, а значит $\psi(b)$ и $\psi(c)$ также не соединены ребром.

Наконец, если $b \in A_1' \backslash A_1^*$, то для каждой такой вершины есть лишь одна вершина $c \in A_1^*$, такая что b и c соединены ребром в графе G_1'. При этом по построению отображения ψ вершина $\psi(b)$ соединена с $\psi(c)$ ребром в графе G_2' в том и только том случае, когда вершина b соединена с вершиной c ребром в графе G_1'.

В случае, когда графы G_1^* и G_2^* не являются связными, в силу леммы 3.3 имеем $G_1^* = \bigcup_{i=1}^k H_{1i}^*$, где H_{i1} — компоненты связности графа G, имеющие не менее трех вершин. Так как $G_1^* \simeq G_2^*$, без ограничения общности можно считать, что $G_2^* = \bigcup_{i=1}^k H_{2i}^*$, причем $H_{1i}^* \simeq H_{2i}^*$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Тогда из доказанного выше получаем $H_{1i}' \simeq H_{2i}'$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, и доказательство завершается применением леммы 3.5. $\square$

4. Определяющие графы без одно- и двухвершинных компонент связности

Для начала исследуем вопросы универсальной эквивалентности частично коммутативных алгебр Ли в частном случае, когда в определяющем графе алгебры нет изолированных вершин и ребер, не имеющих общих вершин с другими ребрами. Иными словами, предполагаем, что все компоненты связности определяющих графов рассматриваемых алгебр Ли имеют минимум три вершины.

Пусть $G = \langle A; E \rangle$ — произвольный граф без треугольников и квадратов, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ —множество его вершин, и пусть $A^* = \{a_{t_1}, a_{t_2}, \ldots a_{t_k}\}$. Рассмотрим предложение

$$\begin{aligned}\Phi(G) = \exists x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_k \\ \Psi(G; x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_k),\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}\Psi(G; x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_k) = \bigwedge_{i=1}^{k} x_i \neq 0 \wedge \bigwedge_{a_{t_i} \overset{G}{\leftrightarrow} a_{t_j}} [x_i, x_j] = 0 \wedge \\ \wedge \bigwedge_{a_{t_i} \overset{G}{\not\leftrightarrow} a_{t_j}} [x_i, x_j] \neq 0 \ \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} [y_i, z_i] \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} [x_i, y_i] = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} [x_i, z_i] = 0 \wedge \\ \wedge \bigwedge_{(i,j): a_{t_i} \overset{G}{\leftrightarrow} a_{t_j}} ([x_i, y_j] \neq 0 \vee [x_i, z_j] \neq 0).\end{aligned}$$

Лемма 4.1. *Пусть $G = \langle A; E\rangle$ — граф без петель, без треугольников и квадратов и $H = \langle B; D\rangle$ — подграф графа G, такой что $B^* \neq \varnothing$. Тогда в алгебре Ли $\mathcal{L}(A; G)$ истинно предложение $\Phi(H)$.*

Доказательство. Пусть $B = \{b_1, b_2, \ldots b_m\}$ — множество вершин подграфа H и $B^* = \{b_{s_1}, b_{s_2}, \ldots, b_{s_l}\}$. Для доказательства достаточно подобрать такие значения переменных $x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_l$, для которых будет истинной формула $\Psi(H; x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_l)$.

Положим $x_i = b_{s_i}$ для $i = 1, 2, \ldots l$. Тогда, очевидно, что $[b_{s_i}, b_{s_j}] = 0$ тогда и только тогда, когда $b_{s_i} \overset{H}{\leftrightarrow} b_{s_j}$.

Далее, из определения множества B^* следует, что степени вершин этого множества в графе H не меньше двух. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, l$ обозначим через $c_{i,1}$ и $c_{i,2}$ две различные вершины, смежные с b_{s_i} в графе H и положим $y_i = c_{i,1}$ и $z_i = c_{i,2}$. Тогда $[b_{s_i}, c_{i,1}] = [b_{s_i}, c_{i,2}] = 0$ в алгебре $\mathcal{L}(A; G)$.

Отметим, что $c_{i,1} \overset{G}{\not\leftrightarrow} c_{i,2}$, так как в противном случае есть 3-цикл $(b_{s_i}, c_{i,1}, c_{i,2})$ в графе G, что противоречит условию леммы. Следовательно, $[c_{i,1}, c_{i,2}] \neq 0$ в алгебре $\mathcal{L}(A; G)$.

Наконец, предположим, что $[b_{s_i}, c_{j,1}] = 0$ для некоторых i и j, таких что $b_{s_i} \overset{H}{\leftrightarrow} b_{s_j}$. Если $b_{s_i} \neq c_{j,1}$, то $(b_{s_i}, b_{s_j}, c_{j,1})$ —цикл длины 3 в графе H. Получили противоречие. Следовательно, $b_{s_i} = c_{j,1}$. Однако в этом случае $b_{s_i} \neq c_{j,2}$, так как $c_{j,1} \neq c_{j,2}$. Отсюда, как и ранее, если $[b_{s_i}, c_{j,2}] = 0$, то $(b_{s_i}, b_{s_j}, c_{j,2})$ —цикл длины 3, что противоречит условию леммы. □

Лемма 4.2. *Пусть $G = \langle A; E\rangle$ и $H = \langle B; F\rangle$ — два графа без петель, без треугольников и квадратов, причем $|A^*| = k$, и пусть $\mathcal{L}(B; H)$ — частично коммутативная алгебра Ли, определенная графом H. Если в $\mathcal{L}(B; H)$ истинна формула $\Psi(G; f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k)$, то $|\mathrm{supp}(f_i)| = 1$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.*

Доказательство. Пусть формула $\Psi(G; f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k)$ истинна в алгебре $\mathcal{L}(B; H)$ и $|\mathrm{supp}(f_i)| \geqslant 2$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Так как H — граф без треугольников и квадратов, таким же будет и его подграф $H(\mathrm{supp}(f_i))$. Тогда по лемме 3.2 граф $\overline{H}(\mathrm{supp}(f_i))$ имеет не более двух компонент связности. Рассмотрим два случая.

1. Пусть в графе $\overline{H}(\mathrm{supp}(f_i))$ две компоненты связности. Из леммы 3.2 следует, что граф $H(\mathrm{supp}(f_i))$ — звезда. Следовательно, $f_i = f_{i,1} + \alpha b$, где b —центр звезды, $f_{i,1} \in \mathcal{L}(B; H)$, такой что $b \overset{H}{\leftrightarrow} \mathrm{supp}(f_{i,1})$, и $\alpha \in R\backslash\{0\}$.

