УДК 511.3

# О закономерностях появления первых цифр простых чисел

**В. А. Попов**
ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»,
Россия, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55
E-mail: kgpi-pva@yandex.ru

В работе для $k = 1,2,\ldots,9$ и больших натуральных чисел *n* исследуется задача о величине вероятности, что простое число, не превосходящее $k \cdot 10^n$, начинается на десятичную цифру $m$.

***Ключевые слова***: закон Бенфорда, асимптотика распределения простых чисел, статистика первых цифр простых чисел.

# On the regularities of the appearance of the first digits of Prime numbers

V. A. Popov
*Pitirim Sorokin Syktyvkar State University,*
*Syktyvkar 55, Octyabrskyi ave., Syktyvkar, 167001, Russia*
*E-mail address: kgpi-pva@yandex.ru*

In this paper, for $k = 1,2,\ldots,9$ and large natural numbers *n*, we investigate the problem of the probability that a Prime number not exceeding $k \cdot 10^n$ begins with the decimal digit $m$.

***Key words***: Benford's law, asymptotic distribution of primes, statistics of the first digits of primes.

Вопреки следующего высказывания, приписываемому Леонарду Эйлеру: «Математики уже давно тщетно пытаются найти закономерности в последовательности простых чисел, но у меня есть основания полагать, что это тайна, в которую человеческий разум никогда не сможет проникнуть» [1, с. 135], интенсивные исследования по проблематике простых чисел продолжаются.

Объяснений этому – множество. Например, выявление все больших простых чисел ведет к разработке новых алгоритмов для расчетов и компьютерных вычислений. Наличие большого списка простых чисел зачастую позволяет опровергать гипотезы, не являющиеся истинными.

В одном из распространённых методов генерации псевдослучайных чисел –линейный конгруэнтный метод – создаваемая этим методом случайная последовательность ведёт себя вполне непредсказуемо именно тогда, когда в нем значение одного из применяемых параметров является большим простым числом [2].

В век цифровых технологий во многих аспектах жизни требуется защита информации. Для этого в современных криптографических алгоритмах применяются ключи, т.е. некая секретная информация, используемая при шифровании (дешифровании) сообщений, постановке и проверке цифровой подписи, вычислении кодов аутентичности. Эти ключи вырабатываются на основе использования многозначных случайных простых чисел.

В работе рассматривается задача о закономерностях появления конкретной первой цифры в записях простых чисел из рассматриваемого достаточно длинного отрезка натурального ряда чисел.

Она возникла в связи с работой [3], в которой, в рамках рассмотрения цикла учебных задач при овладении компьютерными технологиями, были вычислены относительные частоты появления конкретных первых цифр у простых чисел, меньших чем $10^7$:

Таблица 1

Статистика первых цифр простых чисел, меньших $10^7$

| 1-я цифра простого числа | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % доля на $[1;10^7]$ | 12.04 | 11.59 | 11.33 | 11.15 | 10.98 | 10.87 | 10.77 | 10.69 | 10.58 |

Эти доли, в отличие от аналогичных, например, для натуральных степеней числа 2 и чисел Фибоначчи [3, таблицы 1 и 2], оказались сильно отличающимися от значений закона Бенфорда (для десятичной системы счисления) [4]. По этому закону вероятность того, что первая цифра числа $x \geq 1$ равна $m$ ($m \in \{1,2, \ldots,9\}$), составляет $\lg(m+1) - \lg m = \lg\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ (в процентах, с точностью до 0,1 эти значения представлены ниже):

Таблица 2

Статистика первых цифр, соответствующая закону Бенфорда

| 1-я цифра числа $x \geq 1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % доля | 30.1 | 17.6 | 12.5 | 9.7 | 7.9 | 6.7 | 5.8 | 5.1 | 4.6 |

Размышления над причинами указанных отличий привели к выявлению ряда закономерностей частоты появления у простых чисел определенной первой цифры, которые были представлены в докладе на Национальной (Всероссийской) научной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии (7–9 ноября 2019 г., г. Сыктывкар)» [5].

