S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 824–839 (2020) УДК 519.21

DOI 10.33048/semi.2020.17.060 MSC 60F10, 60K05

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА НАД РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ЗАДАЧИ

А.А. БОРОВКОВ

Abstract. Sharp asymptotics for the Laplace transform of the compound renewal process (CRP) are found under the Cramer moment condition on the jumps of the process. This result allowed us to obtain asymptotic inequalities for the distribution of the maximum value of the CRP on increasing time intervals and also to find the asymptotic behavior of all the moments of the CRP. The asimptotics of the two first moments of CRP are found under conditions close to minimal ones.

Keywords: compound renewal process, Laplace transform, sharp asymptotics, distribution of the maximum of process, asymptotics of the moments.

§ 1. Введение. Предварительные сведения

Пусть заданы «начальный» случайный вектор $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \zeta_1)$ и независимая от него последовательность независимых одинаково распределденных случайных невырожденных векторов $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (\tau_2, \zeta_2)$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (\tau_3, \zeta_3), \ldots$, где $\tau_1 \geqslant 0$, $\tau > 0$. Обозначим

$$T_0 = Z_0 = 0, \qquad T_n := \sum_{j=1}^{n} \tau_j, \qquad Z_n := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Borovkov, A.A., Sharp asymptotics for the Laplace transform of the compound renewal process and related problems.

Работа выполнена при частичной поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН №I.1.3 (проект № 0314-2016-0008), а также гранта РФФИ (проект 18-01-00101а).

Поступила 16 апреля 2020 г., опубликована 25 июня 2020 г.

Пусть при $t \geqslant 0$

$$\nu(t) := \max\{k \geqslant 0 : \, T_k \leqslant t\}.$$

Обобщенный процесс восстановления (*ОПВ*) $Z(t)$ определяется равенствами

$$Z(t) := Z_{\nu(t)} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0 \qquad \big(Z(0) = \zeta_1 \mathbf{I}_{\{\tau_1 = 0\}}\big).$$

В дальнейшем везде будем предполагать, что выполнено условие Крамера в следующем виде

[**C**] $\mathbf{E} e^{v|\boldsymbol{\xi}_1|} < \infty$, $\mathbf{E} e^{v|\boldsymbol{\xi}|} < \infty$ *при некотором* $v > 0$.

Положим

$$\psi(\lambda, \mu) := \mathbf{E} e^{\lambda\tau + \mu\zeta}, \qquad \psi_1(\lambda, \mu) := \mathbf{E} e^{\lambda\tau_1 + \mu\zeta_1},$$

$$\mathbf{A}(\lambda, \mu) := \ln \psi(\lambda, \mu), \qquad \mathbf{A}_1(\lambda, \mu) := \ln \psi_1(\lambda, \mu), \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2;$$

$$\mathcal{A} := \big\{(\lambda, \mu) : \, \mathbf{A}(\lambda, \mu) < \infty\big\}, \qquad \mathcal{A}_1 := \big\{(\lambda, \mu) : \, \mathbf{A}_1(\lambda, \mu) < \infty\big\};$$

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} := \big\{(\lambda, \mu) : \, \mathbf{A}(\lambda, \mu) \leqslant 0\big\}.$$

Важную роль в дальнейшем играют функции:

$$(1.1) \qquad A(\mu) := -\sup\big\{\lambda : \, (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}\big\}, \qquad \widehat{A}(\mu) := \max\big\{A(\mu), -\lambda_+\big\},$$

$$(1.2) \qquad \mathbf{D}(t, \alpha) := \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leqslant}} \{\lambda t + \mu\alpha\}, \qquad D(\alpha) := \mathbf{D}(1, \alpha),$$

$$(1.3) \qquad \widehat{D}(\alpha) := \inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} \big\{\mathbf{D}(t, \alpha) + \lambda_+(1 - t)\big\},$$

где $\lambda_+ := \sup\{\lambda : \, \mathbf{E} e^{\lambda\tau} < \infty\}$. Если для $\mu \in \mathbb{R}$ не существует точки $(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}$, то мы полагаем $A(\mu) = \widehat{A}(\mu) = \infty$. Точки

$$\mu^+ := \sup\big\{\mu : \, A(\mu) < \infty\big\}, \qquad \mu^- := \inf\big\{\mu : \, A(\mu) < \infty\big\}$$

являются границами множества конечности функций $A(\mu)$ и $\widehat{A}(\mu)$. В [1], [2], § 4.10, установлено следующее. Функции $D(\alpha)$ и $\widehat{D}(\alpha)$ совпадают в окрестности точки $a := \frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\tau}$, $D(a) = D'(a) = 0$, $D''(a) > 0$ (теорема 4.10.1 в [2]); если $\lambda_+ \geqslant D(0)$, то $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$ при всех α, $\widehat{A}(\mu) = A(\mu)$ при всех μ. Функции $D(\alpha)$, $\widehat{D}(\alpha)$, $A(\mu)$, $\widehat{A}(\mu)$ являются выпуклыми и непрерывными снизу (изнутри области конечности). В [3] показано, что функции $\widehat{D}(\alpha)$ и $\widehat{A}(\mu)$ связаны дуальным преобразованием Лежандра:

$$\widehat{D}(\alpha) = \sup_{\mu} \big\{\mu\alpha - \widehat{A}(\mu)\big\}, \qquad \widehat{A}(\mu) = \sup_{\alpha} \big\{\mu\alpha - \widehat{D}(\alpha)\big\}.$$

Функции $A(\mu)$, $\widehat{A}(\mu)$ называются *базовыми* функциями, функции $D(\alpha)$, $\widehat{D}(\alpha)$ оказываются функциями уклонений ОПВ $Z(t)$. Именно, из теоремы 2.1 в [4] вытекает следующее утверждение

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия допустимой неоднородности*

$$(1.4) \qquad \mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1], \qquad \lambda_+^{(\tau_1)} := \sup\{\lambda : \, \mathbf{E} e^{\lambda\tau_1} < \infty\} \geqslant \min\big\{\lambda_+, D(0)\big\}.$$

Пусть, кроме того, в случае $\lambda_+ < D(0)$ *выполнено дополнительное условие*

$$(1.5) \qquad \liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau \geqslant t) \geqslant -\lambda_+.$$

Тогда процесс $\{Z(t)\}_{t\geqslant 0}$ *удовлетворяет локальному принципу больших уклонений (ПБУ) в пространстве* $\mathbb{R}$ *с функцией уклонений* $\widehat{D}(\alpha)$. *Это означает, что при каждом* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T} \in (\alpha)_\varepsilon\right) = -\widehat{D}(\alpha),$$

где $(\alpha)_\varepsilon := (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$, $\varepsilon = \varepsilon_T$ *сходится к* 0 *достаточно медленно при* $T\to\infty$ (сокращенно $\varepsilon = \overline{o}(1)$ при $T\to\infty$).

