S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК ???.?

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC ??X??

О ПРОСТЫХ ГРАФАХ, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ НЕТЕРОВЫМИ ПО УРАВНЕНИЯМ

И.М. БУЧИНСКИЙ, А.В. ТРЕЙЕР

Abstract. The paper shows that a simple graph is equationally Noetherian if and only if it is equationally Noetherian in one variable. Based on this fact, all simple graphs are described that are not equationally Noetherian.

Keywords: simple graphs, equationally noetherian, one variable equations.

1. Введение

Исследованием решений уравнений над различными алгебраическими системами занимается направление математики с названием «Универсальная алгебраическая геометрия». Существует немало работ, посвященных этой тематике. Достаточно большой список таких статей и теоретическую основу по универсальной алгебраической геометрии можно найти в монографии [1]. Настоящая работа также относится к этому направлению исследований.

Важным свойством алгебраических систем, с точки зрения алгебраической геометрии, является свойство нетеровости по уравнениям. Алгебраическая система является нетеровой по уравнениям, если любая система уравнений над этой алгебраической системой эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме. Для краткости изложения, иногда мы будем пользоваться термином «нетеров», подразумевая под этим понятие нетеровости по уравнениям.

Нетеровы алгебраические системы достаточно удобны для описания решений систем уравнений над ними. В этом случае существует общий теоретический подход, позволяющий взглянуть на алгебраические множества с разных точек зрения. Описание этого подхода можно найти в параграфе «Объединяющие теоремы для нетеровых по уравнениям алгебраических систем» из [1], а также в работе [2]. Список нетеровых по уравнениям алгебраических систем достаточно широк. В этом списке, в частности, содержатся все конечные алгебраические системы, абелевы группы, линейные группы, гиперболические группы без кручения [1], свободные разрешимые группы произвольных ступеней разрешимости и рангов [7]. Список ненетеровых алгебраических систем тоже достаточно большой. К примеру, ненетеровыми являются сплетения неабелевой группы и бесконечной группы [4], бесконечная прямая степень неабелевой группы или полугруппы [6], есть примеры двуступенно нильпотентных групп и конечнопорожденных центрально-метабелевых групп, не являющихся нетеровыми по уравнениям [7]. Далее рассмотрим примеры нетеровых и ненетеровых графов более детально.

Пусть $\mathcal{L} = \{E(x, y)\}$ — язык теории графов, где $E(x, y)$ предикат соседства вершин x и y. Так как мы рассматриваем системы уравнений от конечного набора переменных и язык $\mathcal{L}$ не содержит констант, то в языке $\mathcal{L}$ все простые графы являются нетеровыми в силу того, что в этом языке не существует бесконечных систем уравнений. Таким образом, вопрос нетеровости для графов имеет смысл рассматривать для языка $\mathcal{L}$, расширенного некоторым набором констант. Поэтому для произвольного простого графа Γ мы будем рассматривать уравнения в языке $\mathcal{L}_\Gamma = \mathcal{L} \cup \{V(\Gamma)\}$. Уравнения, заданные в языке с множеством констант, расширенным всеми элементами алгебраической системы, называются диофантовыми уравнениями. В статье мы работаем только с диофантовыми уравнениями над простыми графами.

Известно, что нетеровыми по уравнениям являются все локально конечные графы, то есть графы, в которых степень любой вершины конечна. Этот факт достаточно просто обосновать, используя лемму 1, доказанную в [8]. В то же время среди не локально конечных графов есть много графов, являющихся нетеровыми. В частности, непосредственно проверяется с помощью леммы 1 из параграфа 3, что любой граф, содержащий конечное количество вершин бесконечной степени, является нетеровым. Но также существуют и графы, являющиеся нетеровыми по уравнениям, в которых есть бесконечное число вершин бесконечной степени. С другой стороны отметим, что бесконечная клика K ненетерова по уравнениям.

Настоящая статья посвящена решению двух связанных проблем о нетеровости по уравнениям для графов. Первая проблема сформулирована в работе [5] для групп:

Проблема 1. Пусть группа $G = \langle G, \mathcal{L}_{gr,G} \rangle$ нётерова по уравнениям от одной переменной. Следует ли отсюда, что группа G нётерова по уравнениям?

Аналогичный вопрос можно задать для категории простых графов. Положительный ответ на него дает теорема 1 из параграфа 3. Второй проблемой, решаемой в статье, является описание всех нетеровых по уравнениям графов. Эта проблема решается в теореме 2 из параграфа 4 на языке запрещенных подграфов для класса нетеровых графов. Кроме того, в следствии 2 показано, что множество неизоморфных ненетеровых графов континуально мощно.

