S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 873–889 (2020) УДК 519.117, 519.156, 519.11
DOI 10.33048/semi.2020.17.064 MSC 05A99

КОМБИНАТОРНЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С СОБИРАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ Ф. ХОЛЛА

В.М. ЛЕОНТЬЕВ

Abstract. Let $M_1, \dots, M_r$ be nonempty subsets of any totally ordered set. Imposing some restricitons on these subsets, we find an expression for the number of elements $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in M_1 \times \dots \times M_r$ that satisfy the condition C, where C is a propositional formula consisting of such conditions as $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i < \lambda_j$, $i, j \in \overline{1, r}$.

Keywords: collection process, Cartesian product, binary weight.

1. Введение

Ф. Холл в работе [1] доказал следующую теорему. Пусть для любых двух элементов x и y произвольной группы G коммутаторы $R_1, R_2, \dots, R_i, \dots$ от x и y записаны в порядке возрастания весов (порядок среди коммутаторов одинакового веса произволен). Тогда для любого натурального n имеет место формула

$$(xy)^n = x^n y^n {R_3}^{f_3(n)} \cdots {R_i}^{f_i(n)} \cdots, \tag{1}$$

где показатели степеней коммутаторов могут быть представлены в виде

$$f_i(n) = a_1 \binom{n}{1} + \dots + a_w \binom{n}{w}, \tag{2}$$

Leontiev, V.M., Combinatorial problems connected with P. Hall's collection process.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Поступила 7 августа 2019 г., опубликована 30 июня 2020 г.

здесь w — вес коммутатора R_i, а целые неотрицательные коэффициенты a_k зависят только от R_i, но не от n. Для теории конечных p-групп важным следствием представления (2) является делимость показателей $f_i(n)$ на число n, когда n простое и вес коммутатора меньше n.

Пусть C — произвольное условие, получающееся с помощью логического сложения и умножения условий типа $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i < \lambda_j$ (далее мы будем называть подобные условия L-условиями). Ключевым моментом в доказательстве теоремы о собирательной формуле Холла было утверждение (см. [1, теорема 3.25] или [2, лемма 12.3.1]) о том, что количество элементов множества

$$\{1,\dots,n\}^r = \{(\lambda_1,\dots,\lambda_r) \mid \lambda_i \in \{1,\dots,n\}, i \in \overline{1,r}\}, \qquad r, n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

которые удовлетворяют условию C, выражается в виде

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \binom{n}{i}, \tag{4}$$

где целые неотрицательные коэффициенты a_i зависят только от C.

В настоящей работе мы обобщили этот результат (теорема 2). Во-первых, вместо декартовой степени множества целых чисел $\{1,\dots,n\}$ мы рассматриваем декартово произведение непустых подмножеств произвольного линейно упорядоченного множества, удовлетворяющих некоторым ограничениям. Во-вторых, L-условия мы определяем как произвольные формулы алгебры высказываний, составленные из высказываний типа $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i < \lambda_j$.

Обозначим через $\omega(i)$ функцию бинарного веса числа (количество единиц в двоичной записи целого неотрицательного числа i). В работе [4] было выявлено, что с помощью функции ω можно параметризовать несобранную часть собирательной формулы Холла. Оказывается, что степени некоторых серий коммутаторов, входящих в собранную часть собирательной формулы, выражаются через мощность множества элементов $(\mu_1,\dots,\mu_r)$ декартова произведения $\{0,\dots,2^m-1\}^r$, удовлетворяющих некоторому L-условию C и ограничениям $\omega(\mu_i) = u_i$, $i \in \overline{1,r}$. В заключительной части статьи показано (теорема 3), что число решений возникающей системы допускает представление в виде

$$\sum_{i=0}^{u_1+\dots+u_r} a_i \binom{m}{i}, \qquad a_i \in \mathbb{N}_0. \tag{5}$$

Переход к системе позволил в ряде случаев найти выражения для коэффициентов a_i из (5) и дать их комбинаторную интерпретацию (теорема 4). Как следствие этих результатов, доказано комбинаторное тождество (теорема 5), позволяющее преобразовать некоторые выражения для показателей степеней коммутаторов к виду (2), например, выражение, полученное в работе [3] (предложение 4).

2. Определение L-условий и связанных с ними понятий

В этом разделе мы строго определим понятие L-условия и введем отношение эквивалентности на множестве всех L-условий. Далее, получив ряд отношений L-условий, мы докажем возможность выбора представителя в каждом классе эквивалентности, записанного в ДНФ без операции отрицания.

Определение 1. *Обозначим через L множество всех формул алгебры высказываний, в которых каждая пропозициональная переменная заменена на предикатные символы $[\lambda_i < \lambda_j]$ или $[\lambda_i = \lambda_j]$, где $i, j \in \mathbb{N}$.*

Определение 2. *Произвольный элемент $C \in L$ будем называть L-условием ранга r, $r \in \mathbb{N}$, если формула C содержит в своей записи хотя бы один из следующих предикатных символов: $[\lambda_i < \lambda_r]$, $[\lambda_r < \lambda_i]$, $[\lambda_i = \lambda_r]$, $[\lambda_r = \lambda_i]$, $i \in \mathbb{N}$, и не содержит предикатных символов $[\lambda_i < \lambda_j]$ и $[\lambda_i = \lambda_j]$, где $i > r$ или $j > r$. Логические константы 0 и 1 будем называть L-условиями ранга ноль.*

Пример 1. L-условия рангов 1, 2 и 3, соответственно:

$$\neg[\lambda_1 = \lambda_1] \to [\lambda_1 < \lambda_1]; \quad ([\lambda_1 = \lambda_1] \wedge [\lambda_2 = \lambda_2]) \oplus 1; \quad [\lambda_2 = \lambda_3] \leftrightarrow [\lambda_3 = \lambda_2].$$

Символ $\oplus$ обозначает сложение по модулю 2.

Пусть M — произвольное непустое множество с введенными на нем отношениями равенства «$=_1$» и строгого линейного порядка «$<_1$». Тогда любое L-условие C ранга не выше r можно интерпретировать как r-местный предикат на любом непустом декартовом произведении $M_1 \times \cdots \times M_r \subseteq M \times \cdots \times M$. При этом, двуместные предикатные символы $[\lambda_i < \lambda_j]$ и $[\lambda_i = \lambda_j]$, $i, j \in \overline{1, r}$, определяются очевидным образом:

$$[\lambda_i = \lambda_j]\Big|_{\substack{\lambda_i = \lambda_i^* \\ \lambda_j = \lambda_j^*}} = \begin{cases} 1, \text{если } \lambda_i^* =_1 \lambda_j^*, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases} \qquad [\lambda_i < \lambda_j]\Big|_{\substack{\lambda_i = \lambda_i^* \\ \lambda_j = \lambda_j^*}} = \begin{cases} 1, \text{если } \lambda_i^* <_1 \lambda_j^*, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Далее будем говорить, что набор элементов $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*) \in M_1 \times \cdots \times M_r$ удовлетворяет L-условию C, если $C(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*) = 1$, т.е. набор $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*)$ реализует истинное значение предиката $C = C(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$.