Из теоремы 2.10 следует, что $g_i = g_{i,1} + \beta b + g_{i,2}$, где $\beta \in R$, $g_{i,1} \backsim f_{i,1}$ или $g_{i,1} = 0$, а также $\mathrm{supp}(f_{i,1}) \overset{H}{\leftrightarrow} \mathrm{supp}(g_{i,2})$ и $b \overset{H}{\leftrightarrow} \mathrm{supp}(g_{i,2})$ или $g_{i,2} = 0$, причем $g_{i,2} \neq 0$ только если $g_{i,1} = 0$ или $\beta = 0$. Докажем, что случай $g_{i,2} \neq 0$ невозможен. Пусть это не так, тогда рассмотрим граф $\overline{H}(\mathrm{supp}(f_i) \cup \mathrm{supp}(g_i)) = \overline{H}(\mathrm{supp}(f_{i,1}) \cup \{b\} \cup \mathrm{supp}(g_{i,2}))$. Как следует из свойств $g_{i,2}$ и b, полученный граф трехсвязный, что невозможно в силу леммы 3.2. Таким образом, $g_i = g_{i,1} + \beta b$ где $\beta \in R$, $g_{i,1} \backsim f_{i,1}$ или $g_{i,1} = 0$

Аналогично, $h_i = h_{i,1} + \gamma b$, где $\gamma \in R$, $h_{i,1} \backsim f_{i,1}$ или $h_{i,1} = 0$.

Соответственно, получаем

$$[g_i, h_i] = [g_{i,1} + \beta b, h_{i,1} + \gamma b] = [g_{i,1}, h_{i,1}] + \gamma[g_{i,1}, b] + \beta[b, h_{i,1}] = 0 \tag{3}$$

Действительно, если $g_{i,1} \neq 0$ и $h_{i,1} \neq 0$, то первое произведение равно нулю, так как $g_{i,1} \backsim f_{i,1}$ и $h_{i,1} \backsim f_{i,1}$, а значит и $g_{i,1} \backsim h_{i,1}$. Второе произведение равно нулю, потому что если $g_{i,1} \neq 0$, то $b \overset{H}{\leftrightarrow} \mathrm{supp}(f_{i,1}) = \mathrm{supp}(g_{i,1})$. Для третьего произведения доказательство полностью аналогично доказательству равенства нулю второго произведения. Таким образом, формула $\Psi(G; f_1, \ldots, f_l, g_1, \ldots, g_l, h_1, \ldots, h_l)$ ложна, а значит данный случай невозможен.

2. Предположим теперь, что граф $\overline{H}(\mathrm{supp}(f_i))$ связен. Если $|\mathrm{supp}(f_i)| \geqslant 2$, то из теоремы 2.10 и леммы 3.2 следует, что $g_i \backsim f_i$ или $g_i = g_{i,1} + \beta b$, где $g_{i,1} = 0$ или $g_{i,1} \backsim f_i$, $\beta \in R\backslash\{0\}$ и $b \in B$ удовлетворяет условию $b \overset{H}{\leftrightarrow} \mathrm{supp}(f_i)$. Отметим, что случай $g_i = 0$ невозможен, так как из формулы $\Psi(G; f_1, \ldots, f_l, g_1, \ldots, g_l, h_1, \ldots, h_l)$ следует $[g_i, h_i] \neq 0$. Аналогично, $h_i \backsim f_i$ или $h_i = h_{i,1} + \gamma c$, где $h_{i,1} \backsim f_i$, $\gamma \in R\backslash\{0\}$ и для $c \in B$ выполнено $c \overset{H}{\leftrightarrow} \mathrm{supp}(f_i)$.

Если $b \neq c$ (и $\beta, \gamma \in R\backslash\{0\}$), то граф $\overline{H}(\mathrm{supp}(f_i) \cup \{b, c\})$ либо трехсвязен, если $b \overset{H}{\leftrightarrow} c$; либо двухсвязен в противном случае, но тогда обе компоненты связности содержат более одной вершины. В обоих случаях получаем противоречие с леммой 3.2.

Предположим теперь, что $b = c$. Тогда случаи $g_i \backsim f_i$ и $g_i = g_{i,1} + \beta b$ можно рассматривать совместно, полагая в первом случае, что $g_i = g_{i,1} + 0b$. Аналогично для h_i. Получаем

$$[g_i, h_i] = [g_{i,1} + \beta b, h_{i,1} + \gamma b] = [g_{i,1}, h_{i,1}] + \beta[b, h_{i,1}] + \gamma[g_{i,1}, b] = 0,$$

что доказывается аналогично (3). Снова получили противоречие с формулой $\Psi(G; f_1, \ldots, f_l, g_1, \ldots, g_l, h_1, \ldots, h_l)$. Следовательно, случай $|\mathrm{supp}(f_i)| \geqslant 2$ невозможен, из формулы $\Psi(G; f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k)$ очевидно также следует, что $\mathrm{supp}(f_i) \neq \varnothing$ и лемма доказана. □

Рассмотрим алгебру $\mathcal{L}(A; G)$, где G — граф с множеством вершин A без треугольников и квадратов и без одно- и двухвершинных компонент связности. Для произвольных $b, c \in A$ и $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ будем использовать обозначение

$$[b \circ (c)^r] = [[\ldots[b, \underbrace{c], \ldots, c], c]}_{r \text{ раз}}.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны [17], однако для полноты рассуждения приведем их. Предположим, что граф G обладает следующим свойством. В G есть хотя бы одна вершина степени не меньше трех, смежная с хотя бы одной висячей вершиной. Обозначим эту вершину через a_{n-2}, смежную с ней висячую вершину — через a_{n-1}, две другие смежные с a_{n-2} вершины — через a_n и a_1, а все остальные вершины в произвольном порядке обозначим $a_2, \ldots, a_{n-3}$. Определим граф $\widetilde{G}$ следующим образом:

$$\widetilde{A} = A\backslash\{a_{n-1}\}, \qquad \widetilde{G} = G(\widetilde{A}). \tag{4}$$

Напомним, что через $(*)$ обозначается лексикографический порядок, индуцированный на множестве $A^\star$ упорядочением на порождающих $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

Для любого $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ определим отображение $\varphi_r : A \to \mathcal{L}(\widetilde{A}; \widetilde{G})$ следующим образом:

$$\varphi_r(a_i) = \begin{cases} a_i, & \text{если } i \neq n-1, \\ [a_n \circ (a_1)^r], & \text{если } i = n-1. \end{cases} \tag{5}$$

Докажем, что это отображение единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры $\mathcal{L}(A; G)$ на алгебру $\mathcal{L}(\widetilde{A}; \widetilde{G})$. Для этого необходимо только проверить, что φ_r сохраняет соотношения алгебры $\mathcal{L}(A; G)$. Пусть $[a_i, a_j] = 0$ в алгебре $\mathcal{L}(A; G)$. Если $i \neq n-1$ и $j \neq n-1$, то $\varphi_r([a_i, a_j]) = [a_i, a_j]$. При этом $a_i \overset{\widetilde{G}}{\leftrightarrow} a_j$, так как $a_i \overset{G}{\leftrightarrow} a_j$. Следовательно, $[a_i, a_j] = 0$ в алгебре $\mathcal{L}(\widetilde{A}; \widetilde{G})$. Если же $i = n-1$ (случай, когда $j = n-1$ рассматривается аналогично), то $j = n-2$. Получаем $\varphi_r([a_{n-1}, a_{n-2}]) = [[a_n \circ (a_1)^r], a_{n-2}] = 0$, так как $a_{n-2} \overset{\widetilde{G}}{\leftrightarrow} \{a_1, a_n\}$. Итак, отображение φ_r единственным образом продолжается до гомоморфизма. Этот гомоморфизм мы также обозначим φ_r.