Кроме того, для любого измеримого множества $B\subset\mathbb{R}$ *справедливы неравенства*

$$\begin{aligned}\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T}\in B\right) &\leqslant -\widehat{D}\big([B]\big),\\ \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T}\in B\right) &\geqslant -\widehat{D}\big((B)\big),\end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$\widehat{D}(B) := \inf_{\alpha\in B} \widehat{D}(\alpha),$$

и через $[B]$, (B) *обозначены замыкание и внутренность множества* B, *соответственно* (интегральный ПБУ).

В [3] установлено также следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия допустимой неоднородности* (1.4) *и в случае* $\lambda_+ < D(0)$ *выполнено дополнительное условие* (1.5). *Тогда для любого* $\mu\neq\mu^\pm$ *имеет место равенство*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{E}e^{\mu Z(T)} = \widehat{A}(\mu). \tag{1.7}$$

В настоящей работе будет установлено более точное утверждение.

Существенным уточнением теоремы 1.1 являются интегро-локальные теоремы, установленные в [1]. Чтобы их сформулировать нам понадобятся дополнительные сведения. Если

$$\mathbf{A}(\lambda,\mu) > 0 \quad \text{при всех} \quad (\lambda,\mu)\in\partial\mathcal{A}, \tag{1.8}$$

то функция $A(\mu)$, называемая базовой, есть единственное решение уравнения (относительно λ)

$$\mathbf{A}(-\lambda,\mu) = 0, \tag{1.9}$$

которое является аналитическим. В общем случае обозначим через (μ_-,μ_+) максимальный интервал, содержащий точку $\mu=0$, на котором функция $A(\mu)$ аналитична. Этот интервал всегда не пуст, так как $\mathbf{A}(0,0)=0$ (т.е. $A(0)=0$) и функция $\mathbf{A}$ аналитична в окрестности точки $(0,0)$. Положим

$$\alpha_- = A'(\mu_- + 0), \qquad \alpha_+ = A'(\mu_+ - 0).$$

Тогда область (α_-,α_+) является областью аналитичности функции $D(\alpha)$, содержащей в себе точку $\alpha=a$. В правой части равенства $D(\alpha) = \sup_\mu\big(\alpha\mu - A(\mu)\big)$ sup достигается в точке $\mu(\alpha)$, которая является единственным решением уравнения

$$A'(\mu) = \alpha.$$

Обозначим $(\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$ максимальную область аналитичности функции $\widehat{A}(\mu)$, содержащую в себе точку $\mu = 0$, и положим

$$\widehat{\alpha}_- = A'(\widehat{\mu}_- + 0), \qquad \widehat{\alpha}_+ = A'(\widehat{\mu}_+ - 0).$$

Тогда интервал $(\widehat{\alpha}_-, \widehat{\alpha}_+)$ будет областью аналитичности функции $\widehat{D}(\alpha)$, содержащей в себе точку $\alpha = a$.

Если $\lambda_+ > D(0)$, то $\widehat{\mu}_\pm = \mu_\pm$, $\widehat{\alpha}_\pm = \alpha_\pm$.

Условие $\lambda_+ > D(0)$ является весьма широким. Оно, очевидно, выполнено, если $a := \frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\tau} = 0$ (тогда $D(0) = 0$) или $\lambda_+ = \infty$. Оно выполнено, если множество $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ в $\mathbb{R}^2$ (или его граница $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$) вложено в открытую полуплоскость $\{\lambda < \lambda_+\}$ (это всегда так, если $\mathbf{A}(\lambda_+, \mu) > 0$ при всех μ). Действительно, названное условие означает, что λ_+ больше первой координаты любой точки $(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}$, то есть

$$\lambda_+ > \sup_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{A}^{\leqslant 0}} \lambda = D(0)$$

(см. (1.2)).

В приведенной ниже интегро-локальной теореме нам понадобится компакт $\widehat{K}$, который мы определим как отрезок $\widehat{K} \subset (\widehat{\alpha}_-, \widehat{\alpha}_+)$, содержащий окрестность точки $\alpha = a$.

Положим $\lambda(\alpha) = -A\big(\mu(\alpha)\big)$, так что $\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) \in \partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ при $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$. Определим множество $\widehat{\mathcal{A}}$ как образ в $\mathbb{R}^2$ компакта $\widehat{K}$ при отображении $(\lambda, \mu) = \big((\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big)$. Ясно, что пересечение $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ с окрестностью точки $(0, 0)$ вложено в $\widehat{\mathcal{A}}$.

Теорема 1.3. ([1]) *Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$ нерешетчатый вектор, $\alpha = x/T \in \widehat{K}$ и выполнено условие допустимой неоднородности*

$$\widehat{\mathcal{A}} \subset (\mathcal{A}_1), \qquad \mathbf{P}(\tau_1 > t) = o\bigg(\frac{1}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(0)}\bigg) \quad \textit{при} \quad T \to \infty. \tag{1.10}$$

Тогда

$$\mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x)\big) = \frac{\Delta}{\sqrt{T}}\, Q(\alpha) e^{-TD(\alpha)}\big(1 + o(1)\big), \tag{1.11}$$

где

$$Q(\alpha) = \psi_1 C(\alpha) I_Z(\alpha), \qquad I_Z(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{P}(\tau > y)dy,$$

$\psi_1 = \psi_1\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big)$, *$C(\alpha)$ есть положительная непрерывная в (α_-, α_+) функция, определенная в* [1], *$\Delta = \Delta_T = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$, остаточный член $o(1)$ равномерен по $\alpha \in \widehat{K}$.*

Сравнивая теорему 1.3 с интегро-локальной теоремой для $Z(T)$ в области нормальных уклонений ($\alpha = x/T \to a := \frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\tau}$ при $T \to \infty$; см. [5]), находим, что

$\mu(\alpha) \to 0$, $\lambda(\alpha) \to 0$, $I_Z(\alpha) \to \mathbf{E}\tau$, $\psi_1 \to 1$,

$$\psi_1 C(\alpha) I_Z(\alpha) \to \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tag{1.12}$$

при $\alpha \to a$, так что $C(\alpha) \to \frac{1}{\sigma \mathbf{E}\tau\sqrt{2\pi}}$ при $\alpha \to a$, где $\sigma^2 = \frac{\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2}{\mathbf{E}\tau}$.

