S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК ???.?
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC ??X??

О ГРАФАХ, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ НТЕРОВЫМИ ПО УРАВНЕНИЯМ

И.М. БУЧИНСКИЙ, А.В. ТРЕЙЕР

Abstract. The paper shows that an arbitrary graph is equationally Noetherian if and only if it is equationally Noetherian in one variable. Based on this fact, all simple graphs and graphs with loops that are not equationally Noetherian are described.

Keywords: simple graphs, graphs with loops, graph groups, equationally noetherian, one variable equations.

1. Введение

Исследованием решений уравнений над различными алгебраическими системами занимается направление математики с названием «Универсальная алгебраическая геометрия». Существует немало работ, посвященных этой тематике. Достаточно большой список таких статей и теоретическую основу по универсальной алгебраической геометрии можно найти в монографии [1]. Настоящая работа также относится к этому направлению исследований.

Важным свойством алгебраических систем, с точки зрения алгебраической геометрии, является свойство нётеровости по уравнениям. Алгебраическая система является нётеровой по уравнениям, если любая система уравнений от конечного набора переменных над этой алгебраической системой эквивалентна некоторой своей конечной подсистеме. Для краткости изложения, иногда мы будем пользоваться термином «нётеров граф», подразумевая под этим граф, являющийся нётеровым по уравнениям.

нётеровы алгебраические системы достаточно удобны для описания решений систем уравнений над ними. В этом случае существует общий теоретический подход, позволяющий взглянуть на алгебраические множества с разных точек зрения. Описание этого подхода можно найти в параграфе «Объединяющие теоремы для нётеровых по уравнениям алгебраических систем» из [1], а также в работе [2]. Список нётеровых по уравнениям алгебраических систем достаточно широк. В этом списке, в частности, содержатся все конечные алгебраические системы, абелевы группы, линейные группы, гиперболические группы без кручения [1], свободные разрешимые группы произвольных ступеней разрешимости и рангов [7]. Список ненётеровых алгебраических систем тоже достаточно большой. К примеру, ненётеровыми являются сплетения неабелевой группы и бесконечной группы [4], бесконечная прямая степень неабелевой группы или полугруппы [6], есть примеры двуступенно нильпотентных групп и конечно-порожденных центрально-метабелевых групп, не являющихся нётеровыми по уравнениям [7]. Далее рассмотрим примеры нётеровых и ненётеровых графов более детально.

Пусть $\mathcal{L} = \{E(x, y)\}$ — язык теории графов, где $E(x, y)$ предикат соседства вершин x и y. Так как мы рассматриваем системы уравнений от конечного набора переменных и язык $\mathcal{L}$ не содержит констант, то в языке $\mathcal{L}$ все графы являются нётеровыми в силу того, что в этом языке не существует бесконечных систем уравнений. Таким образом, вопрос нётеровости для графов имеет смысл рассматривать для языка $\mathcal{L}$, расширенного некоторым набором констант. Поэтому для произвольного графа Γ мы будем рассматривать уравнения в языке $\mathcal{L}_\Gamma = \mathcal{L} \cup \{V(\Gamma)\}$. Уравнения, заданные в языке с множеством констант, расширенным всеми элементами алгебраической системы, называются диофантовыми уравнениями. В статье мы работаем только с диофантовыми уравнениями над графами.

Известно, что нётеровыми по уравнениям являются все локально конечные графы, то есть графы, степень любой вершины которых конечна. Этот факт достаточно просто обосновать, используя лемму 1, доказанную в [8]. В то же время, среди не локально конечных графов есть много графов, являющихся нётеровыми. В частности, непосредственно проверяется с помощью леммы 1 из параграфа 3, что любой граф, содержащий конечное количество вершин бесконечной степени, является нётеровым. Но также существуют и графы, являющиеся нётеровыми по уравнениям, в которых есть бесконечное число вершин бесконечной степени. С другой стороны отметим, что бесконечная клика K в категории простых графов ненётерова по уравнениям.