Пример 2. L-условие $A(\lambda_1, \lambda_2) = [\lambda_1 < \lambda_2]$ на множестве натуральных чисел $\{1, 2\}^2$ принимает следующие значения:

$$A(1,1) = A(2,1) = A(2,2) = 0, \quad A(1,2) = 1.$$

Отсюда можем заключить, что L-условие A тождественно ложно на $\{1\}^2$ и не является таковым на множестве $\{1, 2\}^2$.

Предложение 1. *Пусть M и N — произвольные линейно упорядоченные множества, причем M не менее чем счетно. Если некоторое L-условие ранга не выше r тождественно истинно на множестве M^r, то оно тождественно истинно на N^r.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный набор $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*) \in N^r$ со значениями компонент: $v_1 < \cdots < v_s$, $1 \leqslant s \leqslant r$, и покажем, что $C(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*) = 1$. Поскольку M бесконечно и любые два конечных линейно упорядоченных множества одинаковой мощности изоморфны, можем построить инъективное отображение $f : \{v_1, \ldots, v_s\} \to M$, сохраняющее линейный порядок. Поэтому, положив

$$\lambda_i^{**} = f(v_j) \Leftrightarrow \lambda_i^* = v_j, \quad i \in \overline{1, r},$$

будем иметь для $i, j \in \overline{1, r}$ следующие равенства:

$$[\lambda_i = \lambda_j]\Big|_{\substack{\lambda_i = \lambda_i^* \\ \lambda_j = \lambda_j^*}} = [\lambda_i = \lambda_j]\Big|_{\substack{\lambda_i = \lambda_i^{**} \\ \lambda_j = \lambda_j^{**}}}; \quad [\lambda_i < \lambda_j]\Big|_{\substack{\lambda_i = \lambda_i^* \\ \lambda_j = \lambda_j^*}} = [\lambda_i < \lambda_j]\Big|_{\substack{\lambda_i = \lambda_i^{**} \\ \lambda_j = \lambda_j^{**}}}.$$

Таким образом, $C(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*) = C(\lambda_1^{**}, \ldots, \lambda_r^{**}) = 1$. $\square$

Определение 3. *Будем говорить, что два L-условия C_1 и C_2 эквивалентны, и писать $C_1 \sim C_2$, если для любого линейно упорядоченного множества M L-условие $C_1 \leftrightarrow C_2$ тождественно истинно на M^r. Ввиду предложения 1 достаточно проверить тождественную истинность, например, при $M = \mathbb{N}$.*

Пример 3. Справедливы следующие отношения L-условий:

$$[\lambda_1 = \lambda_2] \vee [\lambda_3 < \lambda_4] \sim [\lambda_3 < \lambda_4] \vee [\lambda_1 = \lambda_2], \quad [\lambda_1 = \lambda_2] \sim [\lambda_1 = \lambda_2] \wedge [\lambda_3 = \lambda_3].$$

Пусть C_1 и C_2 — два эквивалентных L-условия рангов r и s, соответственно, $r \leqslant s$. Из определения 3 ясно, что $C_1(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_s^*) = C_2(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_s^*)$ для любых элементов $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_s^*$ произвольного линейно упорядоченного множества. Более того, справедливо правило замены: если A есть подформула L-условия C, и $A \sim B$, то замена A на B в C приведет к L-условию эквивалентному C.

Отметим также, что не все эквивалетности L-условий можно получить по правилу замены или путем использования свойств логических операций (коммутативность дизъюнкции и т.п.).

Предложение 2. *Для любых натуральных $i, j, k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие отношения L-условий:*

(6) $\quad [\lambda_i = \lambda_i] \sim 1;$

(7) $\quad [\lambda_i = \lambda_j] \sim [\lambda_j = \lambda_i];$

(8) $\quad [\lambda_i = \lambda_j] \wedge [\lambda_j = \lambda_k] \sim [\lambda_i = \lambda_j] \wedge [\lambda_j = \lambda_k] \wedge [\lambda_i = \lambda_k];$

(9) $\quad [\lambda_i < \lambda_j] \wedge [\lambda_j < \lambda_k] \sim [\lambda_i < \lambda_j] \wedge [\lambda_j < \lambda_k] \wedge [\lambda_i < \lambda_k];$

(10) $\quad [\lambda_i < \lambda_j] \oplus [\lambda_j < \lambda_i] \oplus [\lambda_i = \lambda_j] \oplus ([\lambda_i < \lambda_j] \wedge [\lambda_j < \lambda_i] \wedge [\lambda_i = \lambda_j]) \sim 1.$

Кроме того, из (6)-(10) следуют эквивалентности:

(11) $\quad [\lambda_i < \lambda_i] \sim 0;$

(12) $\quad [\lambda_i < \lambda_j] \wedge [\lambda_j < \lambda_i] \sim 0;$

(13) $\quad \neg[\lambda_i = \lambda_j] \sim [\lambda_i < \lambda_j] \vee [\lambda_j < \lambda_i];$

(14) $\quad \neg[\lambda_i < \lambda_j] \sim [\lambda_j < \lambda_i] \vee [\lambda_j = \lambda_i].$

Доказательство. Отношения (6)-(8) следуют из аксиом равенства: рефлексивности, симметричности и транзитивности, соответственно. А из аксиом транзитивности и трихотомии строгого линейного порядка следуют отношения (9) и (10), соответственно. Напомним, что любое отношение со свойствами транзитивности и трихотомии является антирефлексивным и асимметричным.

Выведем из (6)-(10) отношения (11) и (12) при помощи логических преобразований и правила замены. Используем (10) при $j = i$, затем (6):

$$\begin{aligned} [\lambda_i < \lambda_i] &\sim [\lambda_i < \lambda_i] \wedge 1 \sim \\ &\sim [\lambda_i < \lambda_i] \wedge \Big([\lambda_i = \lambda_i] \oplus ([\lambda_i < \lambda_i] \wedge [\lambda_i = \lambda_i])\Big) \sim \\ &\sim [\lambda_i < \lambda_i] \wedge (1 \oplus [\lambda_i < \lambda_i]) \sim \\ &\sim [\lambda_i < \lambda_i] \oplus [\lambda_i < \lambda_i] \sim 0. \end{aligned}$$

Из (9) при $k = i$ и (11) следует

$$[\lambda_i < \lambda_j] \wedge [\lambda_j < \lambda_i] \sim [\lambda_i < \lambda_j] \wedge [\lambda_j < \lambda_i] \wedge [\lambda_i < \lambda_i] \sim 0.$$

Читателю не составит труда вывести отношения (13) и (14) по аналогии с предыдущими, используя (10) и (12). □

Из отношений (13) и (14) следует

Предложение 3. *В каждом классе эквивалентности множества всех L-условий можно выбрать формулу, записанную в ДНФ без операции отрицания.*

Заметим, что для любого L-условия можно найти эквивалентное ему L-условие большего ранга. Обратное, вообще говоря, неверно.

