S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 807–813 (2020) УДК 519.21

DOI 10.33048/semi.2020.17.058 MSC 60G50

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМУМА ТРАЕКТОРИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В.И. ЛОТОВ, В.Р. ХОДЖИБАЕВ

Abstract. We study a stochastic process with switchings between two stationary processes with independent increments while achieving regulatory barriers. The regulation is intended to keep under control the range of trajectories. At the same time the structure of the process allows the trajectories stay some time outside the band adjustments. The paper establishes limit theorem for the distribution of the maximum possible excess of the upper regulatory barrier.

Keywords: stochastic process with switchings, boundary crossing problems, regenerative process, limit theorems.

В статье Ю.В. Прохорова [1] введен и изучался винеровский процесс с двумя уровнями контроля, при достижении которых снос этого процесса менял свой знак. Для изучения свойств этого процесса использовались аппроксимация простым случайным блужданием и известные результаты в задаче о разорении. Эта работа дала начало целой серии статей о случайных блужданиях и процессах с непрерывным временем с различными типами управления в момент, когда траектории достигают определенных уровней регулировки. Процессы подобного вида находят применение в стохастических моделях управления запасами, в моделях систем обслуживания, актуарной математики. Как и всякие задачи, связанные с достижением границ траекториями случайных

Lotov, V.I., Xodjibayev, V.R., On the distribution of the trajectory maximum of a stochastic process with switchings.

Работа поддержана РНФ (грант 18-11-00129).

Поступила 31 марта 2020 г., опубликована 17 июня 2020 г.

процессов, их исследование сопряжено с применением весьма сложных аналитических методов, включая метод факторизации. Соответствующие ссылки можно найти в [2].

Настоящая работа также относится к указанному направлению — исследованию свойств регулируемых случайных процессов.

Рассматривается случайный процесс $X(t),\ t \geq 0$, с двумя уровнями регулировки, введенный в [3]. Напомним его определение.

Пусть $\xi_i(t)$, $t \geq 0$, $i = 1, 2$, — независимые однородные случайные процессы с независимыми приращениями,

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0, \qquad \mathbf{E}\xi_1(1) > 0, \qquad \mathbf{E}\xi_2(1) < 0.$$

Траектории процессов предполагаются непрерывными справа. Для произвольного $b > 0$ определим случайные величины

$$\tau_1 = \inf\{t \geq 0 : \xi_1(t) \geq b\}, \qquad \tau_2 = \inf\{t \geq 0 : \xi_2(t) \leq -b\}.$$

На промежутке времени $0 \leq t \leq \tau_1 + \tau_2$ случайный процесс $X(t)$ строится следующим образом: $X(0) = 0$, и далее полагаем

$$X(t) = \begin{cases} \min\{\xi_1(t), b\}, & 0 \leq t \leq \tau_1, \\ \max\{b + \xi_2(t - \tau_1), 0\}, & \tau_1 < t \leq \tau_1 + \tau_2. \end{cases}$$

В соответствии с этим определением $X(t)$ совпадает с $\xi_1(t)$ до тех пор, пока впервые не будет достигнут уровень b в момент времени τ_1, полагаем при этом $X(\tau_1) = b$, игнорируя перескок. При $t > \tau_1$ в качестве приращений процесса $X(t)$ используются приращения процесса $\xi_2(t)$ до тех пор, пока впервые после τ_1 не будет достигнут нулевой уровень в момент времени $\theta_1 := \tau_1 + \tau_2$, $X(\theta_1) = 0$. После чего приращения процесса $X(t)$ вновь переключаются на приращения независимой копии процесса $\xi_1(t)$ до тех пор, пока в некоторый момент времени $\theta_1 + \tau_3$ не будет достигнут уровень b, полагаем $X(\theta_1 + \tau_3) = b$. Затем опять происходит переключение на независимую копию процесса $\xi_2(t)$ до тех пор, пока в некоторый момент времени $\theta_2 := \theta_1 + \tau_3 + \tau_4$ не будет достигнут уровень 0. Как и на предыдущем этапе, полагаем $X(\theta_2) = 0$. При $t > \theta_2$ дальнейшие переключения на независимые копии процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ происходят по той же схеме. Получаемая в итоге последовательность моментов достижения нуля $\{\theta_k,\ k \geq 0\}$ выглядит следующим образом: $\theta_0 = 0$, $\theta_{k+1} = \theta_k + \tau_{2k+1} + \tau_{2k+2}$. Здесь случайные величины τ_{2k+1} распределены одинаково с τ_1, случайные величины τ_{2k+2} распределены одинаково с τ_2, и все они независимы.