Пусть $n$ – произвольное натуральное число, а $m, k \in \{1,2, \ldots,9\}$. Обозначим через $p_n^{(m)}(k)$ вероятность события: «Простое число, меньшее чем $k \cdot 10^{n+1}$, начинается на цифру $m$». Далее будем применять также известное обозначение (К. Гаусса) $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих $x$.

Рассмотрим сначала случай $k = 1$.

Заметим, что число не однозначных простых чисел, начинающихся на цифру $m$ и меньших $10^{n+1}$, равно

$$S_n^{(m)}(1) = \sum_{i=1}^{n} \left(\pi\left((m+1) \cdot 10^i\right) - \pi\left(m \cdot 10^i\right)\right), \tag{1}$$

а соответствующая вероятность $p_n^{(m)}(1) = \left(a_m + S_n^{(m)}(1)\right)/\pi(10^{n+1})$, где $a_m = 1$ при $m = 2,3,5,7$ и $a_m = 0$ – в остальных случаях.

Очевидно, что ненулевыми значениями параметра $a_m$ при оценке искомых вероятностей для больших $n$ можно пренебречь, поэтому слагаемое $a_m/\pi(10^{n+1})$ в последующих выкладках будет пропущено.

Для оценки поведения величин $S_n^{(m)}(1)/\pi(10^{n+1})$ при $n \to \infty$ применим

- асимптотику, доказанную Ж. Адамаром и Ш. Валле-Пуссеном в 1896 г. [6, с. 179]:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \tag{2}$$

- оценочные неравенства:

$$\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < 1{,}25506 \cdot \frac{n}{\ln n} \quad \text{при } n \geq 17 \ \ [7, \text{с. } 69], [8, \text{с. } 127]. \tag{3}$$

В силу (2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, для которого

$$n > n_0 \Rightarrow \pi(n) < (1+\varepsilon)\frac{n}{\ln n}. \tag{4}$$

Учитывая замечание выше относительно $a_m$, при больших $n$ для $n > n_0$, в силу (1) , (3) и (4) имеем:

$$p_n^{(m)}(1) = \frac{1}{\pi(10^{n+1})} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} \left(\pi\left((m+1)\cdot 10^i\right) - \pi\left(m \cdot 10^i\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{\pi(10^{n+1})} \cdot \sum_{i=n_0+1}^{n} \left(\pi\left((m+1)\cdot 10^i\right) - \pi\left(m \cdot 10^i\right)\right) <$$

$$< \frac{(n+1)\ln 10}{10^{n+1}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} \left(\frac{1{,}25506(m+1)10^i}{\ln(m+1) + i\cdot\ln 10} - \frac{m\cdot 10^i}{\ln m + i\cdot \ln 10}\right) +$$

$$+\frac{(n+1)\ln 10}{10^{n+1}} \cdot \sum_{i=n_0+1}^{n} \left(\frac{(1+\varepsilon)(m+1)10^i}{\ln(m+1) + i\cdot\ln 10} - \frac{m\cdot 10^i}{\ln m + i\cdot \ln 10}\right) <$$

$$< A_n^{(m)}(\varepsilon) + (1+\varepsilon)B_n^{(m)}, \tag{5}$$

где $A_n^{(m)}(\varepsilon)$ – величина первого слагаемого предыдущей суммы, а

$$B_n^{(m)} = \frac{(n+1)\ln 10}{10^{n+1}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{10^i}{\ln(m+1) + i\cdot\ln 10}.$$

Ясно, что для любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $m \in \{1,2,\dots,9\}$ имеем

$$A_n^{(m)}(\varepsilon) \to 0.$$

Последовательности вида $B_n^{(m)}$ рассматривались нами в работе [9]. Вычисления в Excel для различных $m$ с ростом $n$ до 250 показали, что эти величины все меньше отличаются друг от друга (см. [9, таблица 7]) и от числа 1/9.