3. О количестве элементов декартова произведения, удовлетворяющих произвольному L-условию

Пусть $M_1 \times \dots \times M_r$ — декартово произведение произвольных непустых подмножеств некоторого линейно упорядоченного множества. Следуя идее Ф. Холла, мы покажем, что множество $M_1 \times \dots \times M_r$ можно разбить на попарно не пересекающиеся классы таким образом, что для любого L-условия C либо все элементы произвольного класса удовлетворяют C, либо ни один из них (теорема 1, лемма 1). Вычислив мощности этих классов (лемма 3), мы найдем выражение для количества элементов $M_1 \times \dots \times M_r$, удовлетворяющих произвольному L-условию (теорема 2).

Пусть $v_1 < \dots < v_t$ — все различные значения компонент произвольного набора $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in M_1 \times \dots \times M_r$, $1 \leqslant t \leqslant r$. Положим $I_k = \{i \mid \lambda_i = v_k\}$ для k от 1 до t. Тогда набор $(I_1, \dots, I_t)$ есть упорядоченное разбиение множества индексов $\{1, \dots, r\}$, т.е.

$$\{1, \dots, r\} = I_1 \cup \dots \cup I_t, \quad I_i \cap I_j = \varnothing \Leftrightarrow i \neq j.$$

Таким образом, любому набору из $M_1 \times \dots \times M_r$ соответствует единственное упорядоченное разбиение $\{1, \dots, r\}$, откуда вытекает утверждение следующей теоремы.

Теорема 1. *Декартово произведение $M_1 \times \dots \times M_r$, составленное из непустых подмножеств произвольного линейно упорядоченного множества, представимо в виде объединения попарно непересекающихся классов:*

$$M_1 \times \dots \times M_r = \bigcup_{t=1}^{r} \bigcup_{\substack{I_1 \cup \ldots \cup I_t = \{1,\ldots,r\} \\ I_i \cap I_j = \varnothing \Leftrightarrow i \neq j}} \left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \ldots, I_t)} \right\rangle,$$

где класс $\left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \ldots, I_t)} \right\rangle$ состоит из всех наборов $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in M_1 \times \dots \times M_r; \\ \lambda_i = \lambda_j \Leftrightarrow \exists k\, (i \in I_k) \wedge (j \in I_k); \\ \lambda_i < \lambda_j \Leftrightarrow \exists p\, \exists q\, (i \in I_p) \wedge (j \in I_q) \wedge (p < q). \end{cases}$$

Пример 4. Пусть декартово произведение $M_1 \times M_2$ составлено из подмножеств целых чисел $M_1 = \{0,1,2\}$ и $M_2 = \{0,1,2,3\}$. Имеют место равенства:

$$\left\langle {M_1 \times M_2 \atop (\{1,2\})} \right\rangle = \{(0,0),(1,1),(2,2)\};$$

$$\left\langle {M_1 \times M_2 \atop (\{1\},\{2\})} \right\rangle = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\};$$

$$\left\langle {M_1 \times M_2 \atop (\{2\},\{1\})} \right\rangle = \{(1,0),(2,0),(2,1)\}.$$

Лемма 1. *Пусть C — произвольное L-условие ранга не выше r. Тогда для любого упорядоченного разбиения $(I_1,\ldots,I_t)$ множества $\{1,\ldots,r\}$ либо каждый элемент класса $\left\langle {M_1 \times \cdots \times M_r \atop (I_1,\ldots,I_t)} \right\rangle$ удовлетворяет C, либо ни один из них.*

Доказательство. Для L-условий ранга 0 утверждение леммы очевидно. Далее положим ранг C больше нуля. По определению $\left\langle {M_1 \times \cdots \times M_r \atop (I_1,\ldots,I_t)} \right\rangle$ все наборы $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ из этого класса удовлетворяют фиксированному упорядочению компонент $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$. Поэтому мы можем построить L-условие ранга r, соответствующее этому упорядочению, следующим образом:

$$K = \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant r}} K_{ij}, \quad K_{ij} = \begin{cases} [\lambda_i < \lambda_j], \text{ если } \lambda_i < \lambda_j; \\ [\lambda_i = \lambda_j], \text{ если } \lambda_i = \lambda_j; \\ 1, \text{ если } \lambda_i > \lambda_j. \end{cases}$$

Далее, ввиду предложения 3 условие C можно привести к ДНФ вида

$$C \sim \bigvee_{i=1}^{s} (C_{i1} \wedge \cdots \wedge C_{ik_i}),$$

где C_{uv} — предикаты типа $[\lambda_i < \lambda_j]$ или $[\lambda_i = \lambda_j]$. Предположим, что в классе $\left\langle {M_1 \times \cdots \times M_r \atop (I_1,\ldots,I_t)} \right\rangle$ нашелся набор $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_r^*)$, удовлетворяющий условию C. Тогда $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_r^*)$ удовлетворяет каждому конъюнкту некоторого дизъюнкта $C_{j1} \wedge \cdots \wedge C_{jk_j}$. Значит, каждый предикат из $C_{j1},\ldots,C_{jk_j}$ обязательно встретится в K. Таким образом, любой набор из класса $\left\langle {M_1 \times \cdots \times M_r \atop (I_1,\ldots,I_t)} \right\rangle$ удовлетворяет дизъюнкту $C_{j1} \wedge \cdots \wedge C_{jk_j}$, а следовательно, условию C. □

Лемма 2. *Пусть $\{N_i\}_{i=1}^t$ — семейство конечных непустых подмножеств некоторого линейно упорядоченного множества. Если*

$$N = N_1 \cap \cdots \cap N_t \neq \varnothing; \qquad [\min N, \max N] \cap (N_i \backslash N) = \varnothing, \quad i \in \overline{1,t},$$

то мощность множества

$$V = \{(v_1,\ldots,v_t) \in N_1 \times \cdots \times N_t \mid v_1 < \cdots < v_t\}$$

равна

$$\binom{|N|}{t} + b_{t-1}\binom{|N|}{t-1} + \cdots + b_1\binom{|N|}{1} + b_0\binom{|N|}{0}, \tag{15}$$

где b_s — целые неотрицательные коэффициенты, зависящие от $N_1,\ldots,N_t$. Более того, если $N \in \{N_i\}_{i=1}^t$, то $b_0 = 0$, а при $N_1 = \cdots = N_t$ все b_s равны нулю.