Лемма 4.3. *Пусть G — граф без треугольников и квадратов, без одно- и двухвершинных компонент связности, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — множество вершин этого графа, причем $a_{n-2} \overset{G}{\leftrightarrow} \{a_1, a_{n-1}, a_n\}$, и вершина a_{n-1} — висячая. Пусть также $[u]$ — базисный моном алгебры $\mathcal{L}(A; G)$ относительно упорядочения $(*)$. Тогда существует такое r_0, что для любого целого положительного $r \geqslant r_0$ при подстановке $[a_n \circ (a_1)^r]$ вместо каждого вхождения a_{n-1} получается базисный моном алгебры $\mathcal{L}(\widetilde{A}; \widetilde{G})$.*

Доказательство. Как и в случае ассоциативных мономов, обозначим через $[u]_{(r)}$ лиев моном, полученный посредством подстановки $[a_n \circ (a_1)^r]$ вместо каждого вхождения a_{n-1}.

Сначала докажем, что если $[u] \in LS(A)$, то $[u]_{(r)} \in LS(\widetilde{A})$ для достаточно больших натуральных r.

Очевидно, что это утверждение верно для $r_0 \geqslant 0$, если $[u] \in A$. Пусть $[u] \in LS(A)$, такой что $[u] \notin A$. Тогда в силу определений 2.5 и 2.6 для любого представления $u = vw$ выполнено $u > wv$. По лемме 2.11, для каждого такого представления существует $r(v, w)$, такое что $u_{(r)} > w_{(r)} v_{(r)}$ для всех натуральных $r \geqslant r(v, w)$. Пусть $r_1 = \max(\{r(v, w) | vw = u\})$. Тогда для любого натурального $r \geqslant r_1$ имеем $u_{(r)} = u_1 u_2 > u_2 u_1$ для любого представления

$$u_{(r)} = u_1 u_2, \tag{6}$$

такого что $u_1 = v_{(r)}$, $u_2 = w_{(r)}$ для некоторых v и w, таких что $u = vw$).

Если в разложении (6) $u_1 \neq v_{(r)}$ и $u_2 \neq w_{(r)}$ ни для каких v и w, таких что $u = vw$, то $u_1 = u_3 a_n a_1^s$, $u_2 = a_1^{r-s} u_4$, где $0 \leqslant s < r$. Отметим, что в рассматриваемом случае в запись u входит a_{n-1}, а так как $[u] \in LS(A)$, получаем, что u начинается с a_{n-1} или с a_n, отсюда следует, что $u_{(r)}$ начинается с a_n. Поэтому $u_1 u_2 > u_2 u_1$, а значит $u_{(r)} \in LSA(\widetilde{A})$.

Пусть $[u] \in LS(A)$ — слово Линдона — Ширшова. Если $[u] = [[v], [w]]$, то, в частности, $[v], [w] \in LS(A)$. По предположению индукции $[v]_{(r)}, [w]_{(r)} \in LS(\widetilde{A})$ для натуральных r, бóльших некоторого натурального r_2. Из леммы 2.11 существует натуральное число r_3, такое что $v_{(r)} > w_{(r)}$ для любого $r \geqslant r_3$.

Если $[u] = [[v_1, v_2], [w]]$ где $w \geqslant v_2$, то снова из леммы 2.11 следует существование натурального числа r_4, такого что $w_{(r)} \geqslant v_{2(r)}$ для любого натурального $r \geqslant r_4$.

Пусть, $r_0 = \max(r_1, r_2, r_3, r_4)$. Тогда в силу доказанного $[u]_{(r)} \in LS(\widetilde{A})$ для любого $r \geqslant r_0$.

Предположим теперь, что $[u] \in PCLS(A)$. Если $[u]$ является порождающим, то утверждение очевидно для любого натурального числа $r \geqslant 0$. Пусть $[u] = [[v], [w]]$, причем $[v], [w] \in PCLS(A)$. По предположению индукции можно считать, что $[v]_{(r)}, [w]_{(r)} \in PCLS(\widetilde{A})$ для любого $r \geqslant r_0$. Осталось доказать, что первая буква слова $[w]_{(r)}$ не смежна в графе G хотя бы с одной буквой слова $[v]_{(r)}$.

Если в записи $[u]$ нет a_{n-1}, то доказывать нечего.

Если первые буквы $[v]$ и $[w]$ лежат в множестве $\{a_{n-1}, a_n\}$, то мономы $[v]_{(r)}$ и $[w]_{(r)}$ начинаются с a_n, а значит первые буквы этих элементов не являются смежными в графе G.

Пусть a_{n-1} входит в запись $[v]$, а $[w]$ начинается с a_i, где $i \neq n-1, n$, причем a_i не смежна с некоторой вершиной $a_j \in \operatorname{supp}([v])\backslash\{a_{n-1}\}$. Тогда a_j входит в запись $[v]_{(r)}$, откуда следует, что существует порождающий, входящий в запись $[v]_{(r)}$, не смежный с a_i.

Наконец, пусть a_{n-1} входит в запись $[v]$ и $a_i \overset{G}{\not\leftrightarrow} a_{n-1}$. В этом случае $i \neq n-2$ и если $a_i \overset{G}{\leftrightarrow} \operatorname{supp}([v]_{(r)})$, то в частности a_i смежна с a_n и с a_1. Следовательно, граф G содержит цикл (a_i, a_1, a_{n-2}, a_n), что противоречит условию леммы. Таким образом, мы доказали, что $[u]_{(r)} \in PCLS(\widetilde{A})$ для $r \geqslant r_0$, что и требовалось. □

Лемма 4.4. *Пусть $G = \langle A; E\rangle$ и $H = \langle B; D\rangle$ — графы без петель, без треугольников и квадратов. Если $\mathcal{L}(B; H) \models \Phi(G)$, то граф G^* изоморфен подграфу графа H^*.*

Доказательство. Пусть $A^* = \{a_{t_1}, a_{t_1}, \ldots, a_{t_k}\}$. Из леммы 4.2 следует, что если в алгебре $\mathcal{L}(B; H)$ выполняется формула $\Psi(G; f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k)$, для некоторых лиевых многочленов $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k$, то для $i = 1, 2, \ldots, k$ выполняется $|\operatorname{supp}(f_i)| = 1$. Иными словами, для каждого i выполнено $f_i = \alpha_i b_{r_i}$ для некоторых $r_i \in \{1, 2, \ldots, |B|\}$ и $\alpha_i \in R\backslash\{0\}$.