Из определения ясно, что $X(t)$ является регенерирующим случайным процессом с непрерывным временем. Моменты $\theta_1, \theta_2, \ldots$ (последовательные моменты достижений нулевого уровня процессом $X(t)$) являются моментами регенерации, так как с вероятностью единица при $t = \theta_k$ процесс $X(t)$ попадает в нуль. Времена между моментами регенерации являются независимыми и одинаково распределенными с θ_1 случайными величинами, $\mathbf{E}\theta_1 = \mathbf{E}\tau_1 + \mathbf{E}\tau_2 < \infty$. Вероятностные характеристики траектории случайного процесса между моментами регенерации являются одинаковыми.

Цель введения регулирующих барьеров состоит в том, чтобы воспрепятствовать траектории процесса забираться высоко вверх и опускаться намного ниже нуля. Тем не менее конструкция процесса позволяет превысить уровень b после его достижения, как и, впрочем, уход в отрицательную плоскость после достижения нуля. Тем самым появляется необходимость исследования величины возможного выхода за пределы полосы.

Работа [3] была посвящена нахождению преобразований Лапласа — Стильтьеса достационарного и стационарного распределений случайного процесса $X(t)$. Данная работа является продолжением [3]. В ней найдено предельное распределение величины максимально возможного превышения верхнего регулирующего барьера в условиях крамеровского типа. Тем самым она является распространением некоторых результатов [4] на процессы с непрерывным временем. Здесь используются и адаптируются для процессов с непрерывным временим технические приемы из [4] и [5].

Введем случайный процесс

$$Z(t) := \sup\{X(s):\ s \le t\}, \qquad t \ge 0,$$

и предположим, что $\mathbf{P}(\xi_2(1) > 0) > 0$. Целью данной работы является изучение предельного поведения распределения $Z(t)$ при $t \to \infty$.

Начнем с изучения $Z(\theta_n)$ — максимума траектории за n циклов регенерации. Обозначим

$$V_k := \max\{X(t):\ \theta_{k-1} \le t < \theta_k\}$$

— максимум траектории на $k-$м цикле регенерации. Ясно, что случайные величины $V_1, V_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, поэтому

$$\mathbf{P}(Z(\theta_n) < x) = \mathbf{P}(V_1 < x,\ V_2 < x, \ldots, V_n < x) = [\mathbf{P}(V_1 < x)]^n. \tag{1}$$

Тем самым задача сводится к нахождению асимптотики правого хвоста распределения максимума траектории процесса на первом цикле. По построению этот максимум не может быть меньше b. Он равен в точности b с некоторой не существенной для нас вероятностью, и может превышать этот уровень только на той части траектории, которая определяется процессом $\xi_2(t)$.

Для анализа распределения случайной величины V_1 по аналогии с [4] рассмотрим момент первого выхода случайного процесса $\xi_2(t)$ из интервала $(-b, x)$, $x > 0$:

$$\tau := \inf\{t \ge 0 : \xi_2(t) \notin (-b, x)\},$$

и пусть $\beta(b, x) = \mathbf{P}(\xi_2(\tau) \ge x)$ — вероятность того, что первый выход из интервала $(-b, x)$ произойдет через его верхнюю границу.

Следующая лемма является очевидным аналогом леммы 1 из [4], доказанной там для случая дискретного времени.

Лемма 1. *Для $x > 0$ имеет место соотношение* $\mathbf{P}(V_1 \ge b + x) = \beta(b, x)$.