Доказательство. Разобьем множество V на попарно не пересекающиеся классы $V_0, \dots, V_t$ по следующему правилу: $(v_1, \dots, v_t) \in V_s$ тогда и только тогда, когда среди $v_1, \dots, v_t$ найдется ровно s компонент, значения которых принадлежат N. Ввиду условий:

$$v_1 < \dots < v_t; \qquad [\min N, \max N] \cap (N_i \backslash N) = \varnothing, \quad i \in \overline{1, t},$$

справедливо утверждение: если $i < j < k$ и $v_i, v_k \in N$, то $v_j \in N$. Значит, для любого набора $(v_1, \dots, v_t) \in V_s$ существует k от 0 до $t - s$ такое, что $\underline{v_{k+1}, \dots, v_{k+s}} \in N$. При этом $v_i < \min N$ для $i \in \overline{1, k}$, и $v_i > \max N$ для $i \in \overline{k + s + 1, t}$. Таким образом, имеет место равенство

$$|V_s| = \sum_{k=0}^{t-s} c_k d_k e_k,$$

где d_k, c_k, e_k равны, соответственно, мощностям множеств

$$\{(v_{k+1}, \dots, v_{k+s}) \in V | v_{k+1}, \dots, v_{k+s} \in N\},$$

$$\{(v_1, \dots, v_k) \in V | v_k < \min N\}, \{(v_{k+s+1}, \dots, v_t) \in V | \max N < v_{k+s+1}\}.$$

Нетрудно видеть, что d_k равно числу сочетаний из $|N|$ по s для любого k от 1 до $t - s$, поэтому

$$|V_s| = \binom{|N|}{s} \sum_{k=0}^{t-s} c_k e_k = \binom{|N|}{s} b_s.$$

В итоге, имеем

$$|V| = |V_t| + \dots + |V_0| = b_t \binom{|N|}{t} + b_{t-1} \binom{|N|}{t-1} + \dots + b_1 \binom{|N|}{1} + b_0 \binom{|N|}{0},$$

где, как легко проверить, $b_t = 1$.

Предположим, что $N = N_k$ для некоторого k. Тогда в любом наборе из V значение компоненты v_k принадлежит пересечению N, а значит, $b_0 = |V_0| = 0$. Рассуждая аналогично, если $N_1 = \dots = N_t$, то $b_{t-1} = \dots = b_0 = 0$. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $\{M_i\}_{i=1}^r$ *— семейство конечных непустых подмножеств некоторого линейно упорядоченного множества. Если*

$$M = M_1 \cap \dots \cap M_r \neq \varnothing; \qquad [\min M, \max M] \cap (M_i \backslash M) = \varnothing, \quad i \in \overline{1, r},$$

то для любого упорядоченного разбиения $(I_1, \dots, I_t)$ *множества* $\{1, \dots, r\}$ *имеет место равенство*

$$\left|\left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \dots, I_t)} \right\rangle\right| = \binom{|M|}{t} + b_{t-1} \binom{|M|}{t-1} + \dots + b_1 \binom{|M|}{1} + b_0 \binom{|M|}{0}, \tag{16}$$

где b_s *— целые неотрицательные коэффициенты, зависящие от* $M_1, \dots, M_r$ *и* $(I_1, \dots, I_t)$. *Более того, если* $M \in \{M_i\}_{i=1}^r$, *то* $b_0 = 0$, *а при* $M_1 = \dots = M_r$ *все* b_s *равны нулю.*

Доказательство. Из определения класса $\left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \dots, I_t)} \right\rangle$ следует, что его мощность равна мощности множества

$$V = \{(v_1, \dots, v_t) \mid v_1 < \dots < v_t; v_i \in \bigcap_{j \in I_i} M_j, i = 1, \dots, t\},$$

где, как нетрудно заметить,

$$\bigcap_{i=1}^{t} \bigcap_{j \in I_i} M_j = M \neq \varnothing.$$

Из условий леммы и свойств операций пересечения и разности множеств следуют равенства

$$\varnothing = \bigcap_{j \in I_i} [\min M, \max M] \cap (M_j \backslash M) = [\min M, \max M] \cap \left(\left(\bigcap_{j \in I_i} M_j \right) \backslash M \right)$$

для любого i от 1 до t. Таким образом, множество V удовлетворяет условиям предыдущей леммы и мы получаем равенство (16).

Предположим, что $M = M_k$ для некоторого k от 1 до r. Тогда найдется такое i, что $k \in I_i$, а следовательно,

$$\bigcap_{j \in I_i} M_j = M = \bigcap_{i=1}^{t} \bigcap_{j \in I_i} M_j,$$

и мы попадаем в условия предыдущей леммы. Аналогично, если $M_1 = \cdots = M_r$, то

$$\bigcap_{j \in I_1} M_j = \cdots = \bigcap_{j \in I_t} M_j.$$

$\square$

Теорема 2. *Пусть $M_1, \ldots, M_r$ — непустые конечные подмножества некоторого линейно упорядоченного множества, C — произвольное L-условие ранга не выше r. Если выполнены условия:*

$$M = M_1 \cap \cdots \cap M_r \neq \varnothing; \qquad [\min M, \max M] \cap (M_i \backslash M) = \varnothing, \quad i \in \overline{1, r};$$

то количество элементов из $M_1 \times \cdots \times M_r$, удовлетворяющих условию C, выражается в виде

$$\sum_{t=1}^{r} a_t \binom{|M|}{t} + \sum_{t=0}^{r-1} b_t \binom{|M|}{t}, \tag{17}$$

где a_s, b_s — целые неотрицательные коэффициенты, b_s зависят от $M_1, \ldots, M_r$ и C, a_s зависят только от C. Более того, если $M \in \{M_i\}_{i=1}^{r}$, то $b_0 = 0$, а при $M_1 = \cdots = M_r$ все b_s равны нулю.

Доказательство. Обозначим через $C_{M_1 \times \cdots \times M_r}$ множество всех элементов из $M_1 \times \cdots \times M_r$, удовлетворяющих условию C. Согласно теореме 1 и лемме 1 $C_{M_1 \times \cdots \times M_r}$ является объединением классов $\left\langle {M_1 \times \cdots \times M_r \atop (I_1, \ldots, I_t)} \right\rangle$, удовлетворяющих C. Обозначив за P_t множество всех разбиений $(I_1, \ldots, I_t)$, соответствующих таким классам, из теоремы 1 и предыдущей леммы получаем равенства

$$|C_{M_1 \times \cdots \times M_r}| = \sum_{t=1}^{r} \sum_{(I_1, \ldots, I_t) \in P_t} \left| \left\langle {M_1 \times \cdots \times M_r \atop (I_1, \ldots, I_t)} \right\rangle \right| =$$

$$= \sum_{t=1}^{r} \sum_{(I_1, \ldots, I_t) \in P_t} \left(\binom{|M|}{t} + \sum_{j=0}^{t-1} B_j \left(\left\langle {M_1 \times \cdots \times M_r \atop (I_1, \ldots, I_t)} \right\rangle \right) \binom{|M|}{j} \right).$$