Легко видеть, что $b_{r_i} \neq b_{r_j}$ ни для каких $i \neq j$. Действительно, в противном случае из истинности формулы $\Psi(G; f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k)$ следует, что $[f_i, g_j] \neq 0$. Однако, так как $f_i \backsim f_j$ и $[f_j, g_j] = [f_j, h_j] = 0$ (эти равенства также следуют из истинности формулы $\Psi(G; f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k)$), получаем $[f_i, g_j] = 0$ и $[f_i, h_j] = 0$, противоречие. Таким образом, перенумеровав, если это необходимо, вершины в графе H, мы можем считать, что $f_i = \alpha_i b_{t_i}$.

Из истинности формулы $\Psi(G; f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k)$ следует, что $a_{t_i} \overset{G}{\leftrightarrow} a_{t_j}$ тогда и только тогда, когда $[b_{t_i}, b_{t_j}] = 0$, то есть когда $b_{t_i} \overset{G}{\leftrightarrow} b_{t_j}$. Таким образом, граф $H(\{b_{t_1}, b_{t_2}, \ldots, b_{t_k}\})$ изоморфен графу G^*. Следовательно, нам осталось лишь доказать, что $\{b_{t_1}, b_{t_2}, \ldots, b_{t_k}\} \subseteq B^*$.

Пусть для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ вершина b_{t_i} висячая в графе H и пусть b_p — смежная с ней вершина. Из истинности формулы $\Psi(G; f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k)$ получаем $[f_i, g_i] = [f_i, h_i] = 0$, то есть

g_i и h_i лежат в централизаторе элемента b_{t_i}. Из теоремы 2.10 следует, что $g_i = \beta_1 b_{t_i} + \beta_2 b_p$, $h_i = \gamma_1 b_{t_i} + \gamma_2 b_p$, где $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in R$. Однако в этом случае

$$[g_i, h_i] = [\beta_1 b_{t_i} + \beta_2 b_p, \gamma_1 b_{t_i} + \gamma_2 b_p] = (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)[b_{t_i}, b_p] = 0$$

Получили противоречие с формулой $\Psi(G; f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_k)$.

Итак, вершины b_{t_i} для $i = 1, 2, \ldots, k$ в графе H не являются висячими, а значит лежат в B^*, что завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 4.5. *Пусть $\mathcal{L}(A; G)$ — частично коммутативная алгебра Ли, такая что G — граф без петель, без треугольников и квадратов, в котором существует вершина a, такая что $a \leftrightarrow \{b, c, d\}$, причем b — висячая. Если $g \in \mathcal{L}(A; G)\backslash\{0\}$, то существует натуральное число r_0, такое что $\varphi_r(g) \neq 0$ (см. (5)) для любого натурального $r \geqslant r_0$.*

Доказательство. Переупорядочим, если это необходимо, вершины в графе A таким образом, что $a = a_{n-2}$, $b = a_{n-1}$, $c = a_1$, $d = a_n$ и рассмотрим упорядочение $(*)$ на множестве $A^\star$ а также соответствующее ему упорядочение множества $LS(A)$. Распишем f в виде линейной комбинации базисных мономов относительно этого упорядочения:

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [u_i],$$

где $\alpha_i \in R\backslash\{0\}$, а $N \in \mathbb{N}$. Из леммы 4.3 следует, что для каждого $[u_i]$ существует r_i, такой что $\varphi_r([u_i]) \in PCLS(\widetilde{A})$ для всех $r \geqslant r_i$. Пусть r_0 равно максимальному из значений r_i. В силу леммы 2.11 получаем, что для любого натурального $r \geqslant r_0$ все элементы $\varphi_r([u_i])$ попарно различны, следовательно их линейная комбинация не равна нулю, отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Перейдем к доказательству критерия универсальной эквивалентности для частично коммутативных алгебр, определяющие графы которых не содержат треугольников и квадратов, одно- и двухвершинных компонент связности.

Теорема 4.6. *Пусть $G = \langle A; E\rangle$ и $H = \langle B; D\rangle$ — графы без петель, без треугольников и квадратов, без одно- и двухвершинных компонент связности, такие что $A^* \neq \varnothing$ и $B^* \neq \varnothing$. Алгебры $\mathcal{L}(A; G)$ и $\mathcal{L}(B; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $G^* \simeq H^*$.*

Доказательство. Для начала отметим, что из условия леммы следует, что $|A| \geqslant 3$ и $|B| \geqslant 3$.

Пусть алгебры $\mathcal{L}(A; G)$ и $\mathcal{L}(B; H)$ универсально эквивалентны. Докажем, что в этом случае деревья G^* и H^* изоморфны.

Из леммы 4.1 в частности следует, что $\mathcal{L}(A; G) \models \Phi(G)$. В силу универсальной эквивалентности алгебр $\mathcal{L}(A; G)$ и $\mathcal{L}(B; H)$ получаем $\mathcal{L}(B; H) \models \Phi(G)$. Тогда по лемме 4.4 граф G^* изоморфен некоторому подграфу графа H^*. Однако, применяя аналогичные рассуждения для предложения $\Phi(H)$, получаем, что граф H^* изоморфен некоторому подграфу графа G^*. Следовательно, графы G^* и H^* изоморфны.

Обратно, пусть деревья G^* и H^* изоморфны. Тогда по лемме 3.4 графы G' и H' также изоморфны.

Предположим, что в дереве G есть вершина степени не меньше трех, смежная хотя бы с одной висячей вершиной. Рассмотрим граф $\widetilde{G}$ (см. (4)).

Утверждается, что универсальные теории алгебр $\mathcal{L}(A;G)$ и $\mathcal{L}(\widetilde{A};\widetilde{G})$ совпадают. Из теоремы 2.15 следует, что для проверки совпадения универсальных теорий алгебр Ли L_1 и L_2 достаточно проверить, что любая конечная подмодель алгебры L_1 имеет изоморфную подмодель в алгебре L_2 и наоборот.