В настоящей работе, используя названные утверждение, мы найдем в § 2 точную асимптотику $\mathbf{E}e^{\mu Z(T)}$ при $\mu \in (\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$ и $T \to \infty$ (теорема 1.1 содержала «грубую» асимптотику, но в более широкой области). В § 3 с помощью этой точной асимптотики установлены асимптотические неравенства для распределения $\overline{Z}(T) = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} Z(T)$. Точная асимптотика моментов $Z(T) - aT$ при $T \to \infty$ найдена в § 4. В пп. 4.1, 4.2 выполнение условия Крамера [$\mathbf{C}$] не предполагается. Найдена асимптотика первых двух моментов $Z(T) - aT$ и $Y(T) - aT$, где $Y(T) = Z_{\nu(T)+1}$, при условиях, близких к минимальным.

§ 2. Точная асимптотика $\mathbf{E}e^{\mu Z(T)}$

Пусть, как и прежде, $\widehat{\mathcal{A}} = \Big\{\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big),\, \alpha \in \widehat{K}\Big\}$ — аналитический отрезок кривой $\partial\mathcal{A}^{\leqslant}$ в $\mathbb{R}^2$. Введем в рассмотрение функцию $\alpha(\mu) := A'(\mu)$, которая является обратной функцией к $\mu(\alpha) = D'(\alpha)$, так что

$$A(\mu) = \sup_{\alpha}\big(\mu\alpha - D(\alpha)\big) = \mu\alpha(\mu) - D\big(\alpha(\mu)\big).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть (τ, ζ) — нерешетчатый вектор и выполнены условия «допустимой неоднородности»*

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1], \quad \widehat{\mathcal{A}} \subset (\mathcal{A}_1), \quad \mathbf{P}(\tau_1 > T) = o\bigg(\frac{1}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(0)}\bigg) \quad \textit{при } T \to \infty. \tag{2.1}$$

Тогда для любого $\mu \in (\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} = \frac{\sqrt{2\pi}Q(\alpha(\mu))e^{TA(\mu)}}{\sqrt{D''(\alpha(\mu))}}\big(1 + o(1)\big) \quad \textit{при} \quad T \to \infty. \tag{2.2}$$

Если ОПВ $Z(t)$ однороден ($\boldsymbol{\xi}_1 \underset{d}{=} \boldsymbol{\xi}$), то условия (2.1) излишни.

Теорема 2.1 показывает, что приближение (1.7) в области $(\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$ является весьма точным: следующий член асимптотического разложения для $\ln \mathbf{E}e^{\mu Z(T)}$ оказывается «постоянным» (не зависимым от T).

Доказательство. Положим

$$E(B) = \mathbf{E}\big(e^{\mu Z(T)};\, Z(T)/T \in B\big), \qquad B_N = [-N, N].$$

Из леммы 5.2 в [3] вытекает следующее утверждение. Пусть выполнены условия допустимой неоднородности (1.4). Тогда при любом $\mu \in (\mu^-, \mu^+)$ выполняется

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{E}\bigg(e^{\mu Z(T)};\, \frac{|Z(T)|}{T} > N\bigg) = -\infty.$$

Для $\mu \in (\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$ выберем N настолько большим, что

$$\ln \mathbf{E}\left(e^{\mu Z(T)};\ \frac{|Z(T)|}{T} > N\right) < -T\bigl(A(\mu)+1\bigr). \tag{2.3}$$

Тогда для таких μ и N

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} = E(\mathbb{R}) = E(B_N) + o(e^{-TA(\mu)}). \tag{2.4}$$

Оценим теперь значение $E(B_N)$. При малом $h > 0$ разобьем область B_N на три части:

$$B_{N,1} = [-N, \alpha(\mu)-h), \qquad B_{N,2} = [\alpha(\mu)-h, \alpha(\mu)+h), \qquad B_{N,3} = [\alpha(\mu)+h, N).$$

Оценим сначала значение $E(B_{N,2})$, которое определяет главную часть $E(B_N)$. Ясно, что при достаточно малом $h > 0$ можно так выбрать компакт $\widehat{K} \subset (\widehat{\alpha}_-, \widehat{\alpha}_+)$, что область $B_{N,2}$ будет целиком лежать в $\widehat{K}$.

Выберем малое $\Delta > 0$ и положим

$$x_k = T\alpha(\mu) + k\Delta, \qquad k = -M, -M+1, \dots, M-1,$$

где для простоты считаем $M = \frac{hT}{\Delta}$ целым числом. Интеграл

$$E(B_{N,2}) = \int\limits_{T(\alpha(\mu)-h)}^{T(\alpha(\mu)+h)} e^{\mu x}\mathbf{P}\bigl(Z(T) \in dx\bigr)$$

представим в виде сумм

$$E(B_{N,2}) = \sum_{k=-M}^{M-1} \int\limits_{\Delta[x_k)} e^{\mu x}\mathbf{P}\bigl(Z(T) \in dx\bigr) = \sum_{k=-M}^{M-1} e^{\mu x_k}\mathbf{P}\bigl(Z(T) \in \Delta[x_k)\bigr)\bigl(1+o(1)\bigr)$$

при $\Delta \to 0$. Чтобы упростить изложение, предположим сначала, что $0 \notin B_{N,2}$. Тогда при

$$\alpha_k = \frac{x_k}{T}, \qquad k = -M, \dots, M-1$$

согласно теореме 1.3 (ее условия выполнены), при $T \to \infty$ и $\Delta = \overline{o}(1)$ имеем

$$E(B_{N,2}) = \sqrt{T} \sum_{k=-M}^{M-1} \frac{\Delta}{T}\, Q(\alpha_k) e^{T(\mu\alpha_k - D(\alpha_k))}\bigl(1+o(1)\bigr). \tag{2.5}$$

Здесь функция $Q(\alpha)$ непрерывна, а аналитическая функция $\mu\alpha - D(\alpha)$ достигает своего максимума, равного $A(\mu)$, в точке $\alpha(\mu)$ и допускает при малых h, $|\alpha - \alpha(\mu)| \leqslant h$, разложение

$$\mu\alpha - D(\alpha) = A(\mu) - \frac{(\alpha-\alpha(\mu))^2 D''}{2} + O\bigl(|\alpha-\alpha(\mu)|^3\bigr), \tag{2.6}$$

где для краткости принято $D'' = D''\bigl(\alpha(\mu)\bigr)$. Так как $\alpha_{k+1} - \alpha_k = \Delta/T$, то сумма в (2.5) является интегральной суммой для интеграла

$$Q\bigl(\alpha(\mu)\bigr) \int\limits_{\alpha(\mu)-h}^{\alpha(\mu)+h} e^{T(\mu\alpha - D(\alpha))} d\alpha\bigl(1+o(1)\bigr),$$

который в силу (2.6) после замены $\sqrt{TD''}\big(\alpha-\alpha(\mu)\big)=u$ будет равен

(2.7)
$$\frac{Q(\alpha(\mu))e^{TA(\mu)}}{\sqrt{TD''}}\int\limits_{-h\sqrt{TD''}}^{h\sqrt{TD''}} e^{-\frac{u^2}{2}}du\big(1+o(1)\big)=\frac{\sqrt{2\pi}\,Q(\alpha(\mu))e^{TA(\mu)}}{\sqrt{TD''}}\big(1+o(1)\big).$$

Если $0\in B_{N,2}$, то в силу вложения $\{\tau_1>T\}\subset\big\{Z(T)\in\Delta[0]\big\}$ в правой части (1.11) и в сумме (2.5) появится еще одно слагаемое $\mathbf{P}(\tau_1>T)$. Но по третьему условию допустимой неоднородности в (2.1) оно никак не повлияет на окончательный результат в (2.7).