После упрощения и приведения подобных будем иметь

$$|C_{M_1\times\dots\times M_r}| = \sum_{t=1}^{r} |P_t| \binom{|M|}{t} + \sum_{t=1}^{r}\sum_{j=0}^{t-1} \binom{|M|}{j} \sum_{(I_1,\dots,I_t)\in P_t} B_j\left(\left\langle {M_1\times\dots\times M_r \atop (I_1,\dots,I_t)} \right\rangle\right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{r} a_t \binom{|M|}{t} + \sum_{t=0}^{r-1} b_t \binom{|M|}{t}.$$

Согласно предыдущей лемме, если $M \in \{M_i\}_{i=1}^r$, то все $B_0(\langle {M_1\times\dots\times M_r \atop (I_1,\dots,I_t)} \rangle)$ равны нулю, а следовательно, $b_0 = 0$. Если же $M_1 = \dots = M_r$, то все $B_j(\langle {M_1\times\dots\times M_r \atop (I_1,\dots,I_t)} \rangle)$, $j \in \overline{0, t-1}$, равны нулю, а значит, $b_t = 0$ для всех t. □

В условиях предыдущей теоремы, если $M \in \{M_i\}_{i=1}^r$, то выражение (17) обладает свойством делимости аналогично выражению (4), а именно, если $|M|$ есть простое число и $r < |M|$, то (17) делится на $|M|$.

Примером семейства множеств $\{M_i\}_{i=1}^r$, удовлетворяющего всем этим условиям, может послужить любое семейство непустых отрезков натуральных чисел с фиксированным левым или правым концом.

4. L-условия и функция бинарного веса числа

До этого момента в рассуждениях мы использовали классический биномиальный коэффициент, определенный для целых $n \geqslant 0$, k следующим образом:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, & \text{если } n \geqslant k \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } n < k \text{ или } k < 0. \end{cases}$$

В комбинаторных задачах бывает полезным расширить область определения биномиального коэффициента на все целые n и k, чтобы, например, не заботиться об ограничениях на параметры или индексы в комбинаторных выражениях (см. [5]). Хотя задавать расширение можно по-разному, целесообразнее это делать с сохранением некоторых свойств классического биномиального коэффициента, например, рекуррентного соотношения

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}. \tag{18}$$

В условиях этого соотношения расширение по-прежнему определяется неоднозначно, необходимо и достаточно определить $\binom{n}{k}$ для каждого отрицательного n при любом фиксированном k (k может быть разным для разных n). В работе [5] автор задавал такое расширение, распространяя свойство $\binom{n}{n} = 1$ на все целые n. Далее в настоящей работе мы, распространяя свойство $\binom{n}{k} = 0$, $k < 0$, используем следующее определение расширенного биномиального коэффициента:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i), & \text{если } k \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } k < 0. \end{cases} \qquad n, k \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$

Нетрудно проверить выполнение соотношения (18) для (19).

Также мы введем мультиномиальный коэффициент, определив его для целых $n, k_1, \dots, k_s$ следующим образом:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_s} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-\dots-k_{s-1}}{k_s}.$$

В следующей лемме мы отметим ряд важных для нас свойств биномиального коэффициента, некоторые из которых будут использоваться часто и без дополнительных упоминаний.

Лемма 4. *Пусть $n, k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$.*

(1) *Если среди чисел $k_1, \dots, k_s$ найдется хотя бы одно отрицательное, то*

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_s} = 0.$$

(2) *Если все числа $k_1, \dots, k_s$ неотрицательны, $n = k_1 + \dots + k_s$, то имеет место равенство*

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_s} = \frac{n!}{k_1! \dots k_s!},$$

в правой части которого записано количество неупорядоченных разбиений множества мощности n на s подмножеств мощностей $k_1, \dots, k_s$.

(3) *Для любого $i \in \overline{1, s-1}$ имеет место тождество*

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_i, k_{i+1}, \dots, k_s} = \binom{n}{k_1, \dots, k_{i+1}, k_i, \dots, k_s}. \tag{20}$$

(4) *Если $n \geqslant 0$, то*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{21}$$

(5) *Имеет место тождество*

$$(n-k)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}. \tag{22}$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Из условий второго имеем

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_s} = \frac{1}{k_1!}\prod_{i=0}^{k_1-1}(n-i)\cdots\frac{1}{k_s!}\prod_{i=0}^{k_s-1}(n-k_1-\dots-k_{s-1}-i) = \frac{n!}{k_1!\cdots k_s!}.$$

Далее, докажем (20) при $s = 2$. Тождество выполнено, если $k_1 < 0$ или $k_2 < 0$. Далее полагая $k_1 \geqslant 0$, $k_2 \geqslant 0$, имеем

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \binom{n}{k_2, k_1} \Leftrightarrow \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2} = \binom{n}{k_2}\binom{n-k_2}{k_1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \prod_{i=0}^{k_1-1}(n-i)\prod_{i=0}^{k_2-1}(n-k_1-i) = \prod_{i=0}^{k_2-1}(n-i)\prod_{i=0}^{k_1-1}(n-k_2-i) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \prod_{i=0}^{k_1-1}(n-i)\prod_{i=k_1}^{k_1+k_2-1}(n-i) = \prod_{i=0}^{k_2-1}(n-i)\prod_{i=k_2}^{k_1+k_2-1}(n-i).$$

Индукция по s и тождества

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_{s+1}} = \binom{n}{k_1, \dots, k_s}\binom{n-k_1-\dots-k_s}{k_{s+1}} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2, \dots, k_{s+1}}$$

завершают доказательство третьего утверждения.

Если $n < k$ или $k < 0$, то обе части равенства (21) равны нулю. Пусть $n \geqslant k \geqslant 0$, тогда из третьего утверждения получаем

$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{n-k, k} \Leftrightarrow \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-k} = \binom{n}{n-k}\binom{k}{k} \Leftrightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Докажем последнее утверждение. При $k \geqslant 0$ имеем

$$(n-k)\binom{n}{k} = (n-k)\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \frac{k+1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(n-i) = (k+1)\binom{n}{k+1}.$$

Если $k < 0$, то обе части (22) равны нулю. □

Теорема 3. *Пусть C — произвольное L-условие ранга не выше r, $r \in \mathbb{N}$. Тогда для любых целых неотрицательных чисел $m, u_1, \ldots, u_r$ мощность множества*

$$(23) \qquad \big\{(\mu_1, \ldots, \mu_r) \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}^r \mid C(\mu_1, \ldots, \mu_r) = 1;\, \omega(\mu_i) = u_i,\, i \in \overline{1, r}\big\}$$

выражается в виде

$$(24) \qquad \sum_{t=0}^{u_1+\cdots+u_r} a_t \binom{m}{t},$$

где a_s — целые неотрицательные коэффициенты, зависящие только от C и $u_1, \ldots, u_r$. Более того, $a_0 \neq 0$, только когда набор $(0, \ldots, 0)$ принадлежит множеству (23).