На основе указанных фактов была сформулирована следующая

**Теорема 1.** Для каждого фиксированного $m \in \{1,2,\dots,9\}$ последовательности вероятностей $p_n^{(m)}(1)$ событий «Простое число, меньшее чем $10^{n+1}$, начинается на цифру $m$» при $n \to \infty$ сходятся к числу 1/9.

Доказательство. Заметим, что $B_n^{(1)} \geq B_n^{(2)} \geq \cdots \geq B_n^{(9)}$.

С другой стороны, методом математической индукции для всех натуральных чисел $n$ стандартно доказывается оценка

$$B_n^{(1)} < \frac{n+2}{9n}. \tag{6}$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ при $n > n_0$ из (5) и (6) получаем

$$p_n^{(m)}(1) < A_n^{(m)}(\varepsilon) + (1+\varepsilon)\frac{n+2}{9n}.$$

Отсюда и из свойства $A_n^{(m)}(\varepsilon) \to 0$ выводим неравенства:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, p_n^{(m)}(1) \leq \frac{1+\varepsilon}{9}.$$

Так как они обоснованы для любого $\varepsilon > 0$, то для каждого $m$ получаем следующую оценку верхнего предела:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, p_n^{(m)}(1) \leq \frac{1}{9}. \tag{7}$$

Покажем, что на самом деле при любом фиксированном $m \in \{1,2,\dots,9\}$ последовательность чисел $p_n^{(m)}(1)$ сходится к 1/9.

Действительно, если предположить противное, то для некоторой ненулевой цифры $m_0$ и некоторого числа $\delta > 0$ найдется последовательность номеров $k_n$ для которых

$$\lim_{n\to\infty} p_{k_n}^{(m_0)}(1) = \frac{1}{9} - \delta\,.$$

Тогда, начиная с некоторого номера $n_1$, для всех $n$ будут выполняться неравенства:

$$p_{k_n}^{(m_0)}(1) < \frac{1}{9} - \frac{\delta}{2}.$$

Так как все числа вида $p_{k_n}^{(m)}(1) \in [0;1]$, то можно выделить (последовательно, за не более, чем 8 шагов) подпоследовательность номеров, обозначим ее $\left(j_{k_n}\right)$, для которой при каждом фиксированном $m \neq m_0$ подпоследовательности чисел $\left(p_{j_{k_n}}^{(m)}(1)\right)$ будут тоже сходящимися.

В силу условия (7) их пределы не превышают числа 1/9. Поэтому найдется номер $n_2 > n_1$ такой, что для всех $m \neq m_0$ выполняется неравенства

$$p\,_{j_{k_{n_2}}}^{(m)}(1) < \frac{1}{9}\left(1 + \frac{\delta}{2}\right).$$

Однако тогда возникает следующее противоречие:

$$1 = \sum_{m=1}^{9} p\,_{j_{k_{n_2}}}^{(m)}(1) < \left(\frac{1}{9} - \frac{\delta}{2}\right) + \frac{8}{9}\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) < 1.$$

Таким образом, сделанное выше предположение ложно, поэтому для каждой цифры $m$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} p_n^{(m)}(1) = \frac{1}{9}$.

Используя свойства (2) и (3), показанным выше методом для каждого из значений $k = 2,3,\dots,9$ можно пытаться выявить аналогичные верхние оценки для $p_n^{(m)}(k)$ и их предельные величины соответственно для промежутков натурального ряда от 1 до $k \cdot 10^{n+1}$ (эти величины приведены далее в таблице 3). Применим другой метод поиска этих предельных значений.