В статье мы будем рассматривать графы в двух категориях. Первая категория — это простые графы, то есть ненаправленные графы без кратных ребер и петель. Вторая категория — это ненаправленные графы без кратных ребер, но с петлями, то есть для любой вершины v графа этой категории мы считаем, что пара (v, v) является ребром. Первую категорию графов будем обозначать символом $\mathfrak{S}$, а вторую — $\mathfrak{L}$. Эти две категории используют один и тот же язык теории графов $\mathcal{L}$, поэтому любая система уравнений может быть рассмотрена и в категории $\mathfrak{S}$ и в категории $\mathfrak{L}$. Всюду далее в статье под словом "граф" мы понимаем либо граф из категории $\mathfrak{S}$, либо граф из категории $\mathfrak{L}$. Большинство полученных результатов статьи верны сразу для двух категорий, и, в этом случае, мы не указываем категорию графов, для которой этот результат верен. Где же это необходимо, мы явно указываем категорию $\mathfrak{S}$ или $\mathfrak{L}$.

Основной проблемой, решаемой в статье, является описание всех нётеровых по уравнениям графов в указанных выше категориях. Эта проблема решается в теореме 3 из параграфа 4 на языке запрещенных подграфов для класса нётеровых графов.

Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные замечания к работе.

2. Предварительные сведения

Неориентированным графом называется пара множеств (V, E), где V — непустое множество вершин, а E — множество неупорядоченных пар элементов из V, называемых ребрами. Все используемые нами в этой статье стандартные определения из теории графов, такие как вложение графов, подграф, индуцированный подграф, можно найти в книге [9].

Введём используемые нами понятия алгебраической геометрии над алгебраическими системами, следуя монографии [1]. Несмотря на то, что эти понятия носят универсальный характер, мы приведем их в адаптации на язык теории графов.

Язык $\mathcal{L} = \{E^{(2)}\}$ назовем языком графов. Произвольный граф является алгебраической системой над языком $\mathcal{L}$. Пусть Γ — неориентированный граф. Расширение языка $\mathcal{L}$ множеством вершин графа Γ: $\mathcal{L}_\Gamma = \mathcal{L} \cup V(\Gamma)$, назовем языком графов с константами из Γ. Утверждение о том, что вершины u и v смежны, записывается в виде уравнения $E(u, v)$ языка $\mathcal{L}_\Gamma$. Отметим, что для всякого простого графа уравнение $E(x, x)$ всегда ложно, в то время, как для графов с петлями оно истинно. Язык $\mathcal{L}_\Gamma$ допускает только шесть видов уравнений: $E(x, y), x = y, E(x, c), x = c, E(c_1, c_2), c_1 = c_2$, где x, y — неизвестные, c, c_1, c_2 — константы. Любое множество таких уравнений называется системой уравнений языка $\mathcal{L}_\Gamma$.

Точка $A \in \Gamma^n$ называется решением уравнения $s(X)$ языка $\mathcal{L}_\Gamma$ от n переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ над графом Γ, если $\Gamma \models s(A)$. Точка $A \in \Gamma^n$ называется решением системы уравнений $S(X)$ над графом Γ, если A является решением каждого уравнения системы $S(X)$. Множество всех решений системы уравнений $S(X)$ называется алгебраическим множеством над Γ и обозначается через $V_\Gamma(S(X))$.

Две системы уравнений $S_1(X)$ и $S_2(X)$ языка $\mathcal{L}$ называются эквивалентными над графом Γ, если их множества решений совпадают. Граф Γ называется нётеровым по уравнениям, если для любого целого положительного n любая система уравнений $S(X)$ от n переменных X эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(X) \subseteq S(X)$. Данное условие можно ослабить, введя понятие нётеровости графа от фиксированного числа переменных. Будем говорить, что граф Γ нётеров по уравнениям от n переменных, если любая система уравнений $S(X)$ от n переменных X эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(X) \subseteq S(X)$, то есть является нётеровой.

Уравнения, состоящие только из констант: $E(c_1, c_2), c_1 = c_2$, либо всегда ложны, либо всегда истинны. Системы таких уравнений можно заменить одним заведомо ложным или истинным уравнением вида $c_1 = c_2$. Поэтому мы не будем рассматривать системы уравнений, содержащие бесконечное количество уравнений, состоящих только из констант.