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда все параметры $u_1, \ldots, u_r$ положительны. Введя для удобства записи константу $u_0 = 0$, каждому набору $(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ поставим в соответствие набор

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_{u_1}, \lambda_{u_1+1}, \ldots, \lambda_{u_1+u_2}, \ldots, \lambda_{u_1+\cdots+u_r}),$$

где $\lambda_{u_{k-1}+j}$ — номер разряда j-ой единицы в двоичной записи μ_k (единицы считаем слева направо, номера разрядов, как обычно, справа налево, начиная с нулевого). Т.к. любое натуральное число однозначно определяется номерами разрядов единиц в его двоичной записи, следующие множества равномощны:

$$(25) \qquad \big\{(\mu_1, \ldots, \mu_r) \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}^r \mid \omega(\mu_i) = u_i,\, i \in \overline{1, r}\big\},$$

$$(26) \qquad \big\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{u_1+\cdots+u_r}) \in \{0, \ldots, m-1\}^{u_1+\cdots+u_r} \mid \lambda_{u_{i-1}+1} > \cdots > \lambda_{u_{i-1}+u_i},\, i \in \overline{1, r}\big\}.$$

Далее, введем функцию γ_A, сопоставляющую высказыванию A его истинностное значение. Построим формулу $\tilde{C}$ путем замены в L-условии C всех предикатов типа $[\lambda_i = \lambda_j]$, $[\lambda_i < \lambda_j]$, соответственно, на следующие выражения:

$$\gamma_{u_i = u_j} \wedge E, \qquad \text{где } E = \bigwedge_{k=1}^{\min\{u_i, u_j\}} [\lambda_{u_{i-1}+k} = \lambda_{u_{j-1}+k}];$$

$$\big(\gamma_{u_i < u_j} \wedge E\big) \vee \bigvee_{k=1}^{\min\{u_i, u_j\}} [\lambda_{u_{i-1}+k} < \lambda_{u_{j-1}+k}] \wedge \bigwedge_{h=1}^{k-1} [\lambda_{u_{i-1}+h} = \lambda_{u_{j-1}+h}].$$

Теперь введем обозначение

$$M = \tilde{C} \wedge \bigwedge_{k=1}^{r} \bigwedge_{h=1}^{u_k - 1} [\lambda_{u_{k-1}+h+1} < \lambda_{u_{k-1}+h}].$$

Полученная формула является L-условием ранга не выше $u_1 + \dots + u_r$ при любых фиксированных параметрах $u_1, \dots, u_r$. Более того, всякий элемент из множества (26) удовлетворяет M тогда и только тогда, когда соответствующий ему элемент из множества (25) удовлетворяет C. Таким образом, по теореме 2 мощность множества (23) выражается в виде

$$\sum_{t=1}^{u_1+\dots+u_r} a_t \binom{m}{t},$$

где целые неотрицательные коэффициенты a_t зависят только от M. Как следствие, a_t зависят от C и параметров $u_1, \dots, u_r$.

Перейдем к оставшимся случаям. Если все параметры $u_1, \dots, u_r$ равны нулю, то множество (23) содержит не более одного элемента, а именно элемент $(0, \dots, 0)$. Поэтому, если $C(0, \dots, 0) = 1$, то в сумме (24) имеем $a_0 = 1$, если же $C(0, \dots, 0) = 0$, то $a_0 = 0$.

Далее, предположим, что среди чисел $u_1, \dots, u_r$ найдутся как положительные, так и нулевые. Считая для определенности $u_k = 0$, имеем $\mu_k = 0$. Как следствие, мощность множества (23) равна количеству наборов

$$(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_r) \in \{0, \dots, 2^m - 1\}^{r-1},$$

удовлетворяющих условиям:

$$\tilde{C}(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_r) = 1; \quad \omega(\mu_i) = u_i, i \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots r\},$$

где L-условие $\tilde{C}$ получено из C заменой каждого предиката, содержащего в своей записи λ_k, на соответствующие логические константы, а именно

$$[\lambda_j < \lambda_k] = 0; \quad [\lambda_k < \lambda_j] = \gamma_{u_j > 0}; \quad [\lambda_k = \lambda_j] = [\lambda_j = \lambda_k] = \gamma_{u_j = 0}, \qquad j \in \overline{1, r}.$$

Таким образом, данный случай можно последовательно свести к ситуации, рассмотренной ранее, когда все параметры $u_1, \dots, u_r$ положительны. □

Далее мы рассматриваем два частных случая предыдущей теоремы, для которых находим коэффициенты a_t из (24) в явном виде.

Теорема 4. *Для любых натуральных m, u, v мощности множеств*

$$\{(\mu_1, \mu_2) \in \{0, \dots, 2^m - 1\}^2 \mid \omega(\mu_1) = u;\ \omega(\mu_2) = v\}, \tag{27}$$

$$\{(\mu_1, \mu_2) \in \{0, \dots, 2^m - 1\}^2 \mid \omega(\mu_1) = u;\ \omega(\mu_2) = v;\ \mu_1 < \mu_2;\} \tag{28}$$

равны, соответственно,

$$\sum_{i=1}^{u+v} \binom{m}{i} \binom{i}{i-u, i-v, u+v-i},$$

$$\sum_{i=1}^{u+v} \binom{m}{i} \sum_{k=1}^{v} \binom{i-k}{i-u-1, i-v, u+v-i-k-1}.$$

Доказательство. Поскольку мощность множества (27), очевидно, равна $\binom{m}{u}\binom{m}{v}$, утверждение теоремы для (27) следует из известной формулы произведения биномиальных коэффициентов, которую мы докажем позже для произвольных целых параметров (см. формулу (30)). Тем не менее, мы проведем доказательство для (27), т.к. оно послужит основой для рассуждений о множестве (28).

Обозначим множества (27) и (28) через A и B, соответственно. Из теорем 3 и 2 следует, что

$$|A| = \sum_{i=1}^{u+v} a_i \binom{m}{i}, \qquad |B| = \sum_{i=1}^{u+v} b_i \binom{m}{i},$$

где коэффициенты a_s, b_s равны количеству классов $\left\langle {\{0,\dots,m-1\}^{u+v} \atop (I_1,\dots,I_s)} \right\rangle$ множества

$$\left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_u, \lambda_{u+1}, \dots, \lambda_{u+v}) \in \{0, \dots, m-1\}^{u+v}\right\},$$

удовлетворяющих, соответственно, L-условиям

$$C_1 = \bigwedge_{h=1}^{u-1} [\lambda_{h+1} < \lambda_h] \wedge \bigwedge_{h=1}^{v-1} [\lambda_{u+h+1} < \lambda_{u+h}],$$

$$C_2 = C_1 \wedge \left(\gamma_{u<v} \wedge \bigwedge_{k=1}^{\min\{u,v\}} [\lambda_k = \lambda_{u+k}] \vee \bigvee_{k=1}^{\min\{u,v\}} [\lambda_k < \lambda_{u+k}] \wedge \bigwedge_{h=1}^{k-1} [\lambda_h = \lambda_{u+h}] \right).$$

