Заключение о научном содержании рукописи
И. М. Бучинского и А. В. Трейера
«О ПРОСТЫХ ГРАФАХ, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ НЕТЕРОВЫМИ ПО УРАВНЕНИЯМ»

Простой граф Γ (то есть неориентированный, без петель и кратных рёбер) называется *нётеровым по уравнениям*, если всякая система уравнений с конечным числом переменных над этим графом эквивалентна своей конечной подсистеме. Здесь под «уравнением» над графом понимается высказывание одного из двух видов: *вершины v и w совпадают* или *вершины v и w соединены ребром*, где каждая из букв v и w обозначает либо переменную (неизвестную вершину), либо константу, то есть фиксированную вершину графа Γ. Это определение соответствует общему определению уравнений над алгебраическими системами, но, как видим, в случае графов язык уравнений очень беден.

Работа содержит две теоремы.

Теорема 1. *Если всякая система уравнений с одной неизвестной над простым графом эквивалентна своей конечной подсистеме, то этот граф нётеров по уравнениям.*

Теорема 2. *Простой граф не является нётеровым по уравнениям тогда и только тогда, когда он содержит*
- *либо бесконечную клику,*
- *либо бесконечную последовательность попарно разных вершин $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ такую, что каждая из вершин a_i соединена рёбрами со всеми вершинами b_j при $j < i$, но не соединена ребром с вершиной b_i.*

Авторы доказывают теорему 1 в несколько строчек, и отмечают (с юмором, я полагаю), что эта теорема даёт ответ на графовый аналог открытого вопроса Баумслага–Мясникова–Ремесленникова (1999):

> *верно ли, что группа, над которой всякая система уравнений с одной неизвестной эквивалентна своей конечной подсистеме, является нётеровой по уравнениям?*

Теорема 2 не так проста, но тоже несложно доказывается (смотрите замечание 1 ниже).

Замечания

1. Авторское изложение доказательства теоремы 2 излишне усложнено. На самом деле ситуация простая. Если граф содержит бесконечную клику K, то система «уравнений»

$$\textit{неизвестная вершина } x \textit{ соединена рёбрами со всеми вершинами из } K \qquad (*)$$

не эквивалентна никакой своей конечной подсистеме, поскольку система $(*)$ не имеет решений в K (так как граф не имеет петель по условию), а всякая конечная подсистема этой системы имеет решения в K. Аналогично, если граф содержит последовательность вершин $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$, о которой идёт речь в теореме, то система «уравнений»

$$\textit{неизвестная вершина } x \textit{ соединена рёбрами со всеми вершинами } b_i \qquad (**)$$

не эквивалентна никакой своей конечной подсистеме, поскольку система $(**)$ не имеет решений среди a_i, а всякая конечная подсистема этой системы имеет решения среди a_i. Это завершает доказательство в одну сторону. Чтобы доказать в другую сторону, предположим, что граф ненётеров по уравнениям, то есть (по теореме 1) для некоторого фиксированного множества вершин B система «уравнений»

$$\textit{неизвестная вершина } x \textit{ соединена рёбрами со всеми вершинами из } B \qquad (***)$$

не эквивалентна никакой своей конечной подсистеме. Пусть K — максимальная клика в B (которую можно считать конечной, поскольку иначе доказывать нечего). Неэквивалентность системы $(***)$ своей конечной подсистеме позволяет последовательно выбрать вершины a_i и b_i следующим образом: для каждого натурального i в графе найдётся вершина a_i, соединённая рёбрами со всеми вершинами $K \cup \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$ и не соединённая ребром с некоторой вершиной $b_i \in B$. Эта последовательность вершин $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ и будет искомой. Действительно, при $i > j$
- $a_i \neq a_j$, поскольку по построению a_i соединена ребром с b_j, а a_j — нет;
- $b_i \neq b_j$, поскольку по построению b_j соединена ребром с a_i, а b_i — нет;
- $a_k \neq b_l$ поскольку $b_l \in B$, а вершина a_k не может лежать в B, так как по построению
  либо $\{a_k\} \sqcup K$ есть клика, а K есть максимальная клика из B,
  либо $a_k \in K$, чего не может быть, поскольку по построению a_k соединена рёбрами со всеми вершинами из K (но a_k не соединена ребром с собой по определению простого графа).

Это завершает доказательство.

2. Про лемму 1 авторы пишут, что она была доказана в [8] при дополнительных ограничениях, которые не являются существенными и «доказательство без каких-либо изменений верно для произвольной алгебраической системы». После чего авторы пользуются не столько этой леммой, сколько утверждением (следствием 1), которое «из доказательства леммы 1 следует». В такой ситуации лучше всё-таки привести доказательство нужного факта, тем более, что оно совсем короткое, насколько я понимаю.

3. С другой стороны, для доказательства основных результатов вообще никакие леммы не нужны. Всё доказательство теорем 1 и 2 уместится на двух страничках точно. Однако я понимаю, что у авторов могут быть свои резоны — эти вспомогательные леммы (пресловутое следствие 1, например) авторы, возможно, собираются когда-нибудь в будущем как-то использовать.

4. Авторская формулировка теоремы 2 неидеальна (мягко выражаясь): там фигурируют например такие обороты, как «ненётерово вложенный базовый ненётеров граф». Все эти слова авторы аккуратно объясняют — здесь нет претензий, но всё же читателям приятнее видеть простую самодостаточную формулировку.

5. Перед теоремой 2 авторы пишут:

> *„Докажем теорему, которая по формулировке является критерием ненетеровости для всех простых графов. Этот же критерий, очевидно, можно рассматривать как необходимое и достаточное условие нетеровости простых графов.“*

Я не понял смысла этой фразы. Критерий это и есть необходимое и достаточное условие? К тому же «критерий ненётеровости» — это синоним словосочетания «критерий нётеровости», да? Тогда лучше убрать ненужные отрицания.

6. Следствие 2 представляет собой совершенно бессмысленное утверждение:

> *„множество всех ненётеровых графом континуально мощно.“*

Можно предположить, что авторы имели в виду счётные графы. Но даже если так, то это совсем уж тривиальность: континуум примеров можно построить просто как несвязное объединение бесконечной клики и бесконечного числа разных конечных клик. (И это следствие не теоремы 2, а только того, что бесконечная клика ненётерова).

7. Список литературы озаглавлен почему-то словом *REFERENCES* и написан полностью по-английски, даже когда речь идёт о русских статьях. (Или в этом журнале такие странные требования?)

Считаю, что работа достаточно интересна и может быть опубликована в *Сибирских электронных математических известиях* после внесения исправлений (и сокращений). Результаты простые, но не тривиальные; вероятно, они добавляют понимания того, что происходит с нётеровостью по уравнениям для произвольных алгебраических систем. Часть замечаний касается стиля, но в целом то, как написана статья, производит приятное впечатление.

Рецензент