Истинна следующая теорема, позволяющая оценивать значения $p_n^{(m)}(k+1)$ с помощью уже известных величин $p_n^{(m)}(k)$:

**Теорема 2.** Пусть $n$ – произвольное достаточно большое натуральное число, а $m, k \in \{1,2,\dots,9\}$. Если известны значения $p_n^{(m)}(k)$ – вероятности событий «Простое число, меньшее чем $k \cdot 10^{n+1}$, начинается на цифру $m$», то для простых чисел, меньших чем $(k+1)\cdot 10^{n+1}$, соответствующие аналогичные вероятности оцениваются следующим образом:

$$\begin{cases} p_n^{(m)}(k+1) \sim \dfrac{k}{k+1} \cdot p_n^{(m)}(k) \text{ при } m \neq k; \\ p_n^{(k)}(k+1) \sim \dfrac{1}{k+1} \cdot \left(1 + k \cdot p_n^{(k)}(k)\right). \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство. Заметим, что простых чисел, начинающихся на цифру $m$, на промежутке от 1 до $k \cdot 10^{n+1}$ всего по $p_n^{(m)}(k) \cdot \pi(k \cdot 10^{n+1})$, а на промежутке от $k \cdot 10^{n+1}$ до $(k+1)\cdot 10^{n+1}$ все простые числа начинаются на цифру $k$ и их там $\pi((k+1)\cdot 10^{n+1}) - \pi(k \cdot 10^{n+1})$.

1. Следовательно, для искомых вероятностей при $m \neq k$ имеем:

$$p_n^{(m)}(k+1) = \frac{p_n^{(m)}(k)\cdot \pi\left(k\cdot 10^{n+1}\right)}{\pi\left((k+1)\cdot 10^{n+1}\right)}.$$

Отсюда, в силу (3) и (4) для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_1 = n_1(\varepsilon)$, для которого при $n > n_1$ истинны неравенства:

$$\frac{k}{(k+1)(1+\varepsilon)} \cdot M_n < \frac{p_n^{(m)}(k+1)}{p_n^{(m)}(k)} < \frac{k(1+\varepsilon)}{k+1} \cdot M_n,$$

где $M_n = \frac{\ln\left((k+1)\cdot 10^{n+1}\right)}{\ln\left(k\cdot 10^{n+1}\right)}$.

Так как при $n \to \infty$ последовательность чисел $M_n$ сходиться к 1, то эти оценки означают, что начиная с некоторого номера $n_0 > n_1$ имеем

$$\frac{k(1-\varepsilon)}{(k+1)(1+\varepsilon)} < \frac{p_n^{(m)}(k+1)}{p_n^{(m)}(k)} < \frac{k(1+\varepsilon)^2}{k+1}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n^{(m)}(k+1)}{p_n^{(m)}(k)} = \frac{k}{k+1}, \qquad \text{т. е.} \quad p_n^{(m)}(k+1) \sim \frac{k}{k+1} \cdot p_n^{(m)}(k).$$

2. Для $m = k$ имеем:

$$p_n^{(k)}(k+1) = \frac{p_n^{(k)}(k) \cdot \pi(k \cdot 10^{n+1}) + \pi((k+1) \cdot 10^{n+1}) - \pi(k \cdot 10^{n+1})}{\pi((k+1) \cdot 10^{n+1})} =$$

$$= \left(p_n^{(k)}(k) - 1\right) \cdot \frac{\pi(k \cdot 10^{n+1})}{\pi((k+1) \cdot 10^{n+1})} + 1.$$

Отсюда следует

$$\frac{1 - p_n^{(k)}(k+1)}{1 - p_n^{(k)}(k)} = \frac{\pi(k \cdot 10^{n+1})}{\pi((k+1) \cdot 10^{n+1})}.$$

Тогда, как и в первом случае для любого $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого номера $n_0$ будут выполняться неравенства:

$$\frac{k(1-\varepsilon)}{(k+1)(1+\varepsilon)} < \frac{1 - p_n^{(k)}(k+1)}{1 - p_n^{(k)}(k)} < \frac{k(1+\varepsilon)^2}{k+1}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - p_n^{(k)}(k+1)}{1 - p_n^{(k)}(k)} = \frac{k}{k+1}, \text{ а тогда } p_n^{(k)}(k+1) \sim \frac{1}{k+1} \cdot \left(1 + k \cdot p_n^{(k)}(k)\right).$$

Теорема 2 обоснована.