В одну сторону утверждение очевидно, так как $\mathcal{L}(\widetilde{A};\widetilde{G})$ является подалгеброй $\mathcal{L}(A;G)$, значит любая конечная подмодель $\{f_1, f_2 \dots, f_s\}$ алгебры $\mathcal{L}(\widetilde{A};\widetilde{G})$ может быть рассмотрена и как конечная подмодель алгебры $\mathcal{L}(A;G)$.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $\Gamma = \{f_1, f_2 \dots, f_s\}$ — произвольное конечное множество ненулевых элементов алгебры Ли $\mathcal{L}(A;G)$. Расширим это множество, добавив в него все ненулевые элементы одного из следующих видов: $f_i - f_j$, $f_i + f_j - f_k$, $[f_i, f_j] - f_k$. Обозначим полученное множество $\overline{\Gamma}$. Достаточно показать, что существует натуральное число r, такое что ядро гомоморфизма $\varphi_r : \mathcal{L}(A;G) \to \mathcal{L}(\widetilde{A};\widetilde{G})$ не пересекается с множеством $\overline{\Gamma}$. Действительно, в этом случае образы всех элементов множества Γ будут различны и если $f_i \neq f_j + f_k$ или $f_i \neq [f_j, f_k]$, то образы f_i и $f_j + f_k$ (соответственно образы f_i и $[f_j, f_k]$) не равны.

Из леммы 4.5 следует, что для каждого элемента $f_i \in \overline{\Gamma}$ можно выбрать r_i, такой что $\varphi_{r_i}(f_i) \neq 0$. Пусть r_0 — максимальное из значений r_i. Тогда для всех $f_i \in \overline{\Gamma}$ и $r \geqslant r_0$ выполнено $\varphi_r(f_i) \neq 0$.

Таким образом, доказано совпадение универсальных теорий для алгебр $\mathcal{L}(A;G)$ и $\mathcal{L}(\widetilde{A};\widetilde{G})$.

Рассмотрим деревья G и H. Удаляя последовательно висячие вершины, смежные с вершинами степени не меньше трех, получим соответственно деревья G' и H'. При этом, в силу только что доказанного, алгебры $\mathcal{L}(A';G')$ и $\mathcal{L}(A;G)$ универсально эквивалентны. Аналогично, универсально эквивалентными являются алгебры $\mathcal{L}(B';H')$ и $\mathcal{L}(B;H)$. Осталось вспомнить, что $G^* \simeq H^*$, эквивалентно $G' \simeq H'$ в силу леммы 3.4. Значит универсальные теории алгебр $\mathcal{L}(A';G')$ и $\mathcal{L}(B';H')$ совпадают. Таким образом, доказана универсальная эквивалентность алгебр $\mathcal{L}(A;G)$ и $\mathcal{L}(B;H)$. $\square$

5. Определяющие графы с возможными двухвершинными компонентами связности

Перейдем к рассмотрению алгебр, определяющие графы которых могут иметь двухвершинные компоненты связности.

Рассмотрим следующую формулу:

$$\mathrm{X}(p; x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_p, z_1, z_2, \dots, z_p) = \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} [[x_i, y_j], [x_i, z_j]] \neq 0 \,\wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{i=1}^{p} [y_i, z_i] = 0 \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant p \\ i \neq j}} [[y_i, y_j], [y_i, z_j]] \neq 0 \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant p \\ i \neq j}} [[z_i, y_j], [z_i, z_j]] \neq 0.$$

Лемма 5.1. *Если в графе G с множеством вершин A не менее p двухвершинных компонент связности и $|A| \geqslant k + 2p$, где $p \geqslant 1$ и $p + k \geqslant 2$, то в частично коммутативной алгебре $\mathcal{L}(A;G)$ найдутся элементы $f_1, f_2, \dots, f_k, g_1, g_2, \dots, g_p, h_1, h_2, \dots, h_p$, такие что истинна формула $\mathrm{X}(p; f_1, f_2, \dots, f_k, g_1, g_2, \dots, g_p, h_1, h_2, \dots, h_p)$.*

Доказательство. Обозначим через $b_1, b_2, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_p$ вершины некоторых p различных двухвершинных компонент связности графа G, причем $b_i \overset{G}{\leftrightarrow} c_i$ для $i = 1, 2, \dots, p$, а через $d_1, d_2, \dots, d_k$ — некоторые вершины, отличные от вершин $b_1, b_2, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_p$. Пусть

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_p, d_1, d_2, \dots, d_k\}.$$

Покажем, что формула $\mathrm{X}(p; f_1, f_2, \dots, f_k, g_1, g_2, \dots, g_p, h_1, h_2, \dots, h_p)$ истинна для $f_i = d_i$ при $i = 1, 2, \dots, k$; $g_j = b_j$ и $h_j = c_j$ при $j = 1, 2, \dots p$.

Так как $b_i \overset{G}{\leftrightarrow} c_i$, имеем $[b_i, c_i] = 0$ для $i = 1, 2, \dots, p$. Далее, $[e, b_i] \neq 0$ и $[e, c_i] \neq 0$ для любого элемента $e \in B \backslash \{b_i, c_i\}$. Тогда в силу теоремы 2.10 получаем $[[e, b_i], [e, c_i]] \neq 0$. Подставляя вместо e поочередно все элементы множества $B \backslash \{b_i, c_i\}$, получаем требуемое. □

Рассмотрим формулу

$$\mathrm{A}(G; x_1, \dots, x_k, y_{11}, \dots, y_{1k}, y_{21}, \dots, y_{2k}, z_1, z_2) = ([z_1, z_2] = 0) \wedge$$
$$\wedge \bigwedge_{i=1}^{k} [[x_i, z_1], [x_i, z_2]] \neq 0 \ \wedge \ \Psi(G; x_1, \dots, x_k, y_{11}, \dots, y_{1k}, y_{21}, \dots, y_{2k})$$

Лемма 5.2. *Пусть* $G = \langle A; E \rangle$ *— граф и для некоторых элементов* $f_1, \dots, f_k, g_{11}, \dots, g_{1k}, g_{21}, \dots, g_{2k}, h_1, h_2 \in \mathcal{L}(A; G)$ *истинна формула* $\mathrm{A}(G; f_1, \dots, f_k, g_{11}, \dots, g_{1k}, g_{21}, \dots, g_{2k}, h_1, h_2)$. *Тогда* $(\mathrm{supp}(h_1) \cup \mathrm{supp}(h_2)) \cap A_0 = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $A^* = \{a_{t_1}, a_{t_1}, \dots, a_{t_k}\}$.

Предположим, что в алгебре Ли $\mathcal{L}(A; G)$ истинна формула

$$\mathrm{A}(G; f_1, \dots, f_k, g_{11}, \dots, g_{1k}, g_{21}, \dots, g_{2k}, h_1, h_2).$$

Тогда h_1 и h_2 не равны 0. Из леммы 4.2 следует, что $|\mathrm{supp}(f_i)| = 1$ для $i = 1, 2, \dots, k$, при этом в силу леммы 4.4 $f_i \not\backsim f_j$ ни для каких $i \neq j$. Иными словами, можно так перенумеровать вершины множества A^*, что $f_i = \alpha_i a_{t_i}$ где $\alpha_i \in R \backslash \{0\}$.

Предположим, что $(\mathrm{supp}(h_1) \cup \mathrm{supp}(h_2)) \cap A_0 \neq \varnothing$.