Итак, из (2.5) и проделанных вычислений получаем

$$E(B_{N,2})=\frac{\sqrt{2\pi}\,Q(\alpha(\mu))e^{TA(\mu)}}{\sqrt{D''}}\big(1+o(1)\big)\quad\text{при}\quad T\to\infty. \tag{2.8}$$

Оценим теперь слагаемое $E(B_{N,3})$. Выберем опять малое Δ и положим

$$\alpha_l=\alpha(\mu)+h+l\Delta,\qquad l=0,\dots,L-1,$$

считая для простоты, что $L=\frac{N-\alpha(\mu)-h}{\Delta}$ — целое число. Пусть для определенности $\mu\geqslant 0$. Тогда при любом $l<L$ и $\Delta=\overline{o}(1)$ при $T\to\infty$ будем согласно локальному ПБУ для ОПВ $Z(T)$ иметь (в силу (2.1) условия теоремы 1.1 выполнены)

$$J_l:=\int\limits_{T\Delta[\alpha_l)} e^{\mu x}\mathbf{P}\big(Z(T)\in dx\big)\leqslant e^{T(\alpha_l+\Delta)\mu}\mathbf{P}\big(Z(T)\in T\Delta[\alpha_l)\big)=$$
$$=e^{T(\mu\alpha_l-D(\alpha_l))+o(T)}.$$

Так как $\mu\alpha-D(\alpha)$ вогнутая функция с максимумом в точке $\alpha=\alpha(\mu)$, равным $A(\mu)$; $D''>0$ при $\mu\in(\widehat{\mu}_-,\widehat{\mu}_+)$ и $\alpha_l\geqslant\alpha(\mu)+h$, то найдется $h_1>0$ такое, что при всех $l<L$ выполняется

$$\mu\alpha_l-D(\alpha_l)\leqslant A(\mu)-h_1.$$

Поэтому

$$\begin{gathered}J_l\leqslant e^{T(A(\mu)-h_1)+o(T)},\\ E(B_{N,3})=\sum_{l=0}^{L-1}J_l\leqslant Le^{T(A(\mu)-h_1)+o(T)}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Аналогичным образом оценивается $E(B_{N,1})$. Сопоставляя (2.3), (2.4), (2.8), (2.9), мы получим (2.2). Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Асимптотические неравенства для распределения $\overline{Z}(T)=\sup_{t\leqslant T}Z(t)$

Чтобы упростить формулировки, в этом и следующем параграфах мы будем предполагать, что ОПВ $Z(t)$ является *однородным*, т.е. что $\boldsymbol{\xi}_1\underset{d}{=}\boldsymbol{\xi}$.

Если воспользоваться теоремой 2.1, то можно получить весьма точные асимптотические неравенства для $\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big)$. Пусть

$$A(\widehat{\mu}_+) > 0, \qquad \mu_0 := \sup\big\{\mu : A(\mu) \leqslant 0\big\}.$$

Тогда $\mu_0 = 0$, если $a := \frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\tau} \geqslant 0$, и $\mu_0 > 0$, $A(\mu_0) = 0$, если $a < 0$. Положим $\alpha_0 = A'(\mu_0)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $Z(t)$ — однородный ОПВ, (τ, ζ) — нерешетчатый вектор, $A(\widehat{\mu}_+) > 0$, $\alpha = x/T$. Тогда при $T \to \infty$*

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \leqslant \begin{cases} e^{-\mu_0 x}\big(1 + o(1)\big), & \text{если} \quad a < 0, \quad \alpha \in [0, \alpha_0]; \\ e^{-TD(\alpha)}\big(1 + o(1)\big), & \text{если} \quad \alpha \in [\alpha_0, \widehat{\alpha}_+). \end{cases} \tag{3.1}$$

Если $Z(T)$ — случайное блуждание ($\tau \equiv 1$), то $\widehat{\mu}_+ = \mu^+$, неравенства (3.1) превращаются в точные (не асимптотические), т.е. они верны при всех T, $o(1)$ можно заменить на 0.

Доказательство теоремы 3.1. Согласно теореме 2.1 для однородного ОПВ $Z(t)$ и $\mu \in (\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$ выполняется

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} = ce^{TA(\mu)}\big(1 + \varepsilon_T\big), \tag{3.2}$$

где $\varepsilon_T \to 0$ при $T \to \infty$, c зависит лишь от μ. Так как $\eta_Z(x) := \inf\big\{t : Z(t) \geqslant x\big\}$ есть марковский момент, то из (3.2) при $\mu \in [0, \widehat{\mu}_+)$, $t < T$, следует, что

$$\mathbf{E}(e^{\mu Z(T)} \,|\, \eta_Z(x) = t) \geqslant \mathbf{E}e^{\mu x + \mu Z(T-t)} = ce^{\mu x + (T-t)A(\mu)}(1 + \varepsilon_{T-t}). \tag{3.3}$$

Воспользуемся неравенством

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} \geqslant \int\limits_0^T \mathbf{E}\big(e^{\mu Z(T)};\, \eta_Z(x) \in dt\big) \geqslant \int\limits_0^T \mathbf{P}\big(\eta_Z(x) \in dt\big)\mathbf{E}\big(e^{\mu(x + Z(T) - Z(t)} \,|\, \eta_Z(x) = t\big)$$

Из него и из (3.3) при $\mu \in [0, \widehat{\mu}_+)$ получаем

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} \geqslant c\int\limits_0^T e^{\mu x + (T-t)A(\mu)}(1 + \varepsilon_{T-t})\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in dt).$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$(1 + \varepsilon_T) \geqslant e^{\mu x}\int\limits_0^T e^{-tA(\mu)}(1 + \varepsilon_t)\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in dt),$$

$$1 \geqslant e^{\mu x}\int\limits_0^T e^{-tA(\mu)}\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in dt)\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.4}$$

При $A(\mu) \leqslant 0$ это дает

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) = \mathbf{P}(\eta_Z(x) \leqslant T) \leqslant \int\limits_0^T e^{-tA(\mu)}\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in dt) \leqslant e^{-\mu x}\big(1 + o(1)\big). \tag{3.5}$$

Если $\alpha \in [0, \alpha_0]$, то $\mu(\alpha) \in [0, \mu_0]$. Полагая в (3.5) $\mu = \mu_0$, получаем первое неравенство в (3.1).