Далее будем анализировать предельное поведение величины $\beta(b, x)$ при $x \to \infty$. Обычно те или иные характеристики задач с двумя границами первоначально выражаются через распределения функционалов от траекторий случайных процессов, возникающих в задачах с одной границей. В нашем случае будут использоваться распределение супремума траектории процесса и предельное распределение величины перескока через бесконечно удалённый отрицательный барьер.

При изучении распределений упомянутых выше функционалов особое место занимает случай арифметических распределений. В наших условиях арифметическим является только случай сложного пуассоновского процесса без сноса с арифметически распределёнными скачками. Мы здесь исключаем из рассмотрения арифметические процессы, так как для сложных пуассоновских процессов многие результаты легко следуют из аналогичных результатов для сумм случайных величин.

Обозначим для $\mathrm{Re}\lambda = 0, \quad x \geq 0$,

$$\psi(\lambda) = \ln \mathbf{E} e^{\lambda \xi_2(1)}, \qquad \zeta = \sup_{t \geq 0} \xi_2(t), \qquad Q(x) = \mathbf{P}(\zeta \geq x),$$

$$\eta(y) = \inf\{t \geq 0 : \ \xi_2(t) \leq y\}, \qquad \chi(y) = \xi_2(\eta(y)) - y,$$

$$\overline{\eta}(y) = \inf\{t \geq 0 : \ \xi_2(t) < y\}, \qquad \overline{\chi}(y) = \xi_2(\overline{\eta}(y)) - y, \qquad y \leq 0.$$

Пусть

$$G(x) = \lim_{y \to -\infty} \mathbf{P}(\chi(y) < x) = \mathbf{P}(\chi < x)$$

— распределение величины первого перескока через бесконечно удалённый отрицательный барьер. Из результатов работы [6] немедленно следует, что если $-\infty < \mathbf{E}\xi_2(1) < 0$, то величина χ имеет собственное распределение, для характеристической функции которого имеет место представление

$$\mathbf{E}e^{\lambda\chi} = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda|\mathbf{E}\xi_2(1)|}\mathbf{E}e^{\lambda\zeta}.$$

Если же выполнено

$$-\infty < \mathbf{E}\xi_2(1) \leq 0, \qquad \mathbf{P}(\overline{\eta}(0) > 0) = 1,$$

то имеет место соотношение

$$\mathbf{E}e^{\lambda\chi} = \frac{1 - \mathbf{E}e^{\lambda\overline{\chi}(0)}}{\lambda|\mathbf{E}\overline{\chi}(0)|}.$$

Известно [7], что для выполнения условия $\mathbf{P}(\overline{\eta}(0) > 0) = 1$ достаточно потребовать сходимость интеграла $\int_0^1 t^{-1}\mathbf{P}(\xi_2(t) < 0)dt$.

Обозначим

$$g(x, b) = \int\limits_{-\infty}^{+0} Q(x - y)\mathbf{P}(\chi(-b) \in dy),$$

$$g(x) = \lim_{b \to \infty} g(x, b) = \int\limits_{-\infty}^{0} Q(x - y)\, dG(y).$$

Доказательство следующей леммы проводится практически полностью по схеме доказательства теоремы 1 из [5] с необходимыми изменениями, касающимися, в основном, обозначений.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{E}\xi_2(1) < 0$. *Тогда при* $x \to \infty$

$$\beta(b, x) = \frac{Q(x) - g(x + b, b)}{1 - g(x + b)}(1 + o(g(x + b))). \tag{2}$$

Если $b \to \infty$, *то в формулировке леммы* $g(x+b, b)$ *можно заменить на* $g(x+b)$.

Нахождение функции $Q(x)$ в явном виде доступно лишь в немногих частных ситуациях. Поэтому здесь приходится использовать асимптотические представления для $Q(x)$, которые известны при различных ограничениях на распределение $\xi_2(1)$.

Рассмотрим функцию $\mathbf{E}e^{\lambda\xi_2(1)}$ при вещественных λ. Кроме точки $\lambda = 0$ на вещественной оси может существовать целый отрезок, где $\mathbf{E}e^{\lambda\xi_2(1)}$ конечно; вне этого отрезка величину $\mathbf{E}e^{\lambda\xi_2(1)}$ можно считать бесконечной.