2. Предварительные сведения

Неориентированным графом называется пара множеств (V, E), где V — непустое множество вершин, а E — множество неупорядоченных пар элементов из V, называемых ребрами. Простым графом называют граф без кратных ребер и петель. Всюду далее мы будем рассматривать только простые графы.

Все используемые нами в этой статье стандартные определения из теории графов, такие как вложение графов, подграф, индуцированный подграф, можно найти в книге [9].

Введём используемые нами понятия алгебраической геометрии над алгебраическими системами, следуя монографии [1]. Несмотря на то, что эти понятия носят универсальный характер, мы приведем их в адаптации на язык теории графов.

Язык $\mathcal{L} = \{E^{(2)}\}$ назовем языком простых графов. Произвольный простой граф является алгебраической системой над языком $\mathcal{L}$. Пусть Γ — простой неориентированный граф. Расширение языка $\mathcal{L}$ множеством вершин графа Γ: $\mathcal{L}_\Gamma = \mathcal{L} \cup V(\Gamma)$, назовем языком простых графов с константами из Γ. Утверждение о том, что вершины u и v смежны, записывается в виде уравнения $E(u,v)$ языка $\mathcal{L}_\Gamma$. Язык $\mathcal{L}_\Gamma$ допускает только шесть видов уравнений: $E(x,y), x=y, E(x,c), x=c, E(c_1,c_2), c_1=c_2$, где x,y — неизвестные, c,c_1,c_2 — константы. Любое множество таких уравнений называется системой уравнений языка $\mathcal{L}_\Gamma$.

Точка $\mathbf{a} \in \Gamma^n$ называется решением уравнения $s(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}_\Gamma$ от n переменных $\mathbf{x} = \{x_1,\ldots,x_n\}$ над графом Γ, если $\Gamma \models s(\mathbf{a})$. Точка $\mathbf{a} \in \Gamma^n$ называется решением системы уравнений $S(\mathbf{x})$ над графом Γ, если $\mathbf{a}$ является решением каждого уравнения системы $S(\mathbf{x})$. Множество всех решений системы уравнений $S(\mathbf{x})$ называется алгебраическим множеством над Γ.

Две системы уравнений $S_1(\mathbf{x})$ и $S_2(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$ называются эквивалентными над графом Γ, если их множества решений совпадают. Граф Γ называется нётеровым по уравнениям, если для любого целого положительного n любая система уравнений $S(\mathbf{x})$ от n переменных $\mathbf{x}$ эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(\mathbf{x}) \subseteq S(\mathbf{x})$. Будем говорить, что граф Γ нётеров по уравнениям от n переменных, если любая система уравнений $S(\mathbf{x})$ от n переменных $\mathbf{x}$ эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(\mathbf{x}) \subseteq S(\mathbf{x})$, то есть является нётеровой.

Уравнения, состоящие только из констант: $E(c_1,c_2), c_1 = c_2$, либо всегда ложны, либо всегда истинны. Системы таких уравнений можно заменить одним заведомо ложным или истинным уравнением вида $c_1 = c_2$. Поэтому мы не будем рассматривать системы уравнений, содержащие бесконечное количество уравнений, состоящих только из констант.

3. Уравнения от одной переменной над графами

В [8] представлена лемма, которая является критерием ненётеровости по уравнениям для алгебраических систем. В оригинальной формулировке леммы есть ограничение на язык алгебраической системы: он не должен содержать предикатных символов. Однако это ограничение не является существенным, и доказательство леммы без каких-либо изменений верно для произвольной алгебраической системы. Приведем формулировку этой леммы.

Лемма 1. *Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}\rangle$ не является нётеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда найдутся последовательность элементов $(\boldsymbol{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\boldsymbol{a}_i \in A^n$, и последовательность уравнений $(s_i(\boldsymbol{x}))_{i\in\mathbb{N}}$, $\boldsymbol{x} = \{x_1,\ldots,x_n\}$ языка $\mathcal{L}$ такие, что $\mathcal{A} \not\models s_i(\boldsymbol{a}_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{A} \models s_j(\boldsymbol{a}_i)$ для всех $j < i$.*

Отметим, что из доказательства леммы 1 следует ещё и такое утверждение:

Следствие 1. *В любой ненетеровой системе уравнений $S(\boldsymbol{x})$ от n переменных $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ над алгебраической системой A существует бесконечная подсистема уравнений $S' = \{s_1(\boldsymbol{x}), \ldots, s_i(\boldsymbol{x}), \ldots\}$ и последовательность элементов $(\boldsymbol{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\boldsymbol{a}_i \in A^n$, для которых выполнены условия леммы 1, то есть система S' не является нетеровой по уравнениям. Кроме того, любая бесконечная подсистема $S'' \subset S'$ и соответствующая ей подпоследовательность элементов $(\boldsymbol{a}'_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset (\boldsymbol{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ тоже удовлетворяют лемме 1, то есть не является нетеровой по уравнениям.*

Следующее предложение истинно по той причине, что в языке теории графов $\mathcal{L}_\Gamma$ есть лишь конечное число типов уравнений.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{L}$ — язык простых графов и S — бесконечная система уравнений языка $\mathcal{L}$ от конечного множества переменных $\boldsymbol{x}$, не содержащая бесконечных подсистем уравнений, состоящих только из констант. Тогда существует бесконечная подсистема уравнений $S^1 \subset S$ от одной переменной из множества $\boldsymbol{x}$*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $S = S^c \cup S' \cup S^{x_1} \cup \ldots \cup S^{x_n}$, где подсистема S^{x_i} содержит уравнения только от одной переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$, S' содержит уравнения только без констант, S^c содержит уравнения только с константами. Так как количество неизвестных конечно, то подсистема S' конечна. S^c конечна по условию. Отсюда следует, что по крайней мере какая-то из подсистем S^{x_i}, $i = 1, \ldots, n$, является бесконечной. $\square$

Следующая теорема дает положительный ответ на проблему 1 из [5], сформулированную для графов.

Теорема 1. *Пусть Γ — простой граф, не являющийся нетеровым в языке простых графов с константами $\mathcal{L}_\Gamma = \{E^{(2)}\} \cup V(\Gamma)$. Тогда существует последовательность уравнений $S = (E(x, b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ от одной переменной x, для которой выполнены условия леммы 1, то есть граф Γ не является нетеровым по уравнениям от одной переменной.*

Доказательство. По следствию 1 существуют бесконечная система уравнений $S(\mathbf{x})$ и последовательность элементов $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющих лемме 1. По утверждению 1 существует бесконечная подсистема уравнений $S' \subseteq S$ от одной переменной x. По следствию 1 подсистема S' также ненетерова. Тогда $S'(x) = \{E(x, b_i) | i \in I_1\} \cup \{x = c_i | i \in I_2\}$. Так как система S' ненетерова, то в ней не может быть уравнений вида $x = c$. $\square$

4. Графы, не являющиеся нетеровыми по уравнениям

В этом параграфе мы сформулируем и докажем критерий о том, когда произвольный простой граф ненетеров по уравнениям. Начнем с определения базового ненетерова графа, играющего важную роль в построении этого критерия.

Определение 1. *Пусть $V = \{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots\}$ — счетное множество. Граф N с множеством вершин V и множеством ребер $\{(a_i, b_j) | i > j\}$ назовем базовым ненетеровым графом. Вершины a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}$, назовем парными вершинами. Заметим, что парные вершины не являются смежными.*

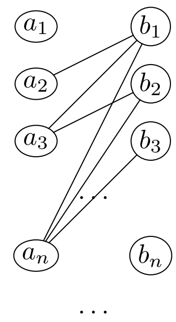

Рис. 1. Граф N

Последовательности уравнений $(E(x,b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ и вершин $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ в базовом нетеровом графе удовлетворяют условиям леммы 1, а значит наличие слова «ненетеров» в названии этого графа корректно.

Определение 2. *Вложение φ базового ненетерова графа N в некоторый граф Γ назовем ненетеровым, если оно сохраняет несмежность между парными вершинами графа N. В случае существования такого вложения будем говорить, что граф N ненетерово вложим в граф Γ.*

Следущая лемма поясняет почему мы выбрали название «ненетерово вложение» для вложения из определения выше.

Лемма 2. *Если существует ненетерово вложение графа N в граф Γ, то граф Γ ненетеров по уравнениям в языке $\mathcal{L}_\Gamma$.*

Доказательство. Пусть φ — ненетерово вложение графа N в граф Γ. В графе Γ рассмотрим последовательности уравнений $S = \{E(x,\varphi(b_i))\}_{i\in\mathbb{N}}$ и вершин $A = \{\varphi(a_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$. По определению ненетерова вложения, $\varphi(a_i)$ несмежно с $\varphi(b_i)$ в силу того, что a_i и b_i — парные вершины в графе N. По определению вложения графов, $\varphi(a_j)$ смежно с $\varphi(b_i)$ для всех $j > i$ в силу смежности вершин a_j и b_i в графе N. Следовательно, последовательности уравнений S и вершин A удовлетворяют условиям леммы 1 в графе Γ. $\square$

По мнению авторов, утверждение следующей леммы хоть и является интуитивно понятным, но все же требует обоснования.