Начнем с вычисления a_s, $s \in \overline{1, u+v}$. Нужно пересчитать все разбиения $(I_1, \dots, I_s)$ множества индексов $\{1, \dots, u+v\}$, удовлетворяющие условиям:

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_u, \; \lambda_{u+1} > \dots > \lambda_{u+v}.$$

Отождествим множества $I_1, \dots, I_s$ с урнами, а индексы $1, \dots, u$ и $u+1, \dots, u+v$, соответственно, с красными и синими шарами. В каждой урне может находиться либо один красный шар, либо один синий, либо один красный и один синий. Пусть в этих случаях урны окрашиваются, соответственно, в красный, синий и фиолетовый цвета. Получаем, что каждому разбиению $(I_1, \dots, I_s)$ соответствует своя цветовая гамма урн $I_1, \dots, I_s$, и наоборот. Предположим, что красные шары уже некоторым образом расположены в урнах, тогда остается ровно $s-u$ пустых урн, в которые будут помещены только синие шары. Таким образом, мы всегда имеем $s-u$ синих урн, $s-v$ красных, и $u+v-s$ фиолетовых. Значит, коэффициент a_s равен количеству разбиений множества из s элементов на три подмножества с мощностями $s-u$, $s-v$, и $u+v-s$, т.е.

$$a_s = \binom{s}{s-u, s-v, u+v-s}.$$

Переходим к вычислению b_s, $s \in \overline{1, u+v}$, продолжая использовать комбинаторную интерпретацию. После раскрытия скобок L-условие C_2 будет записано в ДНФ так, что никакие два дизъюнкта не могут принимать одновременно истинные значения. Значит, остается для каждого дизъюнкта в отдельности пересчитать количество соответствующих разбиений $(I_1, \dots, I_s)$. При любом k от 1 до $\min\{u, v\}$ для дизъюнкта

$$C_1 \wedge [\lambda_k < \lambda_{u+k}] \wedge \bigwedge_{h=1}^{k-1} [\lambda_h = \lambda_{u+h}]$$

имеем: урны $I_1, \dots, I_{k-1}$ окрашены в фиолетовый цвет, урна I_k — в синий, остальные урны допускают любую окраску. Значит, в этом случае количество разбиений $(I_1, \dots, I_s)$ равно $\binom{s-k}{s-u, s-v-1, u+v-s-k+1}$. Далее, для дизъюнкта

$$C_1 \wedge \gamma_{u<v} \wedge \bigwedge_{k=1}^{\min\{u,v\}} [\lambda_k = \lambda_{u+k}]$$

существует не более одной цветовой гаммы урн $I_1, \dots, I_s$, а именно $I_1, \dots, I_u$ окрашены в фиолетовый цвет, $I_{u+1}, \dots, I_s$ окрашены в синий. Это возможно только при $s = v$. Значит, количество разбиений $(I_1, \dots, I_s)$ выражается в виде $\delta_{[u<v]\wedge[s=v]}$, где δ_A — функция, переводящая высказывание A в целое число 1, если оно истинно, в 0, если ложно. Таким образом, имеем

$$b_s = \delta_{[u<v]\wedge[s=v]} + \sum_{k=1}^{\min\{u,v\}} \binom{s-k}{s-u-1, s-v, u+v-s-k+1}.$$

Поскольку

$$\delta_{[u<v]\wedge[s=v]} = \sum_{k=\min\{u,v\}+1}^{v} \binom{s-k}{s-u-1, s-v, u+v-s-k+1},$$

b_s принимает искомый вид. □

Теорема 5. *Для любых целых $m, u_1, \dots, u_q$ справедливо тождество*

$$\binom{m}{u_1} \cdots \binom{m}{u_q} = \sum_{i_{q-1}=u_q}^{u_1+\dots+u_q} \binom{m}{i_{q-1}} \sum_{i_{q-2}=u_{q-1}}^{u_1+\dots+u_{q-1}} \cdots \sum_{i_0=u_1}^{u_1} h(i_0, \dots, i_{q-1}), \tag{29}$$

где $h(i_0, \dots, i_{q-1})$ не зависят от m и представляются в виде

$$h(i_0, \dots, i_{q-1}) = \prod_{j=1}^{q-1} \binom{i_j}{i_j - u_{j+1}, i_j - i_{j-1}, u_{j+1} + i_{j-1} - i_j}.$$

Доказательство. Вначале докажем для любых целых m, u, v следующее тождество:

$$\binom{m}{u}\binom{m}{v} = \sum_{i=u}^{u+v} \binom{m}{i} \binom{i}{i-u, i-v, u+v-i}. \tag{30}$$

Если $u < 0$ или $v < 0$, то обе части (30) равны нулю. Положим далее, что $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, и докажем (30) индукцией по v. При $v = 0$ равенство (30) примет вид

$$\binom{m}{u} = \binom{m}{u}\binom{u}{0, u, 0}. \tag{31}$$

Используя предположение индукции, определение биномиального коэффициента (19), и равенство (21), получаем

$$\begin{aligned}
\binom{m}{u}\binom{m}{v+1} &= \frac{m-v}{v+1}\binom{m}{u}\binom{m}{v} = \\
&= \frac{m-v}{v+1} \sum_{i=u}^{u+v} \binom{m}{i}\binom{i}{i-u}\binom{u}{i-v}\binom{u+v-i}{u+v-i} = \\
&= \frac{1}{v+1} \sum_{i=u}^{u+v} (m - i + (i-v)) \binom{m}{i}\binom{i}{u}\binom{u}{i-v}.
\end{aligned}$$

Теперь дважды применим (22):

$$\binom{m}{u}\binom{m}{v+1} = \frac{1}{v+1}\sum_{i=u}^{u+v}(i+1)\binom{m}{i+1}\binom{i}{u}\binom{u}{i-v}+$$
$$+\frac{1}{v+1}\sum_{i=u}^{u+v}(u-(i-v-1))\binom{m}{i}\binom{i}{u}\binom{u}{i-v-1}.$$

В первой сумме проведем замену индекса суммирования, затем обе суммы распространим от u до $u+v+1$:

$$\binom{m}{u}\binom{m}{v+1} = \frac{1}{v+1}\sum_{i=u}^{u+v+1} i\binom{m}{i}\binom{i-1}{u}\binom{u}{i-v-1}+$$
$$+\frac{1}{v+1}\sum_{i=u}^{u+v+1}(u+v-i+1)\binom{m}{i}\binom{i}{u}\binom{u}{i-v-1}.$$

Покажем, что

$$i\binom{i-1}{u} + (u+v-i+1)\binom{i}{u} = (v+1)\binom{i}{u}.$$

Применяя (18), затем снова (22), будем иметь:

$$i\binom{i-1}{u} + (u-i)\binom{i}{u} = i\binom{i-1}{u} + (u-i)\binom{i-1}{u} - (i-u)\binom{i-1}{u-1} = 0.$$