Факты существования предельных значений для $p_n^{(m)}(1)$ из теоремы 1 и свойства (8) позволяют вывести существование (и вычисление) предельных значений для $p_n^{(m)}(k)$ при фиксированных $m$ и $k = 2,3,\ldots,9$:

**Следствие.** Имеет место следующая таблица приближенных ответов для исследуемых вероятностей $p_n^{(m)}(k)$ на промежутках от 1 до $k \cdot 10^{n+1}$ при очень больших $n$ (т.е. их предельных величин для значений $k = 1,2,3,\ldots,9$ на промежутках от 1 до $k \cdot 10^{n+1}$ при $n \to \infty$):

Таблица 3

Сводная таблица предельных значений для первых цифр простых чисел

| 1-я цифра простого числа $m$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Оценка $p_n^{(m)}(1)$ на промежутке $[1; 1 \cdot 10^{n+1}]$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |
| 2. Оценка $p_n^{(m)}(2)$ на промежутке $[1; 2 \cdot 10^{n+1}]$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ |
| 3. Оценка $p_n^{(m)}(3)$ на промежутке $[1; 3 \cdot 10^{n+1}]$ | $\frac{10}{27}$ | $\frac{10}{27}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{27}$ |
| 4. Оценка $p_n^{(m)}(4)$ на промежутке $[1; 4 \cdot 10^{n+1}]$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 5. Оценка $p_n^{(m)}(5)$ на промежутке $[1; 5 \cdot 10^{n+1}]$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{45}$ | $\frac{1}{45}$ | $\frac{1}{45}$ | $\frac{1}{45}$ | $\frac{1}{45}$ |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6. Оценка $p_n^{(m)}(6)$ на промежутке $[1; 6 \cdot 10^{n+1}]$ | $\frac{5}{27}$ | $\frac{5}{27}$ | $\frac{5}{27}$ | $\frac{5}{27}$ | $\frac{5}{27}$ | $\frac{1}{54}$ | $\frac{1}{54}$ | $\frac{1}{54}$ | $\frac{1}{54}$ |
| 7. Оценка $p_n^{(m)}(7)$ на промежутке $[1; 7 \cdot 10^{n+1}]$ | $\frac{10}{63}$ | $\frac{10}{63}$ | $\frac{10}{63}$ | $\frac{10}{63}$ | $\frac{10}{63}$ | $\frac{10}{63}$ | $\frac{1}{63}$ | $\frac{1}{63}$ | $\frac{1}{63}$ |
| 8. Оценка $p_n^{(m)}(8)$ на промежутке $[1; 8 \cdot 10^{n+1}]$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{72}$ | $\frac{1}{72}$ |
| 9. Оценка $p_n^{(m)}(9)$ на промежутке $[1; 9 \cdot 10^{n+1}]$ | $\frac{10}{81}$ | $\frac{10}{81}$ | $\frac{10}{81}$ | $\frac{10}{81}$ | $\frac{10}{81}$ | $\frac{10}{81}$ | $\frac{10}{81}$ | $\frac{10}{81}$ | $\frac{1}{81}$ |

В заключение отметим, что выше (в случае десятичной системы) были установлены некоторые закономерности последовательности чисел, образованной из первых цифр простых чисел, рассматриваемых в порядке возрастания:

$$2,3,5,7,1,1,1,1,2,2,3,3,4,4,4,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,1,\ldots \qquad (9)$$

(здесь написаны ее члены, соответствующие первым простым числам до числа 101 включительно).