Известно [8], что

$$Q(x) = \mathbf{P}(\zeta \geq x) \leq e^{-\rho x}, \tag{3}$$

где $\rho = \sup\{\lambda: \ \mathbf{E}e^{\lambda\xi_2(1)} \leq 1\}$ $(\rho = \sup\{\lambda: \ \psi(\lambda) \leq 0\})$. Равенство в (3) имеет место в следующих случаях: 1) когда $\mathbf{P}(\zeta > 0) = 1$ (это выполняется, если $\mathbf{E}\xi_2(1) \geq 0$), и 2) когда процесс является спектрально отрицательным, то есть процессом без положительных скачков. Этими двумя случаями исчерпываются все возможности выполнения равенства в (3). Отметим, что условие $\mathbf{E}\xi_2(1) < 0$ и конечность $\mathbf{E}e^{\lambda\xi_2(1)}$ при некотором $\lambda > 0$ гарантируют, что $\rho > 0$. Отметим также, что если $\mu = \sup\{\lambda: \ |\psi(\lambda)| < \infty\}$, то $\mu \geq \rho$. Если $\rho > 0$ и $\psi(\rho - 0) < 0$, то $\mu = \rho$.

Здесь мы рассмотрим случай, когда $\rho > 0$, $\psi(\rho) = 0$, $\psi'(\rho) < \infty$.

Следующая лемма доказана в [9, стр. 214].

Лемма 3. *Пусть $\rho > 0$, $\psi(\rho) = 0$, $\psi'(\rho) < \infty$. Тогда при $x \to \infty$*

$$Q(x) = \mathbf{P}(\zeta \geq x) = ce^{-\rho x}(1 + o(1)), \tag{4}$$

где

$$c = \left(\rho\psi'(\rho) \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\rho y} dF_-(y)\right)^{-1},$$

$$F_-(y) = -\int\limits_0^\infty \mathbf{P}\big(\inf_{0 \leq s \leq t} \xi_2(s) \geq y\big)dt = -\int\limits_0^\infty \mathbf{P}(\overline{\eta}(y) > t)dt = -\mathbf{E}\overline{\eta}(y), \qquad y \leq 0.$$

Соотношение (4) и другое выражение для константы c при некоторых дополнительных ограничениях на процесс известны из [10].

Обозначим

$$d(b) = \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{\rho y}\mathbf{P}(\chi(-b) \in dy).$$

Из соотношений (2), (4) с помощью простых вычислений получается следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия леммы 3. Тогда для любого $b > 0$ при $x \to \infty$ имеет место соотношение*

$$\beta(b, x) = ce^{-\rho x}(1 - d(b)e^{-\rho b})(1 + o(1)) \tag{5}$$

Пусть выполнены условия леммы 3. В соответствии с (1) имеем для $x > 0$

$$\mathbf{P}(Z(\theta_n) < b + x) = [\mathbf{P}(V_1 < b + x)]^n = (1 - \beta(b, x))^n.$$

Действуя аналогично [4], обозначим $k(b) = c\big(1 - d(b)e^{-\rho b}\big)$. Положим

$$x = (\log n + y)\rho^{-1}$$

и заметим, что величина $o(1)$ при $x \to \infty$ в (5) есть o(1) и при $n \to \infty$. Воспользовавшись утверждением леммы 4, получаем при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(Z(\theta_n) < b + (\log n + y)\rho^{-1}) = \left(1 - \frac{k(b)e^{-y}}{n}(1 + o(1))\right)^n,$$

$$\log \mathbf{P}(Z(\theta_n) < b + (\log n + y)\rho^{-1})$$
$$= n \log\left(1 - \frac{k(b)e^{-y}}{n}(1 + o(1))\right) = -k(b)e^{-y}(1 + o(1)).$$