Таким образом,

$$\binom{m}{u}\binom{m}{v+1} = \sum_{i=u}^{u+v+1}\binom{m}{i}\binom{i}{u}\binom{u}{i-v-1} = \sum_{i=u}^{u+v+1}\binom{m}{i}\binom{i}{i-u}\binom{u}{i-(v+1)}.$$

Перейдем к доказательству тождества (29) индукцией по q. При $q=1$ тождество очевидно. Далее, используя предположение индукции и тождество (30), для любого целого u_{q+1} получаем

$$\binom{m}{u_1}\cdots\binom{m}{u_{q+1}} = \sum_{i_{q-1}=u_q}^{u_1+\cdots+u_q}\binom{m}{u_{q+1}}\binom{m}{i_{q-1}}\sum_{i_{q-2}=u_{q-1}}^{u_1+\cdots+u_{q-1}}\cdots\sum_{i_0=u_1}^{u_1} h(i_0,\ldots,i_{q-1}) =$$
$$= \sum_{i_{q-1}=u_q}^{u_1+\cdots+u_q}\sum_{i_q=u_{q+1}}^{i_{q-1}+u_{q+1}}\binom{m}{i_q}\sum_{i_{q-2}=u_{q-1}}^{u_1+\cdots+u_{q-1}}\cdots\sum_{i_0=u_1}^{u_1} h(i_0,\ldots,i_q).$$

Остается показать, что верхний индекс суммирования по i_q можно заменить на $u_1+\cdots+u_{q+1}$. Если $u_k<0$ для некоторого $k\in\overline{1,q}$, то $h(i_0,\ldots,i_q)=0$ при любых целых $i_1,\ldots,i_q$. Пусть все $u_1,\ldots,u_q$ положительны, тогда мы распространяем сумму по i_q до $u_1+\cdots+u_{q+1}$, добавляя нулевые слагаемые. $\square$

Если все целые $m,u_1,\ldots,u_q$ положительны, то левая часть тождества (29), очевидно, равна мощности множества

$$\left\{(\mu_1,\ldots,\mu_r)\in\{0,\ldots,2^m-1\}^r \mid \omega(\mu_i)=u_i,\, i\in\overline{1,r}\right\}.$$

Обобщая рассуждения из теоремы 4, коэффициент при $\binom{m}{i_{q-1}}$ в правой части (29) можно проинтерпретировать как количество разбиений $(I_1,\dots,I_{i_{q-1}})$ множества индексов $\{1,\dots,u_1+\dots+u_q\}$, удовлетворяющих условиям

$$\lambda_{u_{k-1}+1}<\dots<\lambda_{u_{k-1}+u_k},\qquad u_0=0,\, k\in\overline{1,q}.$$

В работе [3] для серии коммутаторов

$$[[y,\underbrace{x,\dots,x}_{K},\underbrace{y,\dots,y}_{L}],[y,x]],\quad K\geqslant 1,\, L\geqslant 0,\text{ где } K\geqslant 2 \text{ при } L=0,$$

из собирательной формулы (1) были найдены показатели степеней в следующем виде:

$$\sum_{m=0}^{n-1}\binom{m}{L}\left(\binom{m}{2}\binom{m}{K}+\binom{m}{K+1}\right).$$

Далее мы преобразуем это выражение к виду (2), применяя тождество (29).

Предложение 4. *Для любого натурального n и целых K,L имеет место равенство*

$$\sum_{m=0}^{n-1}\binom{m}{L}\left(\binom{m}{2}\binom{m}{K}+\binom{m}{K+1}\right)=\sum_{i_2=L}^{K+L+2}\binom{n}{i_2+1}H(i_2), \tag{32}$$

где

$$H(i_2)=\binom{i_2}{i_2-L,i_2-K-1,L+K+1-i_2}+ \\ +\sum_{i_1=K}^{K+2}\binom{i_1}{i_1-K,i_1-2,K+2-i_1}\binom{i_2}{i_2-L,i_2-i_1,L+i_1-i_2}.$$

Доказательство. После раскрытия скобок в левой части (32) будем иметь

$$\sum_{m=0}^{n-1}\binom{m}{2}\binom{m}{K}\binom{m}{L}+\sum_{m=0}^{n-1}\binom{m}{L}\binom{m}{K+1}.$$

Преобразуем отдельно каждую из двух сумм, используя тождество (29) и известную формулу суммирования:

$$\sum_{m=0}^{a}\binom{m}{b}=\binom{a+1}{b+1},\quad a,b\in\mathbb{N}_0.$$

Для первой суммы имеем:

$$\sum_{m=0}^{n-1}\binom{m}{2}\binom{m}{K}\binom{m}{L}=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i_2=L}^{L+K+2}\binom{m}{i_2}H_1(i_2)=\sum_{i_2=L}^{L+K+2}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{m}{i_2}H_1(i_2)= \\ =\sum_{i_2=L}^{L+K+2}\binom{n}{i_2+1}H_1(i_2),$$

где

$$H_1(i_2)=\sum_{i_1=K}^{K+2}\binom{i_1}{i_1-K,i_1-2,K+2-i_1}\binom{i_2}{i_2-L,i_2-i_1,L+i_1-i_2}.$$

Преобразуем вторую сумму:

$$\sum_{m=0}^{n-1}\binom{m}{K+1}\binom{m}{L}=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i_1=L}^{L+K+1}\binom{m}{i_1}\binom{i_1}{i_1-L,i_1-K-1,L+K+1-i_1}=$$

$$=\sum_{i_1=L}^{L+K+1}\binom{n}{i_1+1}\binom{i_1}{i_1-L,i_1-K-1,L+K+1-i_1}=$$

$$=\sum_{i_2=L}^{L+K+2}\binom{n}{i_2+1}\binom{i_2}{i_2-L,i_2-K-1,L+K+1-i_2}.$$

В последнем переходе мы добавили нулевое слагаемое и изменили индекс суммирования.

Складывая два полученных выражения, мы получаем (32). □

References

[1] P. Hall, *A contribution to the theory of groups of prime-power order*, Proc. London Math. Soc., **36** (1933), 29–95. Zbl 0007.29102

[2] M. Hall, Jr., *The theory of groups*, Macmillan, New York, 1959. Zbl 0084.02202

[3] E. Krause, *On the collection process*, Proc. Amer. Math. Soc., **15** (1964), 497–504. Zbl 0122.03003

[4] S. Kolesnikov, V. Leontiev, G. Egorychev, (2020). *Two collection formulas*, Journal of Group Theory (published online ahead of print). doi: https://doi.org/10.1515/jgth-2019-0074

[5] V.M. Leontiev, *On Divisibility of Some Sums of Binomial Coefficients Arising From Collection Formulas*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, **11**:5 (2018), 603–614.

Vladimir Markovich Leontiev
Institute of Mathematics and Computer Science,
Siberian Federal University,
79, Svobodny ave.,
Krasnoyarsk, 660041, Russia
E-mail address: v.m.leontiev@outlook.com