3. Уравнения от одной переменной над графами

В [8] представлена лемма, которая является критерием ненётеровости по уравнениям для алгебраических систем. В оригинальной формулировке леммы есть ограничение на язык алгебраической системы: он не должен содержать предикатных символов. Однако это ограничение не является существенным, и доказательство леммы без каких-либо изменений верно для произвольной алгебраической системы. Приведем формулировку этой леммы и ее доказательство для произвольной алгебраической системы.

Лемма 1. *Алгебраическая система $A = \langle A, \mathcal{L} \rangle$ не является нётеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда найдутся последовательность элементов $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $A_i \in A^n$, и последовательность уравнений $(s_i(X))_{i\in\mathbb{N}}$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ языка $\mathcal{L}$, для которых выполнено следующее условие:*

(1) $A \not\models s_i(A_i)$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$ *и* $A \models s_j(A_i)$ *для всех* $j < i$.

Доказательство. «$\Rightarrow$» Пусть алгебраическая система A не является нётеровой по уравнениям, тогда, по определению, найдётся система уравнений $S(X)$, не эквивалентная никакой своей конечной подсистеме. Покажем по индукции существование искомых последовательностей. В качестве a_0 выберем любой элемент из $A^n \setminus V_A(S(X))$, а в качестве $s_0(X)$ – такое уравнение системы $S(X)$, что $a_0 \notin V_A(s_0(X))$. Далее, положим a_1 равным какому-нибудь элементу из $V_A(s_0(X)) \setminus V_A(S(X))$, а в качестве $s_1(X)$ выберем любое уравнение из $S(X)$, для которого $a_1 \notin V_A(s_1(X))$. И так далее. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_m$ и $s_0(X), s_1(X), \ldots, s_m(X)$ с требуемыми свойствами уже построены. В качестве a_{m+1} выберем любой элемент из $V_A(s_0(X), s_1(X), \ldots, s_m(X)) \setminus V_A(S(X))$. Такой элемент всегда найдётся, так как $S(X)$ не эквивалентна никакой своей конечной подсистеме, а в качестве $s_{m+1}(X)$ выберем любое уравнение, для которого $a_{m+1} \notin V_A(s_{m+1}(X))$.

«$\Leftarrow$» Рассмотрим систему уравнений $S(X) = (s_i(X))_{i\in\mathbb{N}}$. Несложно заметить, что $a_i \notin V_A(S(X))$ для любого i, но для любой конечной подсистемы $S_0(X) = (s_i(X))_{i\in I}$ элемент a_{maxI+1} принадлежит $V_A(S_0(X))$. □

Будем говорить, что последовательности уравнений и элементов удовлетворяют лемме 1, если для них выполнены условие 1 из леммы 1.

Отметим, что из доказательства леммы 1 следует ещё и такое утверждение:

Следствие 1. *В любой ненётеровой системе уравнений $S(X)$ от n переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ над алгебраической системой A существует бесконечная подсистема уравнений $S' = \{s_1(X), \ldots, s_i(X), \ldots\}$ и последовательность элементов $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $A_i \in A^n$, для которых выполнены условия леммы 1, то есть система S' не является нётеровой по уравнениям. Кроме того, любая бесконечная подсистема $S'' \subset S'$ и соответствующая ей подпоследовательность элементов $(A'_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset (A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ тоже удовлетворяют лемме 1, то есть не является нётеровой по уравнениям.*

На основе вышеприведенных результатов сформулируем следующее предложение:

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{L} = \{P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, \ldots, P_m^{(2)}\}$ — язык с конечным числом бинарных предикатных символов и S — бесконечная система уравнений языка $\mathcal{L}$ от конечного множества переменных X, не содержащая бесконечных подсистем уравнений, состоящих только из констант. Тогда существует бесконечная подсистема уравнений $S^1 \subset S$ от одной переменной из множества X.*

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $S = S^c \cup S' \cup S^{x_1} \cup \ldots \cup S^{x_n}$, где подсистема S^{x_i} содержит уравнения только от одной переменной x_i, $i =$

$1,\dots,n$, S' содержит уравнения только без констант, S^c содержит уравнения только с константами. Так как количество неизвестных конечно, то подсистема S' конечна. S^c конечна по условию. Отсюда следует, что по крайней мере какая-то из подсистем $S^{x_i},\ i=1,\dots,n$ является бесконечной. □

Отметим, что предложение выше истинно для графов по той причине, что в их языке $\mathcal{L}_\Gamma$ есть лишь конечное число типов уравнений.