Если граф $\overline{G}(\mathrm{supp}(h_1) \cup \mathrm{supp}(h_2))$ односвязный, то $h_1 \backsim h_2$ в силу теоремы 2.10, откуда $[h_1, h_2] = 0$, что противоречит истинности формулы $\mathrm{A}(G; f_1, \dots, f_k, g_{11}, \dots, g_{1k}, g_{21}, \dots, g_{2k}, h_1, h_2)$.

Если граф $\overline{G}(\mathrm{supp}(h_1) \cup \mathrm{supp}(h_2))$ двухсвязный, то граф $G(\mathrm{supp}(h_1) \cup \mathrm{supp}(h_2))$ является звездой. Докажем, что центр этой звезды (один из центров, если в графе всего две вершины) лежит в A^*. Действительно, в графе $G(\mathrm{supp}(h_1) \cup \mathrm{supp}(h_2))$ центр соединен со всеми остальными вершинами, а так как хотя бы одна из вершин этого графа лежит в A_0, остальные вершины лежат в этом же множестве. Все вершины множества $A_0 \backslash A^*$ имеют степень один. Отсюда следует, что если в звезде $G(\mathrm{supp}(h_1) \cup \mathrm{supp}(h_2)$ хотя бы три вершины, то ее центр имеет степень не меньше двух, а значит он принадлежит множеству A^*. Если же в графе $G(\mathrm{supp}(h_1) \cup \mathrm{supp}(h_2)$ две вершины, то так как все вершины множества $A_0 \backslash A^*$ имеют степень 1 и соединены с вершинами множества A^*, никакие две из них не смежны. Следовательно, одна из двух вершин графа $G(\mathrm{supp}(h_1) \cup \mathrm{supp}(h_2)$ принадлежит A^*.

Таким образом, центр звезды $G(\mathrm{supp}(h_1) \cup \mathrm{supp}(h_2)$, совпадает с вершиной a_{t_c} для некоторого $c \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда в силу теоремы 2.10 имеют место представления $h_1 = \beta_1 a_{t_c} + h_{10}$ и $h_2 = \beta_2 a_{t_c} + h_{20}$, где $\beta_1, \beta_2 \in R$, где хотя бы один из коэффициентов β_1, β_2 отличен от 0, и либо $h_{10} \backsim h_{20}$, либо один из этих двух элементов равен 0 в алгебре Ли $\mathcal{L}(A;G)$.

Отметим, что для некоторого $s \in 1,2$ выполнено $h_{s0} \neq 0$ и $\beta_{3-s} \neq 0$. Действительно, если $\beta_1, \beta_2 \neq 0$, то выберем s таким, чтобы $h_{s0} \neq 0$. Если же один из коэффициентов β_1, β_2 равен 0, то возьмем s таким, чтобы $\beta_{3-s} \neq 0$. В этом случае $h_{s0} \neq 0$, так как $h_s \neq 0$. Тогда для выбранного s получаем $a_{t_c} \overset{G}{\leftrightarrow} \operatorname{supp}(h_{s0})$. Следовательно, $[a_{t_c}, h_s] = [a_{t_c}, \beta_s a_{t_c} + h_{s0}] = \beta_1 [a_{t_c}, a_{t_c}] + [a_{t_c}, h_s] = 0$. Получили противоречие с истинностью формулы $\mathrm{A}(G; f_1, \ldots, f_k, g_{11}, \ldots, g_{1k}, g_{21}, \ldots, g_{2k}, h_1, h_2)$, согласно которой должно быть $[[f_c, h_1][f_c, h_2]] \neq 0$, а значит и $[f_c, h_s] = \alpha_c [a_{t_c}, h_s] \neq 0$.

Все рассмотренные случаи привели к противоречию, что и доказывает лемму. $\square$

Пусть $G = \langle A; E \rangle$ — граф, такой что $|A^*| = k$. Сопоставим этому графу формулу

$$\begin{aligned}\Lambda(G;p) = \exists x_1, \ldots, x_k, y_{11}, \ldots, y_{1k}, y_{21}, \ldots, y_{2k}, z_{11}, \ldots, z_{1p}, z_{21}, \ldots, z_{2p} \\ \Psi(G; x_1, \ldots, x_k, y_{11}, \ldots, y_{1k}, y_{21}, \ldots, y_{2k}) \wedge \\ \wedge \mathrm{X}(p; x_1, \ldots, x_k, z_{11}, \ldots, z_{1p}, z_{21}, \ldots, z_{2p}).\end{aligned}$$

Лемма 5.3. *Пусть $G = \langle A; E \rangle$ — граф, $p \geqslant 1$, в случае если граф G^* не пуст и $p \geqslant 2$ иначе. Если предложение $\Lambda(G;p)$ истинно в алгебре $\mathcal{L}(A;G)$, то в G хотя бы p двухвершинных компонент связности.*

Доказательство. Докажем, что если выполнены условия леммы, то для любого $i = 1, 2, \ldots, p$ множество $\operatorname{supp}(h_{1i}) \cup \operatorname{supp}(h_{2i})$ состоит из двух вершин, принадлежащих одной и той же двухвершинной компоненте связности графа G.

Пусть $A^* \neq \varnothing$. Тогда, из истинности формулы

$$\Psi(G; f_1, \ldots, f_k, g_{11}, \ldots, g_{1k}, g_{21}, \ldots, g_{2k}) \wedge \mathrm{X}(p; f_1, \ldots, f_k, h_{11}, \ldots, h_{1p}, h_{21}, \ldots, h_{2p})$$

для $f_1, \ldots, f_k, g_{11}, \ldots, g_{1k}, g_{21}, \ldots, g_{2k}, h_{11}, \ldots, h_{1p}, h_{21}, \ldots, h_{2p} \in \mathcal{L}(A;G)$ следует истинность формул $\mathrm{A}(G; f_1, \ldots, f_k, g_{11}, \ldots, g_{1k}, g_{21}, \ldots, g_{2k}, h_{1i}, h_{2i})$ для этих же элементов для $i = 1, 2, \ldots, p$. В силу леммы 5.2 имеем

$$\bigcup_{i=1}^{n} (\operatorname{supp}(h_{1i}) \cup \operatorname{supp}(h_{2i})) \cap A_0 = \varnothing. \tag{7}$$

Кроме того, $h_{1i} \neq 0$, $h_{2i} \neq 0$ и

$$h_{1i} \not\backsim h_{2i} \tag{8}$$

ни для какого i, в противном случае $[f_j, h_{1i}] = 0$, $[f_j, h_{1i}] = 0$ или $[f_j, h_{1i}] \backsim [f_j, h_{2i}]$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$, следовательно $[[f_j, h_{1i}], [f_j, h_{2i}]] = 0$, что противоречит истинности формулы $\mathrm{X}(p; f_1, \ldots, f_k, h_{11}, \ldots, h_{1p}, h_{21}, \ldots, h_{2p})$. Отсюда, в частности, $|\operatorname{supp}(h_{1i}) \cup \operatorname{supp}(h_{2i})| > 1$.