Лемма 3. *Любой граф, содержащий в качестве индуцированного подграфа ненетеров граф, ненетеров по уравнениям.*

Доказательство. По теореме 1, в произвольном ненетеровом графе Γ существуют последовательности уравнений $(E(x,b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ и вершин $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ таких, что $\Gamma \not\models E(a_i,b_i)$ для всех i и $\Gamma \models E(a_i,b_j)$ для всех $i > j$. Пусть Γ индуцированный подграф графа H. По определению индуцированного подграфа, $E_\Gamma(u,v) = E_H(u,v)$. Значит последовательности уравнений $(E(x,b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ и вершин $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ удовлетворяют условиям леммы 1 в графе H. $\square$

Докажем теорему, которая по формулировке является критерием ненетеровости для всех простых графов. Этот же критерий, очевидно, можно рассматривать как необходимое и достаточное условие нетеровости простых графов.

Теорема 2. *Граф ненетеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он либо содержит в качестве индуцированного подграфа счетную клику, либо в него ненетерово вкладывается базовый ненетеров граф N.*

Доказательство. «$\Leftarrow$» Утверждение о ненетеровости всякого графа, в который ненетерово вложим граф N, сформулировано и доказано в лемме 2.

Покажем, что счетная клика K ненетерова. Обозначим её вершины через $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Рассмотрим последовательности уравнений $(E(x, a_i))_{i \in \mathbb{N}}$ и вершин $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Поскольку уравнения $E(a_i, a_i)$ ложны в категории простых графов, то они удовлетворяют условиям леммы 1. Следовательно клика K ненетерова. Тогда по лемме 3 имеем, что любой граф, в который индуцированно вкладывается клика K, ненетеров.

«$\Rightarrow$» Пусть граф Γ ненетеров по уравнениям. Тогда по теореме 1, в нем существуют последовательности вершин $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ и уравнений $S(x) = (E(x, b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ таких, что $\Gamma \not\models E(a_i, b_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $\Gamma \models E(a_i, b_j)$ для всех $i > j$.

Верна следующая техническая лемма:

Лемма 4. *В обозначениях выше, если все вершины $a_i, b_j,\ i, j \in \mathbb{N}$, попарно различны в графе Γ, то граф N ненетерово вкладывается в граф Γ.*

Доказательство. Действительно, граф N ненетерово вкладывается в граф Γ с помощью вложения ϕ, заданного по правилам: $\phi : c_i \mapsto a_i$ и $\phi : d_i \mapsto b_i,\ i \in \mathbb{N}$, где c_i, d_i — парные вершины базового ненетерова графа N. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы.

Пусть все вершины графа Γ: $a_i,\ b_j,\ i, j \in \mathbb{N}$, попарно различны. По лемме 4 базовый ненетеров граф N ненетерово вкладывается в Γ. Тогда по лемме 2 граф Γ ненетеров по уравнениям.

Пусть теперь не все из вершин a_i, b_j, где $i, j \in \mathbb{N}$, попарно различны. Рассмотрим возможные случаи. Во-первых, заметим, что b_i не может совпадать с b_j для любых i, j, так как в системе S нет одинаковых уравнений. Во-вторых, a_i не может совпадать с a_j для всех $i < j$, в силу смежности a_j с b_i и несмежности a_i с b_i. В-третьих, вершина a_i не может совпадать с b_j при $i > j$, в силу их смежности. Следовательно, совпадение может быть только между вершинами a_i и b_j, если $i \leq j$. Рассмотрим подробней этот случай.

Пусть $I_c = \{i \in \mathbb{N} | a_i = b_j, i \leq j\}$ — конечное множество. Тогда существуют бесконечная подсистема уравнений $(E(x, b_i))_{i \notin I_c}$ и подпоследовательность вершин $(a_i)_{i \notin I_c}$, где все a_i и b_j попарно различны и система является ненетеровой, в силу следствия 1. В этом случае по лемме 4 граф N ненетерово вкладывается в граф Γ. Далее будем считать, что I_c — бесконечное множество.