При $A(\mu) \geqslant 0$ в силу (3.4) имеем

$$\mathbf{P}\bigl(\overline{Z}(T) \geqslant x\bigr) \leqslant \int_0^T e^{-tA(\mu)+TA(\mu)}\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in dt) \leqslant e^{-\mu x+TA(\mu)}\bigl(1+o(1)\bigr). \tag{3.6}$$

Если $\alpha = x/T \in [\alpha_0, \widehat{\alpha}_+)$, то $\mu(\alpha) \in [\mu_0, \widehat{\mu}_+)$, $A\bigl(\mu(\alpha)\bigr) \geqslant 0$, и полагая в (3.6) $\mu = \mu(\alpha)$, получим

$$-\mu x + TA(\mu) = -T\Bigl(\alpha\mu(\alpha) - A\bigl(\mu(\alpha)\bigr)\Bigr) = -TD(\alpha).$$

Это доказывает второе неравенство в (3.1). Теорема 3.1 доказана.

Ясно, что в случае $A(\widehat{\mu}_+) > 0$ при $\alpha = \alpha_0$ выполняется $\mu(\alpha) = \mu(\alpha_0) = \mu_0$, $A(\mu_0) = 0$, $D(\alpha_0) = \alpha_0\mu_0$ и правые части в (3.1) совпадают.

§ 4. Точная асимптотика моментов ОПВ

Как и в предыдущем разделе, мы ограничимся для упрощения формулировок и доказательств рассмотрением однородных ОПВ.

4.1. **Предварительные результаты.** Введем в рассмотрение случайные величины

$$\eta(t) = \min\{t : T_k > t\} = \nu(t) + 1,$$
$$\chi(t) = T_{\eta(t)} - t, \quad \gamma(t) = t - T_{\nu(t)}, \quad \zeta(t) = \zeta_{\eta(t)}.$$

В этом и следующем разделах мы не будем предполагать, что вектор (τ, ζ) удовлетворяет условию Крамера, но всегда будет предполагаться, что существуют

$$\mathbf{E}\tau =: a_\tau \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\zeta =: a_\zeta.$$

Наряду с $Z(t)$ нам понадобится также процесс

$$Y(t) = Z_{\eta(t)} = Z(t) + \zeta(t),$$

(его мы также будем называть ОПВ) и функция восстановления

$$H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(T_k \leqslant t),$$

соответствующая однородной последовательности $\{T_k\}$. Имеем

$$\mathbf{E}\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\bigl(\eta(t) > k\bigr) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(T_k \leqslant t) = H(t),$$

Так как

$$T_{\eta(t)} = t + \chi(t),$$

то в силу тождества Вальда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}T_{\eta(t)} &= a_\tau \mathbf{E}\eta(t) = t + \mathbf{E}\chi(t), \\ \mathbf{E}\eta(t) &= H(t) = \frac{t + \mathbf{E}\chi(t)}{a_\tau}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть распределение τ нерешетчато. Тогда*

(i). *Всегда существуют собственные предельные распределения:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\bigl(\gamma(t) \geqslant u, \chi(t) \geqslant v, \zeta(t) \geqslant w\bigr) = \frac{1}{a_\tau}\int_u^\infty \mathbf{P}(\tau \geqslant y+v,\ \zeta \geqslant w)dy, \tag{4.2}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\bigl(\zeta(t) \geqslant w\bigr) = \frac{\mathbf{E}(\tau;\, \zeta \geqslant w)}{a_\tau}. \tag{4.3}$$

(ii). *Всегда существуют постоянные $c_1 \in (0,\infty)$ и $c_2 \in (1/a_\tau, \infty)$, такие, что*

$$\begin{aligned} \sup_t \mathbf{P}\bigl(\gamma(t) \geqslant u,\ \chi(t) \geqslant v,\ \zeta(t) \geqslant w\bigr) &\leqslant \\ \leqslant c_1 \mathbf{P}(\tau \geqslant u+v, \zeta \geqslant w) &+ c_2 \int_u^\infty \mathbf{P}(\tau > y+v, \zeta \geqslant w)dy. \end{aligned} \tag{4.4}$$

(iii). *Если $\mathbf{E}\tau^k < \infty$, то*

$$\mathbf{E}\gamma^k(t) = o(t), \qquad \mathbf{E}\chi^k(t) = o(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{4.5}$$

Если $\mathbf{E}\tau^{k+1} < \infty$, то для нерешетчатых τ

$$\mathbf{E}\gamma^k(t) \to \frac{\mathbf{E}\tau^{k+1}}{(k+1)a_\tau}, \qquad \mathbf{E}\chi^k(t) \to \frac{\mathbf{E}\tau^{k+1}}{(k+1)a_\tau} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{4.6}$$

Если $\mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty$ при $\lambda > 0$, то

$$\mathbf{E}e^{\lambda\gamma(t)} \to \frac{\mathbf{E}e^{\lambda\tau} - 1}{a_\tau \lambda} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{4.7}$$

Такое же соотношение справедливо для $\chi(t)$.

Если f — измеримая функция и $\mathbf{E}\tau\bigl|f(\zeta)\bigr| < \infty$, то

$$\mathbf{E}f\bigl(\zeta(t)\bigr) \to \frac{\mathbf{E}\tau f(\zeta)}{a_\tau} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{4.8}$$

Из леммы следует, что предельные значения моментов случайных величин $\gamma(t)$, $\chi(t)$, $\zeta(t)$ совпадают с моментами величин γ_∞, χ_∞, ζ_∞, совместное распределение которых равно

$$\mathbf{P}(\gamma_\infty \geqslant u,\ \chi_\infty \geqslant v,\ \zeta_\infty \geqslant w) = \frac{1}{a_\tau}\int_u^\infty \mathbf{P}(\tau \geqslant y+v, \zeta \geqslant w)dy \tag{4.9}$$

(см. (4.2)).

Если распределение τ арифметично, то интегралы в (4.9) заменятся суммами и значения правых частей в (4.6), (4.7) станут немного иными.