С другой стороны, $|\operatorname{supp}(h_{1i}) \cup \operatorname{supp}(h_{2i})| < 3$. Действительно, если $|\operatorname{supp}(h_{1i}) \cup \operatorname{supp}(h_{2i})| \geqslant 3$, то в силу леммы 5.2 и так как степени всех вершин множества $A \backslash A_0$ не превосходят 1, граф $G(\operatorname{supp}(h_{1i}) \cup \operatorname{supp}(h_{2i}))$ не может быть звездой. Следовательно, граф $\overline{G}(\operatorname{supp}(h_{1i}) \cup \operatorname{supp}(h_{2i}))$ односвязный, но в этом случае из истинности формулы $\mathrm{X}(p; f_1, \dots, f_k, h_{11}, \dots, h_{1p}, h_{21}, \dots, h_{2p})$ следует $h_{1i} \backsim h_{2i}$. что противоречит (8).

Таким образом, $|\mathrm{supp}(h_{1i}) \cup \mathrm{supp}(h_{2i})| = 2$, причем в силу (8) оба элемента множества $\mathrm{supp}(h_{1i}) \cup \mathrm{supp}(h_{2i})$ лежат в одной двухвершинной компоненте связности графа G.

Пусть теперь $A^* = \varnothing$. В этом случае $|A| = 2p \geqslant 4$ и формула $\Lambda(G; p)$ принимает вид

$$\Lambda(G;p) = \exists z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1p}, z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2p}\ \mathrm{X}_0(p; z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1p}, z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2p}),$$

где

$$\mathrm{X}_0(p; z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1p}, z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2p}) = \\ = \bigwedge_{i=1}^{p} [z_{1i}, z_{2i}] = 0 \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant p \\ i \neq j}} [[z_{1i}, z_{1j}], [z_{1i}, z_{2j}]] \neq 0 \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant p \\ i \neq j}} [[z_{2i}, z_{1j}], [z_{2i}, z_{2j}]] \neq 0.$$

Пусть формула $\mathrm{X}_0(p; h_{11}, h_{12}, \dots, g_{1p}, h_{21}, h_{22}, \dots, h_{2p})$ истинна для некоторых элементов $h_{11}, h_{12}, \dots, g_{1p}, h_{21}, h_{22}, \dots, h_{2p} \in \mathcal{L}(A; G)$.

Из формулы $\mathrm{X}_0(p; h_{11}, h_{12}, \dots, g_{1p}, h_{21}, h_{22}, \dots, h_{2p})$ следует, что $[h_{1j}, h_{2j}] = 0$. Если $|\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j})| \geqslant 3$, то граф $\overline{G}(\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j}))$ односвязный, так как в противном случае в силу леммы 3.2 граф $G(\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j}))$ является звездой, а значит в нем есть вершина степени не меньшей, чем 2, что противоречит строению графа G. Из односвязности графа $\overline{G}(\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j}))$ в силу теоремы 2.10 хотя бы один из элементов h_{1j} и h_{2j} равен 0 в алгебре $\mathcal{L}(A; G)$ или $h_{1j} \backsim h_{2j}$. Соответственно, либо какие-то из произведений $[h_{1i}, h_{1j}]$, $[h_{1i}, h_{2j}]$, $[h_{2i}, h_{1j}]$, $[h_{2i}, h_{2j}]$ равны нулю, либо $[h_{1i}, h_{1j}] \backsim [h_{1i}, h_{2j}]$ и $[h_{2i}, h_{1j}] \backsim [h_{2i}, h_{2j}]$. В обоих случаях $[[h_{1i}, h_{1j}], [h_{1i}, h_{2j}]] = [[h_{2i}, h_{1j}], [h_{2i}, h_{2j}]] = 0$, что противоречит истинности формулы $\mathrm{X}_0(p; h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1p}, h_{21}, h_{22}, \dots, h_{2p})$. Следовательно, $|\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j})| \leqslant 2$. В силу произвольности выбора j получаем $|\mathrm{supp}(h_{1j})| \leqslant 2$ и $|\mathrm{supp}(h_{2j})| \leqslant 2$ для всех $j = 1, 2, \dots, p$.

Если $|\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j})| = 2$ и элементы множества $\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j})$ не смежны в графе G или $|\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j})| = 1$, то граф $\overline{G}(\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j}))$ односвязный и снова из теоремы 2.10 либо один из элементов h_{1j} и h_{2j} равен 0 в алгебре $\mathcal{L}(A; G)$, либо $h_{1j} \backsim h_{2j}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям в случае $|\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j})| \geqslant 3$. Снова получаем противоречие с истинностью формулы $\mathrm{X}_0(p; h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1p}, h_{21}, h_{22}, \dots, h_{2p})$.

Таким образом, $|\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j})| = 2$ и вершины множества $\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j})$ смежны в графе G. Пусть $\mathrm{supp}(h_{1j}) \cup \mathrm{supp}(h_{2j}) = \{b_{j1}, b_{j_2}\}$. Тогда $h_{1j} = \alpha_{j1} b_{j1} + \alpha_{j2} b_{j2}$, $h_{2j} = \beta_{j1} b_{j1} + \beta_{j2} b_{j2}$, где $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \beta_{j1}, \beta_{j2} \in R$, причем из истинности формулы $\mathrm{X}_0(p; h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1p}, h_{21}, h_{22}, \dots, h_{2p})$ следует $[[h_{1i}, h_{1j}], [h_{1i}, h_{2j}]] \neq 0$. Следовательно $h_{1j} \neq 0$, $h_{2j} \neq 0$ и $h_{1j} \not\backsim h_{2j}$, откуда простыми вычислениями получаем $\alpha_{j1}\beta_{j_2} - \alpha_{j2}\beta_{j1} \neq 0$.

Осталось отметить, что если $i \neq j$, то $b_{ir} \neq b_{jq}$ для $r, q \in \{1, 2\}$. Действительно, из $[[h_{1i}, h_{1j}], [h_{1i}, h_{2j}]] \neq 0$ следует $[h_{1i}, h_{1j}] \neq 0$. Получаем

$$[\alpha_{i1} b_{i1} + \alpha_{i2} b_{i2}, \alpha_{j1} b_{j1} + \alpha_{j2} b_{j2}] = \\ = \alpha_{i1}\alpha_{j1}[b_{i1}, b_{j1}] + \alpha_{i1}\alpha_{j2}[b_{i1}, b_{j2}] + \alpha_{i2}\alpha_{j1}[b_{i2}, b_{j1}] + \alpha_{i2}\alpha_{j2}[b_{i2}, b_{j2}],$$

следовательно, $[b_{ir}, b_{jq}] \neq 0$ для некоторых $r, q \in \{1,2\}$. Из строения графа G следует, что пары вершин b_{i1}, b_{i2} и b_{j1}, b_{j2} образуют разные двухвершинные компоненты связности. Так как приведенные рассуждения не зависят от значений i и j, каждой паре элементов h_{1j}, h_{2j} соответствует своя компонента связности графа G, а значит таких компонент связности в графе G не меньше p. $\square$

Таким образом, получаем следующий критерий универсальной эквивалентности частично коммутативных алгебр Ли соответствующего класса.