Пусть $I_p = \{j \in \mathbb{N} | a_j = b_j\} \subset I_c$ — бесконечное множество. Рассмотрим бесконечную подсистему $S' \subseteq S$, в которой все a_i и b_i такие, что $i \in I_p$. В силу ложности уравнений $E(a_i, a_i)$ очевидно, что для S' выполняются условия леммы 1. Так как вершина a_i смежна с b_j для всех $i > j$ и b_i смежна с a_k для всех $k > i$, получаем, что a_i смежна с a_j для всех $i \neq j$. Таким образом, индуцированный подграф графа Γ, построенный на вершинах $a_i,\ i \in \mathbb{N}$, есть счетная клика. Далее будем считать, что множество I_p — пустое.

Пусть $I'_c = \{i \in \mathbb{N} | a_i = b_j, i < j\}$. Заметим, что $I_c = I'_c \sqcup I_p$. Так как I_p — пусто по предыдущим рассуждениям, то I'_c — бесконечно.

Упорядочим элементы множества $I'_c = \{i_1 < \ldots < i_k < \ldots\}$. Построим подсистему $S' \subset S$, пошагово включая в S' уравнения из S по следующему правилу. Положим $m = min_{i \in I'_c}(i)$. На первом шаге система S' пуста и $m = m_1 = i_1$. Включим в S' уравнение $E(x, b_m)$. Пусть индекс j_m такой, что $a_m = b_{j_m}$, где $m < j_m$. Удалим из множества I'_c элемент m, а также элемент j_m, если он принадлежит множеству I'_c. Отметим, что на втором шаге процедуры минимальный элемент m_2 множества I'_c может быть равен i_2 или i_3. Повторяя описанную процедуру мы полностью переберем множество I'_c за счетное количество шагов, так как на каждом шаге из I'_c удаляется минимальный элемент. Имеем, что система S' счетна, ненетерова по следствию 1, и все a_{m_i} и b_{m_j}, $i, j \in \mathbb{N}$, попарно различны. Следовательно, по лемме 4 граф N ненетерово вкладывается в Γ. □

Возникает естественный вопрос о мощности множества всех ненетеровых простых графов. Ответ дает следующий результат:

Следствие 2. *Множество всех ненетеровых графов континуально мощно.*

Доказательство. Пусть $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$ — множество вершин базового ненетерова графа N, и пусть $I \subseteq \mathbb{N}$. Обозначим через N_I граф, полученный из N отождествлением парных вершин a_i, b_i для всех $i \in I$. По теореме 2 граф N_I не является нетеровым по уравнениям. С другой стороны, если $I_1 \neq I_2$, то графы N_{I_1} и N_{I_2} не изоморфны. Следовательно, ненетеровых графов не меньше, чем количество подмножеств множества натуральных чисел. □

References

[1] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V., *Algebraic geometry over algebraic systems*, Publishing House of SB RAS, Novosibirsk, 2016, 243 p.

[2] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V., *Unification theorems in algebraic geometry*, Algebra and Discrete Mathematics. **1** (2008). 80-112.

[3] Daniyarova E.U., Miasnikov A.G., Remeslennikov V.N., *Algebraic geometry over algebraic systems. II. Foundations*, Fundament. and app. math. **17**:1 (2012). 65-106. (in Russian).

[4] Baumslag G., Myasnikov A., Roman'kov V., *Two theorems about Equationally noetherian groups*, J. Algebra. **194** (1997). 654-664.

[5] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V., *Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and ideal theory*, J. Algebra. **219** (1999). 16-79.

[6] Shahriyary M., Shevlyakov A., *Direct products, varieties, and compactness conditions*, Groups Complexity Cryptology, Volume **9**, Issue 2, Pages 159–166.

[7] Gupta Ch.K., Romanovskii N.S., *The property of being equationally Noetherian for some soluble groups*, Algebra and Logic, **46**:1 (2007), 46–59.

[8] Kotov M.V., *On equationally Noetherian property*, Herald of Omsk University, 2013, no. **2**, pp. 24–28. (in Russian).

[9] R. Diestel, *Graph theory*, Novosibirsk: Institute of Mathematics Publishing House, 2002.

Ivan Mikhailovich Buchinskiy
Omsk branch of Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova street, 13,
644043, Omsk, Russia
Email address: buchvan@mail.ru

Alexander Viktorovich Treyer
Omsk branch of Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova street, 13,
644043, Omsk, Russia
Email address: alexander.treyer@gmail.com