Доказательство леммы 4.1. Для однородных ОПВ в силу основной теоремы восстановления для нерешетчатых τ имеем

(4.10)

$$\mathbf{P}\big(\gamma(t) \geqslant u,\ \chi(t) \geqslant v,\ \zeta(t) \geqslant w\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t-u} \mathbf{P}(T_k \in dy)\mathbf{P}(\tau \geqslant t-y+v,\ \zeta \geqslant w) =$$

$$= \int_0^{t-u} dH(y)\mathbf{P}(\tau \geqslant t-y+v,\ \zeta \geqslant w) \to \frac{1}{\mathbf{E}\tau}\int_u^{\infty} \mathbf{P}(\tau \geqslant y+v, \zeta \geqslant w)dy$$

при $t \to \infty$.

(ii). Для функции восстановления $H(t)$ всегда существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 1/a_\tau$ такие, что

$$H(t) \leqslant c_1 + c_2 t \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0.$$

С другой стороны, подинтегральная функция $\mathbf{P}(\tau \geqslant t-y+v, \zeta \geqslant w)$ в (4.10) возрастает с ростом y. Поэтому левая часть в (4.10), равная 0 при $t \leqslant u$, не превосходит

$$c_1\mathbf{P}(\tau \geqslant t+v, \zeta \geqslant w) + c_2 \int_0^{t-u} \mathbf{P}(\tau \geqslant t-y+v, \zeta \geqslant w)dy \tag{4.11}$$

при $t \geqslant u$. Отсюда вытекает (4.4).

(iii). Утверждение (4.5) следует из (4.11). Если $\mathbf{E}\tau^{k+1} < \infty$, то из (4.9) следует, что функция

$$u^k\mathbf{P}(\gamma_\infty \geqslant u) = \frac{u^k}{a_\tau}\int_u^{\infty} \mathbf{P}(\tau \geqslant u)dy$$

является интегрируемой. Поэтому в силу разделов (i), (ii) теоремы мы можем пользоваться теоремой о мажорируемой сходимости, по которой

$$\mathbf{E}\gamma^k(t) \to \mathbf{E}\gamma_\infty^k = \frac{1}{a_\tau}\int_0^{\infty} y^k\mathbf{P}(\tau \geqslant y)dy = \frac{\mathbf{E}\tau^{k+1}}{(k+1)a_\tau}.$$

Аналогично доказываются и другие соотношения в (4.6). Для получения последнего утверждения надо воспользоваться соотношениями вида

$$\mathbf{E}\zeta(t) = \mathbf{E}\big(\zeta(t);\, \zeta(t) \geqslant 0\big) + \mathbf{E}\big(\zeta(t);\, \zeta(t) < 0\big) = \int_0^{\infty} \mathbf{P}\big(\zeta(t) \geqslant w\big)dw - \int_{-\infty}^{0} \mathbf{P}\big(\zeta(t) \leqslant w\big)dw.$$

Лемма 4.1 доказана.

4.2. **Асимптотика моментов $Z(t)$, $Y(t)$ первого и второго порядков.** Обозначим

$$\xi_i = \zeta_i - a\tau_i, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i = Z_n - aT_n, \tag{4.12}$$

так что ξ_i при $i \geqslant 1$ суть независимые копии случайной величины

$$\xi = \zeta - a\tau, \qquad \mathbf{E}\xi = 0. \tag{4.13}$$

Теорема 4.1. *Пусть $Z(t)$, $Y(t)$ — однородные ОПВ. Тогда*

(i). *Справедливы соотношения*

$$\mathbf{E}Y(t) = a\big(t + \mathbf{E}\chi(t)\big) = at + r_Y(t), \qquad r_Y(t) = o(t), \tag{4.14}$$

$$\mathbf{E}Z(t) = a\big(t + \mathbf{E}\chi(t)\big) - \mathbf{E}\zeta(t) = at + r_Z(t), \qquad r_Z(t) = o(t), \tag{4.15}$$

при $t \to \infty$.

(ii). *Если $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, то в (4.14) справедливо асимптотическое разложение, в котором в нерешетчатом случае*

$$r_Y(t) = \frac{a_\zeta \mathbf{E}\tau^2}{2a_\tau^2} + o(1). \tag{4.16}$$

Если к тому же $\mathbf{E}|\tau\zeta| < \infty$, то в (4.15)

$$r_Z(t) = \frac{a_\zeta \mathbf{E}\tau^2}{2a_\tau^2} - \frac{\mathbf{E}\tau\zeta}{a_\tau} + o(1). \tag{4.17}$$

(iii). *Если $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, $\sigma_\xi^2 := \mathbf{D}\xi < \infty$, то при $t \to \infty$*

$$DY(t) = \frac{\sigma_\xi^2 t}{a_\tau} + o(t), \tag{4.18}$$

$$DZ(t) = \frac{\sigma_\xi^2 t}{a_\tau} + o(t). \tag{4.19}$$

Если дополнительно $\mathbf{E}\tau^3 < \infty$, то

$$\mathbf{D}Y(t) = \frac{\sigma_\xi^2 t}{a_\tau} + O(\sqrt{t}). \tag{4.20}$$

Такое же представление справедливо для $\mathbf{D}Z(t)$.

Доказательство. (i), (ii). Используя тождество Вальда и соотношение (4.1), находим

$$\mathbf{E}Y(t) = \mathbf{E}Z_{\eta(t)} = a_\zeta \mathbf{E}\eta(t) = a\big(t + \mathbf{E}\chi(t)\big).$$

В силу леммы 4.1 это доказывает (4.14).

Аналогично

$$\mathbf{E}Z(t) = \mathbf{E}Y(t) - \mathbf{E}\zeta(t)$$

и, стало быть, справедливо (4.15). Значения $\mathbf{E}\chi(t)$, $\mathbf{E}\zeta(t)$ в случаях $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, $\mathbf{E}|\tau\zeta| < \infty$ определяются соответственно формулами (4.6), (4.8). Это доказывает (4.16), (4.17).

Значения $r_Y(t)$, $r_Z(t)$ в арифметическом случае также могут быть найдены.