Тем самым приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}\xi_1(1) > 0$, $\mathbf{E}\xi_2(1) < 0$ *и* $\mathbf{P}(\xi_2(1) > 0) > 0$. *Предположим, что* $\rho > 0$, $\psi(\rho) = 0$, $\psi'(\rho) < \infty$. *Тогда для произвольного* y *при* $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(Z(\theta_n) - b - \frac{\log n}{\rho} < y\big) = \exp\{-k(b)e^{-\rho y}\}.$$

Обозначим $a = \mathbf{E}\theta_1 = \mathbf{E}\tau_1 + \mathbf{E}\tau_2$. Здесь $\mathbf{E}\tau_1 < \infty$ и $\mathbf{E}\tau_2 < \infty$ в силу условий $\mathbf{E}\xi_1(1) > 0$, $\mathbf{E}\xi_2(1) < 0$.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 для любого* y *при* $n \to \infty$ *имеет место*

$$\mathbf{P}\big(Z(na) - b - \frac{\log n}{\rho} < y\big) \to \exp\{-k(b)e^{-\rho y}\}.$$

Доказательство. Из усиленного закона больших чисел следует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n}{n} = a$$

с вероятностью единица. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого n с вероятностью единица выполняется

$$n(a - \varepsilon) < \theta_n < n(a + \varepsilon),$$

и, следовательно,

$$Z(n(a - \varepsilon)) \le Z(\theta_n) \le Z(n(a + \varepsilon)).$$

Отсюда сразу же получаем

$$\mathbf{P}(Z(n(a + \varepsilon)) < b + x) \le \mathbf{P}(Z(\theta_n) < b + x) \le \mathbf{P}(Z(n(a - \varepsilon)) < b + x).$$

С учетом этого соотношения утверждение следствия следует теперь из способа построения процесса $X(t)$ и стохастической непрерывности процесса $\xi_2(t)$. Следствие доказано.

Используя асимптотическое представление для $\mathbf{P}(\zeta \ge x)$ из [9, стр. 217], аналогичные предельные соотношения можно выписать и в случае $\rho > 0$, $\psi(\rho) = 0$, $\psi'(\rho) = \infty$. При этом накладываются некоторые дополнительные условия на $\psi(\lambda)$.

References

[1] Yu.V. Prokhorov, *Control by a Wiener process with a limited number of switchings*, (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova, **71** (1964), 82—87. Zbl 0156.18402

[2] V.I. Lotov, *On a random walk with switchings*, Sib. Electron. Mat. Izv., **15** (2018), 1320–1331. Zbl 1414.60030

[3] V.I. Lotov, V.R. Khodjibayev, *On a stochastic process with switchings*, Sib. Electron. Mat. Izv., **16** (2019), 1531—1546. Zbl 1423.60075

[4] V.I. Lotov, *On the distribution of the trajectory maximum of a random walk with switchings*, Sib. Electron. Mat. Izv., **16** (2019), 998—1004. Zbl 07122025

[5] V.I. Lotov, *On the asymptotics of the ruin probability*, Theory Probab. Appl., **59**:1 (2015), 154–163. Zbl 1319.60093

[6] A.A. Mogul'skii, *On the size of the first jump for a process with independent increments*, Theory Probab. Appl., **21** (1976), 470-–481. Zbl 0361.60038

[7] B.A. Rogozin, *On the distributions of some functional related to boundary problems for processes with independent increments*, Theor. Probab. Appl., **11** (1966), 580—591. Zbl 0178.52701

[8] B.A. Rogozin, *On the local behavior of processes with independent increments*, Theor. Probab. Appl., **13** (1968), 482—486. Zbl 0178.52701

[9] N.S. Bratiichuk, D.V. Gusak, *Boundary problems for the processes with independent increments*, Naukova Dumka, Kiev, 1990. MR1070711

[10] B.A. Rogozin, *Distribution of the maximum of a process with independent increments*, Sib. Math. J. **10** (1969), 989–1010. Zbl 0198.22302

Vladimir Ivanovich Lotov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia,
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: lotov@math.nsc.ru

Vali Raximdjanovich Xodjibayev
Namangan Engineering - construction Institute,
12,Islam Karimov str.,
Namangan, 160103, Uzbekistan
E-mail address: vkhodjibayev@mail.ru