Теорема 5.4. *Пусть $G = \langle A; E\rangle$ и $H = \langle B; F\rangle$ — конечные графы без треугольников и квадратов и без изолированных вершин. Частично коммутативные алгебры Ли $\mathcal{L}(A;G)$ и $\mathcal{L}(B;H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда графы G^* и H^* изоморфны, а количество двухвершинных компонент связности в графах G и H одинаково.*

Доказательство. Пусть алгебры $\mathcal{L}(A;G)$ и $\mathcal{L}(B;H)$ универсально эквивалентны.

Если $A^* \neq \varnothing$ и $B^* \neq \varnothing$, то как в доказательстве теоремы 4.6, в силу леммы 4.1 $\mathcal{L}(A;G) \models \Phi(G)$. Так как алгебры $\mathcal{L}(A;G)$ и $\mathcal{L}(B;H)$ универсально эквивалентны, $\mathcal{L}(B;H) \models \Phi(G)$. Тогда по лемме 4.4 граф G^* изоморфен некоторому подграфу графа H^* — некоторому подграфу графа G^*. Следовательно, графы G^* и H^* изоморфны.

Пусть одно из множеств A^* или B^* пусто. Без ограничения общности можно считать, что $B^* = \varnothing$. Опять по лемме 4.1 $\mathcal{L}(A;G) \models \Phi(G)$. Следовательно, $\mathcal{L}(B;H) \models \Phi(G)$, но тогда G^* изоморфно вкладывается в H^*. Противоречие.

Таким образом из универсальной эквивалентности алгебр $\mathcal{L}(A;G)$ и $\mathcal{L}(B;H)$ следует, что $G^* \simeq H^*$. Отсюда следует, что

$$\Psi(G; x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_k) = \Psi(H; x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_k).$$

Пусть в графах G и H соответственно p_1 и p_2 двухвершинных компонент связности. Пусть $p_1 > p_2$. Тогда, как следует из лемм 4.1 и 5.1, в алгебре Ли $\mathcal{L}(A;G)$ истинно предложение $\Lambda(G; p_1)$. Тогда в силу универсальной эквивалентности рассматриваемых алгебр Ли это предложение истинно также и в алгебре Ли $\mathcal{L}(B;H)$. В силу леммы 5.3 в графе H не менее p_1 двухвершинных компонент связности, что противоречит нашему предположению. Доказательство невозможности случая $p_2 > p_1$ аналогично. Следовательно, $p_1 = p_2$.

Доказательство обратного утверждения дословно повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 4.6. $\square$

References

[1] P. Cartier, D. Foata, *Problems combinatorics de computation et rearrangements*, Lecture Notes in Mathematics, **85**, Springer-Verlag, Berlin, 1969. Zbl 0186.30101

[2] H. Servatius, *Automorphisms of graph groups*, J. Algebra, **126**:1 (1989), 34-–60. Zbl 0682.20022

[3] G. Duchamp, D. Krob, *The lower central ceries of the free partially commutative group*, Semigroup Forum, **45**:3 (1992), 385-–394. Zbl 0814.20025

[4] A.J. Duncan, I.V. Kazachkov, V.N. Remeslennikov, *Parabolic and quasiparabolic subgroups of free partially commutative groups*, J. Algebra, **318**:2 (2007), 918–932. Zbl 1183.20026

[5] E.I. Timoshenko, *A Mal'tsev basis for a partially commutative nilpotent metabelian group*, Algebra Logic, **50**:5 (2011), 439–446. Zbl 1259.20035

[6] Ch.K. Gupta, E.I. Timoshenko, *Partially commutative metabelian groups: centralizers and elementary equivelence*, Algebra Logic, **48**:3 (2009), 173–192. Zbl 1245.20032

[7] E.I. Timoshenko, *Universal equivalence of partially commutative metabelian groups*, Algebra Logic, **49**:2 (2010), 177–196. Zbl 1220.20024

[8] Ch.K. Gupta, E.I. Timoshenko, *Universal Theories for Partially Commutative Metabelian Groups*, Algebra Logic, **50**:1 (2011), 1–16. Zbl 1263.20032

[9] K.H. Kim, F.W. Roush, *Homology of certain algebrais defined by graphs*, J. Pure Appl. Algebra, **17**:2 (1980), 179–186. Zbl 0444.05066

[10] K.H. Kim, L. Makar-Limanov, J. Neggers, F.W. Roush, *Graph algebras*, J. Algebra, **64** (1980), 46–51. Zbl 0431.05023

[11] G. Duchamp, D. Krob, *The Free Partially Commutative Lie Algebra: Bases and Ranks*, Adv. Math., **95**:1 (1992), 92–126. Zbl 0763.17003

[12] E.N. Poroshenko, *Bases for partially commutative Lie algebras*, Algebra Logic, **50**:5 (2011), 405–417. Zbl 1290.17003

[13] E.N. Poroshenko, *Centralizers in partially commutative Lie algebras*, Algebra Logic, **51**:4 (2012), 351–371. Zbl 1286.17005

[14] E. Poroshenko, E. Timoshenko, *Universal Equivalence of Partially Commutative Metabelian Lie Algebras*, J. Algebra, **384** (2013), 143–168. Zbl 1318.17009

[15] E.N. Poroshenko, *On universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras*, Comm. Algebra, **43**:2 (2015), 746–762. Zbl 1318.17008

[16] E.N. Poroshenko, *Universal equivalence of partially commutative Lie algebras*, Algebra Logic, **56**:2 (2017), 133–148. Zbl 1431.03050

[17] E.N. Poroshenko, *Universal equivalence of some countably generated partially commutative structures*, Sib. Math. J., **58**:2 (2017), 296–304. Zbl 1419.17009

[18] M. Hall, *A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups*, Proc. Am. Math. Soc., **1** (1950), 575–581. Zbl 0039.26302

[19] A.I. Shirshov, *Subalgebras of free Lie algebras*, Math. sb., **33(75)**:2 (1953), 441–452. Zbl 0052.03004

[20] A.I. Shirshov, *On Free Lie Rings*, Math. sb., **45(87)**:2 (1958), 113–122. Zbl 0080.25503

Evgeny Nikolaevich Poroshenko
Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marx ave.,
Novosibirsk, 630073, Russia
Email address: auto_stoper@ngs.ru