(iii). Имеем

$$\mathbf{D}Y(t) = \mathbf{E}\Big[Y(t) - a\big(t + \mathbf{E}\chi(t)\big)\Big]^2 = \mathbf{E}\Big[Z_{\eta(t)} - aT_{\eta(t)} + a\big(\chi(t) - \mathbf{E}\chi(t)\big)\Big]^2 =$$
$$= \mathbf{E}\Big[S_{\eta(t)} + a(\chi(t) - \mathbf{E}\chi(t))\Big]^2.$$

В силу тождества Вальда

$$\mathbf{E}S_{\eta(t)}^2 = \sigma_\xi^2 \mathbf{E}\eta(t) = \frac{\sigma_\xi^2(t+\mathbf{E}\chi(t))}{a_\tau}$$

(см., например, теорему 15.2.5 в [6]). Поэтому

$$\mathbf{D}Y(t) = \frac{\sigma_\xi^2(t+\mathbf{E}\chi(t))}{a_\tau} + a^2\mathbf{D}\chi(t) + 2a\mathbf{E}S_{\eta(t)}\big(\chi(t)-\mathbf{E}\chi(t)\big). \tag{4.21}$$

Так как $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, то $\mathbf{D}\chi(t) = \mathbf{E}\chi^2(t) - \big(\mathbf{E}\chi(t)\big)^2 = o(t)$ при $t \to \infty$ и в силу неравенства Коши–Буняковского для $\big|\mathbf{E}S_{\eta(t)}\big(\chi(t)-\mathbf{E}\chi(t)\big)\big|$ получаем

$$\mathbf{D}Y(t) = \frac{\sigma_\xi^2 t}{a_\tau} + o(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{4.22}$$

Это доказывает (4.18). Совершенно аналогично устанавливается (4.19). Если $\mathbf{E}\tau^3 < \infty$, то значение $\mathbf{D}\chi(t)$ равномерно по t ограничено и мы получаем (4.20).

Теорема 4.1 доказана.

Параметр

$$\sigma^2 := \frac{\sigma_\xi^2}{a_\tau}$$

в (4.18), (4.19) можно интерпретировать как «удельную» (на единицу времени) асимптотическую дисперсию процессов $Y(t)$, $Z(t)$.

4.3. **Точная асимптотика моментов ОПВ более высокого порядка.** Оценка моментов величины $Z(T) - aT$ более высоких порядков наталкиваются на существенные технические трудности. Однако в случае, когда выполнено условие Крамера для (τ, ζ), мы можем аналогично тому, как это делалось в § 2, получить с помощью интегро-локальных теорем точную асимптотику для моментов $\mathbf{E}\big|Z(T)-aT\big|^k$ при любом $k>0$ и оценки для моментов $\big(Z(T)-aT\big)$ целого нечетного порядка $k \geqslant 3$.

Теорема 4.2. *Пусть $Z(t)$ — однородный ОПВ, нерешетчатый вектор (τ,ζ) удовлетворяет условию $[\mathbf{C}]$, w есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $(0,1)$. Тогда при любом $k>0$*

$$\mathbf{E}\big|Z(T)-aT\big|^k = \sigma^k T^{k/2}\,\mathbf{E}|w|^k\big(1+o(1)\big) \quad \textit{при} \quad T\to\infty. \tag{4.23}$$

Если $k \geqslant 3$ целое и нечетное число, то

$$\mathbf{E}\big[Z(T)-aT\big]^k = o(T^{k/2}) \quad \textit{при} \quad T\to\infty.$$

Утверждение (4.23) остается верным и в случае, когда хотя бы одна из компонент τ или ζ арифметична. Появление условий на структуру распределения (τ,ζ) в теореме 4.2 связано с использованием в ее доказательстве интегро-локальной теоремы для $Z(T)$. Ясно, что с существом дела в этом раздели эти условия не связаны, но найти простой способ избавиться от них не удается.

Если τ и ζ независимы, то утверждение (4.23) нетрудно получить, если воспользоваться следующим неравенством, установленным в работе [7]:

$$\mathbf{P}\left(|z_T - w| > \frac{b\ln T}{\sqrt{T}} + \frac{y}{\sqrt{T}}\right) \leqslant ce^{-\lambda y}$$

при некоторых $b > 0$, $c < \infty$, $\lambda > 0$ и всех достаточно больших T, где $z_T = \frac{Z(T)-aT}{\sigma\sqrt{T}}$, а процессы $Z(tT)$ и $w(t)$ построены подходящим образом на одном вероятностном пространстве. Если положить $h_T = \frac{b\ln T}{\sqrt{T}}$ и воспользоваться представлением $z_T = w + r_T$, где $\mathbf{P}\left(|r_T| > h_T + \frac{y}{\sqrt{T}}\right) \leqslant ce^{-\lambda y}$, то нетрудно получить соотношение

$$\mathbf{E}|z_T|^k = \mathbf{E}|w + r_T|^k = \mathbf{E}|w|^k + O(h_T).$$

Доказательство теоремы 4.2. Представим разность $Z(T) - aT$ в виде

$$Z(T) - aT = Z_{\nu(T)} - aT_{\nu(T)} - a\gamma(T) = S_{\nu(T)} - a\gamma(T),$$

где, как и прежде, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $\xi_k = \zeta_k - a\tau_k$, $\mathbf{E}\xi_k = 0$. Процесс $S_{\nu(t)}$ есть ОПВ с нулевым средним. Величины $\gamma(T)$ при всех T имеют равномерно ограниченный экспоненциальный момент (см. § 4.1) и в силу теоремы 4.1 $\mathbf{E}S^2_{\nu(T)} \to \infty$ при $T \to \infty$, так что $\mathbf{E}|S_{\nu(T)}|^k \to \infty$ при $k \geqslant 2$ и $T \to \infty$. Отсюда нетрудно извлечь, что

$$\mathbf{E}\big|Z(T) - aT\big|^k = \mathbf{E}|S_{\nu(T)}|^k\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Поэтому задача об асимптотике моментов $\mathbf{E}\big|Z(T) - aT\big|^k$ сводится к задаче об асимптотике моментов $\mathbf{E}\big|Z(T)\big|^k$ для ОПВ $Z(t)$ с нулевым средним.

Итак, пусть $a = 0$. Для доказательства (4.23) будем следовать схеме доказательства теоремы 2.1. Обозначим

$$E_k(\mu, B) = \mathbf{E}\left(\big|Z(T)\big|^k e^{\mu Z(T)};\ \ \frac{Z(T)}{T} \in B\right), \quad E_k(B) = E_k(0, B).$$

Разобьем при некотором $h > 0$ вещественную прямую $\mathbb{R}$ на три части

$$B_1 = (-\infty, -h), \qquad B_2 = [-h, h), \qquad B_3 = [h, \infty),$$

так что

$$E_k(\mathbb{R}) = \sum_{j=1}^3 E_k(B_j). \tag{4.24}$$

Далее, степенная функция x^k растет при $x \to \infty$ медленнее любой экспоненты:

$$x^k \leqslant c_{k,\mu}e^{\mu x} \quad \text{при} \quad x > 0, \mu > 0,$$

где $c_{k,\mu}$ зависит лишь от k и μ. Отсюда следует, что

$$E_k(B_3) \leqslant c_{k,\mu}E_0(\mu, B_3).$$

Из доказательства теоремы 2.1 следует, что так как окрестность точки $a = 0$ принадлежит компакту $\widehat{K}$, окрестность точки $\mu = 0$ принадлежит $(\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$, то в силу (2.3), (2.9)

$$E_0(\mu, B_3) \leqslant e^{T(A(\mu)-\varepsilon)}$$

при некотором $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших T. Так как $A(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$, то μ можно выбрать так, что $A(\mu) = \varepsilon/2$. Мы получим тогда, что

$$E_k(B_3) \leqslant c_{k,\mu} e^{-T\varepsilon/2} \tag{4.25}$$

при всех достаточно больших T. Аналогично оценивается $E_k(B_1)$.