Они существенно отличаются от закономерности Бенфорда, являются новыми в теории натуральных чисел и могут иметь важное значение, например, в криптологии, так как по теореме 1 при выборе многозначного простого числа (который не должен быть отгадан “противной стороной”) в качестве основы шифра-ключа из промежутка $[1;10^n]$ при больших $n$, для первых цифр нет особых предпочтений, они равновероятны, что не выполняется в случае других промежутков (см. следствие к теореме 2).

Видимо, аналогичные закономерности необходимо выявить для последовательностей вторых (соответственно, третьих и т.д.) цифр последовательности все простых чисел.

Имеет смысл ввести для изучения число

$$\tau = 0{,}23571111223344455667778891\ \ldots,$$

десятичные цифры которого образованы из членов последовательности (9).

По теореме 1 для очень больших $n$ среди первых $\pi(10^{n+1})$ десятичных цифр числа $\tau$ ненулевые цифры встречаются примерно поровну, а ввиду данных таблицы 3 это число иррационально.

Далее, в силу (2) элементарно доказывается, что для любого фиксированного $k$ при $n \to \infty$ величины

$$\pi\big((k+1) \cdot 10^{n+1}\big) - \pi(k \cdot 10^{n+1}) \to \infty.$$

Это означает (см. первый абзац доказательства теоремы 2), что в записи числа $\tau$ для любой цифры $k \neq 0$ встречаются фрагменты любой длины, состоящие из одинаковых цифр $k$.

Было бы интересно найти другие свойства этого числа $\tau$.

## Источники


1. Энрике Грасиан. Простые числа. Долгая дорога к бесконечности: Мир математики: в 40 т. Т. 3. – М.: Де Агостини, 2014. – 144 с.
2. Гончарук В. С., Атаманов Ю. С., Гордеев С. Н. Методы генерации случайных чисел // Молодой ученый. — 2017. — №8. — С. 20-23. — URL https://moluch.ru/archive/142/40025/ (дата обращения: 09.09.2019).
3. Попов В. А., Канева Е. А. Исследовательские задания на занятиях по овладению компьютерными технологиями // Математическое моделирование и информационные

технологии: сборник статей Международной научной конференции (10-11 ноября 2017 г., г. Сыктывкар / отв. ред. А.В. Ермоленко. Сыктывкар: СГУ им. Питирима Сорокина, 2017. С. 109–113.

4. Кувакина Л. В., Долгополова А. Ф. Закон Бенфорда: Сущность и применение // Современные наукоемкие технологии, № 6, 2013. С. 74–76; То же [Электронный ресурс]. URL: https://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=31987 (дата обращения: 21.07.2017).

5. Попов В. А. О статистике первых цифр простых чисел // Математическое моделирование и информационные технологии: Национальная (Всероссийская) научная конференция (7–9 ноября 2019 г., г. Сыктывкар) : сборник материалов в [Электронный ресурс] : текстовое научное электронное издание на компакт-диске / отв. ред. А.В. Ермоленко; Федер. гос. бюдж. образоват. учреждение высш. образования «Сыктыв. гос. ун-т им. Питирима Сорокина». – Электрон. текстовые дан. (1,6 Мб) – Сыктывкар : Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2019. – 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). – С. 35-36.
6. Цагер Д. (Zagier Don). Первые 50 миллионов простых чисел. *УМН*, **39**:6(240) (1984), 175–190.
7. Rosser J. Barkley, Schoenfeld Lowell. Approximate formulas for some functions of prime numbers // Illinois J. Math. – 1962. – Vol. 6. – P. 64-94.
8. Рибенбойм П. (Ribenboim P.) Рекорды простых чисел (новая глава в книге рекордов Гиннеса). *УМН*, **42**:5(257) (1987), 119–176.

9. Попов В. А., Канева Е. А. «Длинная» арифметика в исследованиях статистики первых цифр степеней двойки, чисел Фибоначчи и простых чисел // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2019, 2 (31), с. 58-63.