В [5] для групп сформулирована следующая проблема:

Проблема 1. Пусть группа $G=\langle G,\mathcal{L}_{gr,G}\rangle$ нётерова по уравнениям от одной переменной. Следует ли отсюда, что группа G нётерова по уравнениям?

В [8] приведен пример алгебраических систем, которые являются нётеровыми по уравнениям от n переменных, но не являются нётеровыми по уравнениям от $n+1$ переменных. Для алгебраической системы с конечным числом бинарных предикатных символов имеет место следующая теорема, которая дает положительный ответ на проблему 1 для таких алгебраических систем.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}=\langle A,\mathcal{L}\rangle$ — алгебраическая система языка $\mathcal{L}=\{P_1^{(2)},P_2^{(2)},\dots,P_m^{(2)}\}$ с конечным числом бинарных предикатных символов, не являющаяся нётеровой в языке с константами $\mathcal{L}_\mathcal{A}=\mathcal{L}\cup A$. Тогда существуют такой предикат P_k языка $\mathcal{L}$ и последовательность элементов $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, что для уравнений $(P_k(x,b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ и последовательности $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, выполнены условия леммы 1, то есть $\mathcal{A}$ не является нётеровой по уравнениям от одной переменной.*

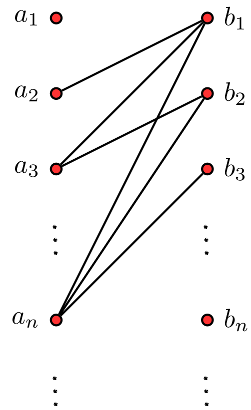
Доказательство. Так как $\mathcal{A}$ не является нётеровой по уравнениям, то, по следствию 1, существуют последовательности уравнений $S(X)$ и элементов $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющих лемме 1. По предложению 1, существует бесконечная подсистема уравнений $S'\subseteq S$ от одной переменной x. Тогда $S'(x)=\{x=c_i|i\in I_0\}\cup\bigcup_{j=1}^m\{P_j(x,b_i^j)|i\in I_j\}$. По следствию 1, подсистема S' также ненётерова, поэтому в ней не может быть уравнений вида $x=c$. С другой стороны, для некоторого $k\in\{1,2,\dots,m\}$ множество I_k бесконечно. Тогда, по следствию 1, для системы уравнений $S''=(P_k(x,b_i^k))_{i\in I_k}$ так же выполнены условия леммы 1. □

4. Графы, не являющиеся нётеровыми по уравнениям

В этом параграфе мы опишем все нётеровы графы в категориях $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{L}$. Начнем с определения совершенно ненётерого графа, играющего важную роль в данном описании.

Определение 1. *Граф Γ будем называть совершенно ненётеровым, если он содержит бесконечную последовательность попарно различных вершин $a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_n,b_n,\dots$ такую, что каждая из вершин a_i соединена ребрами со всеми вершинами b_j при $j<i$, но не соединена ребром с вершиной b_i.*

Вершины a_i и b_i совершенно ненётерового графа в дальнейшем для красоты письма будем называть *парными вершинами*. Граф, приведенный на следующем рисунке, назовем *базисным ненётеровым* графом и обозначим через B:



Очевидно, что граф B совершенно ненётеров. Далее приведем несколько замечаний о совершенно ненётеровых графах.