Для оценки

$$\mathbf{E}\bigl|Z(T)\bigr|^k = E_k(\mathbb{R})$$

нам остается найти асимптотику значения $E_k(B_2)$, которое дает главную часть асимптотики $E_k(\mathbb{R})$. Выберем $\Delta > 0$ и положим

$$x_j = j\Delta, \qquad j = -M, \dots, M-1,$$

где для простоты считаем $M = \frac{hT}{\Delta}$ целым числом. Интеграл

$$E_k(B_2) = \int\limits_{-hT}^{hT} |x|^k \mathbf{P}\bigl(Z(T) \in dx\bigr)$$

представим в виде сумм

$$E_k(B_2) = \sum_{j=-M}^{M-1} \int\limits_{\Delta[x_j)} |x|^k \mathbf{P}\bigl(Z(T) \in dx\bigr) = \Bigl[\sum_{j=-M}^{M-1} |x_j|^k \mathbf{P}\bigl(Z(T) \in \Delta[x_j)\bigr)\Bigr]\bigl(1+o(1)\bigr)$$

при $\Delta \to 0$. Согласно теореме 1.3 ($\psi_1 = 1$ в однородном случае) и замечанию в ее конце о том, что для α в окрестности точки $a = 0$ выполняется

$$\psi_1 C(\alpha) I_Z(\alpha) = \frac{1+o(1)}{\sigma\sqrt{2\sigma}} \quad \text{при} \quad \alpha \to 0,$$

получаем при $T \to \infty$, $\Delta = \overline{o}(1)$, $\alpha_j = \frac{x_j}{T}$ соотношение

$$\begin{aligned} E_k(B_2) &= \bigl(1+o(1)\bigr) \sum_{j=-M}^{M} \frac{\Delta}{\sqrt{T}} \, |\alpha_j T|^k \psi_1 C(\alpha_j) I_Z(\alpha_j) e^{-TD(\alpha_j)} = \\ &= \frac{\bigl(1+o(1)\bigr)T^{k/2}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-M}^{M-1} \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{T}} \, |\alpha_j \sqrt{T}|^k e^{-TD(\alpha_j)}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Так как

$$TD(\alpha_j) = \frac{T\alpha_j^2}{2\sigma^2} + O(|\alpha_j|^3 T)$$

при $\alpha_j \to 0$, то

$$TD(\alpha_j) = \frac{T\alpha_j^2}{2\sigma^2} + o(1) \quad \text{при} \quad \alpha_j = o(T^{-1/3})$$

и

$$TD(\alpha_j) = \frac{T\alpha_j^2}{2\sigma^2}\bigl(1+o(1)\bigr) \quad \text{при} \quad \alpha_j = o(1), \quad T \to \infty.$$

Сделав в (4.26) замену $y_j = \frac{\alpha_j \sqrt{T}}{\sigma}$, мы получим $y_{j+1} - y_j = \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{T}}$,

$$E_k(B_2) = \frac{(1+o(1))\sigma^k T^{k/2}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-M}^{M-1} \left(\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{T}}\right) |y_j|^k e^{-\frac{y_j^2}{2}}. \tag{4.27}$$

Так как сумма в правой части (4.27) является интегральной суммой для интеграла $\int\limits_{-h\sqrt{T}}^{h\sqrt{T}} |y|^k e^{-y^2/2} dy$, то мы находим

$$E_k(B_2) = \sigma^k T^{k/2} \mathbf{E}|w|^k \big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{4.28}$$

Сравнивая (4.28), (4.24), (4.25), получаем (4.23). Второе утверждение теоремы нетрудно извлечь из приведенных выше оценок и того, что $\mathbf{E}w^k = 0$ при целых нечетных k. Теорема 4.2 доказана.

Утверждение теоремы 4.2 без труда можно обобщить до следующего соотношения

$$\mathbf{E}f\left(\frac{Z(T) - aT}{\sigma\sqrt{T}}\right) \to \mathbf{E}f(w) \quad \text{при} \quad T \to \infty$$

для любой непрерывной функции $f(v) \geqslant 0$, растущей на бесконечности медленнее любой экспоненты ($\big(\ln f(v)\big)^+ = o\big(|v|\big)$ при $|v| \to \infty$). Для знакопеременных функций f того же вида следует воспользоваться соотношением

$$\mathbf{E}f\left(\frac{Z(T) - aT}{\sigma\sqrt{T}}\right) \to \mathbf{E}f^+(w) - \mathbf{E}f^-(w) \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

где f^+, f^-, соответственно, положительная и отрицательная части f.

References

[1] Borovkov A. A., Mogulskii A. A., *Integro-Local Limit Theorems for Compound Renewal Processes under Cramer'S Condition. I, II*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 383–402; **59**:4 (2018), 578–597. MR3879625; MR3879647

[2] Borovkov A. A., *Asymptotic analysis of random walks. Fast decaying distributions of jumps*, M.: Fizmatlit, 2013.

[3] Borovkov A. A., Mogulskii A. A., Prokopenko E. I., *Properties of the deviation function of a compound renewal process and the asymptotics of the Laplace transform over its distribution*, Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya, **64**:4 (2019), 625–641. MR4030814

[4] Borovkov A. A., Mogulskii A. A., *Large deviations principles for finite-dimensional distributions of compound renewal processes*, Siberian Mathematical Journal, **56**:1 (2015), 28–53. MR3407938

[5] Borovkov A. A., *Integro-local limit theorems for compound renewal processes*, Theory of Probability and its Applications, **62**:2 (2018), 175–195. MR3649033

[6] *Borovkov A. A.* Probability Theory. 5th ed., M.: Knizhnyj dom "LIBROKOM", 2009.

[7] Csörgo M., Deheuvels P. and Hervatt L., *An approximation of stopped sums with applications in queueing theory*, Adv. Appl. Probability, **19** (1987), 674–690. MR903542

Alexandr Alekseevich Borovkov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: borovkov@math.nsc.ru