Замечание 1. *Каждый совершенно ненётеров граф* Γ *не является нётеровым по уравнениям в языке* $\mathcal{L}_\Gamma$*: последовательности уравнений* $S = \{E(x, b_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ *и вершин* $A = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$*, где каждая вершина* a_i *смежна со всеми вершинами* b_j *при* $j < i$ *и не смежна с* b_i*, удовлетворяют условиям леммы 1 в графе* Γ*.*

Замечание 2. *Если мы отождествим все парные вершины базисного ненётерова графа, то получим счетную клику* K*, которая не является совершенно ненётеровым графом. Действительно, обозначим через* c_i *результат отождествления вершин* a_i *и* b_i *графа* B*. Тогда, в силу смежности вершины* b_j *со всеми вершинами* a_i *при* $j < i$*, полученная вершина* c_j *будет смежна со всеми* c_i*. Отсюда следует, что счетная клика* K *в категории* $\mathfrak{S}$ *ненётерова, так как* $E(c_i, c_i)$ *ложно в категории простых графов* $\mathfrak{S}$*. Наоборот, в категории* $\mathfrak{L}$ *счетная клика является нётеровой в силу истинности уравнений вида* $E(c_i, c_i)$ *в этой категории.*

Замечание 3. *Любой граф, содержащий в качестве индуцированного подграфа ненётеров граф, ненётеров по уравнениям. Действительно, по теореме 1, в произвольном ненётеровом графе* Γ *существуют последовательности уравнений* $(E(x, b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ *и вершин* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *таких, что* $\Gamma \not\models E(a_i, b_i)$ *для всех* i *и* $\Gamma \models E(a_i, b_j)$ *для всех* $i > j$*. Пусть* Γ *индуцированный подграф графа* H*. По определению индуцированного подграфа,* $E_\Gamma(u, v) = E_H(u, v)$*. Значит последовательности уравнений* $(E(x, b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ *и вершин* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяют условиям леммы 1 в графе* H*.*

Граф, содержащий счетную клику K в качестве индуцированного подграфа будем называть *надкликой.* Следующая ключевая лемма показывает, что если граф ненётеров и не является кликой, то он совершенно ненётеров.

Лемма 2. *Пусть* Γ *- произвольный ненётеров граф, либо из категории* $\mathfrak{S}$*, либо из* $\mathfrak{L}$*. Тогда если* Γ *не является надкликой, то он совершенно ненётеров.*

Доказательство. Пусть граф Γ ненётеров по уравнениям, но не является надкликой. Тогда, по теореме 1, существуют последовательности вершин $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и уравнений $S(x) = (E(x, b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ таких, что $\Gamma \not\models E(a_i, b_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $\Gamma \models E(a_i, b_j)$ для всех $i > j$.

Обозначим через $I_c = \{i \in \mathbb{N} | a_i = b_i\}$ множество индексов, для которых вершины a_i, b_i совпадают. В силу замечания 2 имеем, что раз Γ не является надкликой, то множество I_c конечно. Тогда, в силу следствия 1, существует бесконечная подсистема уравнений $(E(x, b_i))_{i \notin I_c}$ и подпоследовательность вершин $(a_i)_{i \notin I_c}$, которые удовлетворяют условиям леммы 1. Поэтому далее будем считать, что I_c — пустое множество. Заметим, что если все вершины $a_i, b_j,\ i \neq j \in \mathbb{N}$, попарно различны в графе Γ, то Γ совершенно ненётеров и тогда он ненётеров по уравнениям. Пусть теперь не все из вершин a_i, b_j, где $i, j \in \mathbb{N}$, попарно различны. Для разбора этого случая нам понадобится теорема Брукса о раскрасках регулярных графов. Напомним, что некоторый граф допускает раскраску n цветами, если каждую вершину графа можно раскрасить в один из n цветов так, чтобы не существовало смежных вершин одного цвета. Минимальное число цветов для раскраски графа называется хроматическим числом этого графа. Приведем формулировку теоремы Брукса, следуя [10]:

Теорема 2. *Для связного неориентированного графа G с максимальной степенью Δ хроматическое число графа G не больше Δ, за исключением случаев, когда G — клика или нечетный цикл. В этих случаях хроматическое число равно $\Delta + 1$.*

По множеству вершин $\{a_i, b_i | i \in \mathbb{N}\}$ графа Γ построим граф Γ_{lev} следующим образом: паре вершин a_i, b_i графа Γ соответствует вершина c_i графа Γ_{lev} и вершины c_i, c_j графа Γ_{lev} смежны в том и только в том случае, когда a_i совпадает с b_j или a_j совпадает с b_i в графе Γ.

Заметим, что b_i не может совпадать с b_j для любых $i, j \in \mathbb{N}$, так как в системе S нет одинаковых уравнений. Во-вторых, a_i не может совпадать с a_j, в силу смежности a_j с b_i и несмежности a_i с b_i для любых $i < j$. Следовательно, степень любой вершины графа Γ_{lev} не больше 2, то есть этот граф регулярен.

Покажем, что Γ_{lev} не содержит клик. Очевидно, что раз степень каждой вершины не больше 2, то если граф и содержит клику, то только клику на трех вершинах. Заметим, что вершина c_i смежна с двумя вершинами c_j и c_k, где $j < i < k$, в Γ_{lev} тогда и только тогда, когда либо a_j совпадает с b_i и a_i совпадает с b_k, либо b_j совпадает с a_i и b_i совпадает с a_k. Тогда, в силу невозможности совпадений b_j с b_k и a_j с a_k, c_j несмежно с c_k. Таким образом, клики в графе Γ_{lev} быть не может. Более того, из наших рассуждений следует и тот факт, что для любых j и k, где $j < k$, если существует такое i, что $j < i < k$ и c_i смежно с c_j и c_k одновременно, то c_j несмежно с c_k. Это означает, что Γ_{lev} не содержит циклов.

Таким образом, по теореме 2, вершины каждой компоненты связности графа Γ_{lev} можно раскрасить не более, чем двумя цветами. Тогда вершины всего графа Γ_{lev} можно раскрасить максимум двумя цветами. Выберем бесконечное множество вершин одного цвета в графе Γ_{lev} и заметим, что в индуцированном подграфе Γ^c_{lev} на этих вершинах нет ребер. Значит, все вершины $\{a_i, b_i\}$ графа Γ, соответствующие вершинам графа Γ^c_{lev}, попарно различны. Таким образом, получаем, что граф Γ совершенно ненётеров. $\square$

Подытоживая результаты замечаний 1, 2 и леммы 2, мы получаем критерий нётеровости графов в категориях простых графов $\mathfrak{S}$ и неориентированных графов с петлями $\mathfrak{L}$, сформулированный на языке запрещенных подграфов:

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Граф из категории $\mathfrak{S}$ ненётеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он либо совершенно ненётеров, либо является надкликой.
2. Граф из категории $\mathfrak{L}$ ненётеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он совершенно ненётеров.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

References

[1] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V., *Algebraic geometry over algebraic systems*, Publishing House of SB RAS, Novosibirsk, 2016, 243 p.
[2] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V., *Unification theorems in algebraic geometry*, Algebra and Discrete Mathematics. **1** (2008). 80-112.
[3] Daniyarova E.U., Miasnikov A.G., Remeslennikov V.N., *Algebraic geometry over algebraic systems. II. Foundations*, Fundament. and app. math. **17**:1 (2012). 65-106. (in Russian).
[4] Baumslag G., Myasnikov A., Roman'kov V., *Two theorems about Equationally noetherian groups*, J. Algebra. **194** (1997). 654-664.
[5] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V., *Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and ideal theory*, J. Algebra. **219** (1999). 16-79.
[6] Shahriyary M., Shevlyakov A., *Direct products, varieties, and compactness conditions*, Groups Complexity Cryptology, Volume **9**, Issue 2, Pages 159–166.
[7] Gupta Ch.K., Romanovskii N.S., *The property of being equationally Noetherian for some soluble groups*, Algebra and Logic, **46**:1 (2007), 46–59.
[8] Kotov M.V., *On equationally Noetherian property*, Herald of Omsk University, 2013, no. **2**, pp. 24–28. (in Russian).
[9] R. Diestel, *Graph theory*, Novosibirsk: Institute of Mathematics Publishing House, 2002.
[10] Harary F., *Graph theory*, M.: World, 1973, pp. 152–153

Ivan Mikhailovich Buchinskiy
Omsk branch of Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova street, 13,
644043, Omsk, Russia
Email address: buchvan@mail.ru

Alexander Viktorovich Treyer
Omsk branch of Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova street, 13,
644043, Omsk, Russia
Email address: alexander.treyer@gmail.com